# UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN, MEDIANTE ACTIVIDADES DE VISUALIZACIÓN

Lucía González Rendón y Marisol Radillo Enríquez
Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara. México
lgrendon2@yahoo.com.mx, marisol.radillo@red.cucei.udg.mx

**Resumen.** Se presenta un anteproyecto cuyo objetivo es diseñar una alternativa didáctica que permita al alumno construir el significado de la derivada mediante un proceso reflexivo basado en la visualización. Se proponen actividades para la enseñanza del significado geométrico de la derivada, su definición y algunas de sus propiedades, mediante el uso de diferentes representaciones semióticas, con o sin el uso de la computadora.
**Palabras clave**: visualización, derivada, cálculo
**Abstract.** On present a proposal whose goal is to design an alternative teaching allowing the student to construct the meaning of the derivative by a reflexive process based on the display. On propose activities for the teaching of the geometrical meaning of the derivative, its definition and some of its properties, using different semiotic representations, with or without the use of the computer.
**Key words**: visualization, derivative, calculus

## Introducción

La comprensión del concepto de la derivada de una función en un punto dado conlleva un proceso complejo que involucra diversas representaciones semióticas, según el enfoque desde el cual se analice. Si se aborda el significado geométrico, se recurre a la representación gráfica de la función y la recta tangente a ella en un punto dado; la representación analítica o algebraica es más adecuada si se desea construir el significado de la derivada como el límite de un cociente. No obstante, si las actividades mencionadas no se vinculan adecuadamente entre sí mediante actividades que propicien la reflexión del estudiante sobre los objetos matemáticos involucrados, es común que se asocie la derivada a un proceso algorítmico y descontextualizado (Sánchez, García y Llinares, 2008).

## Soporte teórico

El aprendizaje de los objetos matemáticos opera a nivel conceptual, pero la actividad del estudiante sobre dichos objetos solo es posible a través de sus representaciones semióticas (Hitt, 2003). Si se considera que la comprensión de un objeto matemático involucra el desarrollo de una variedad de representaciones, ya sea internas (mentales) o externas (semióticas), entonces la enseñanza debe propiciar el uso de diversas representaciones de un mismo objeto y las relaciones funcionales entre ellas (Font, 2007).

A su vez, cada una de los formas de representación, junto con las normas que las rigen, propone una caracterización distinta del correspondiente concepto, por lo que se recomienda diferenciar varias representaciones en cada concepto. Por ejemplo, la comprensión de la derivada como razón de cambio se expresa en forma analítica o algebraica, mientras que el significado geométrico se aprecia mejor de manera gráfica.

Por otra parte la visualización matemática de un problema implica una traducción de las condiciones planteadas, usualmente expresadas en forma verbal o analítica, a otros sistemas de representación como el gráfico y/o el numérico o tabular, con lo cual es posible analizar la situación y encontrar las posibles estrategias de solución. Por ejemplo, es más sencillo percibir si la función $f(x) = x^{2/3}$ es derivable en $x = 0$, a partir de su representación gráfica, que mediante el procedimiento algorítmico de su expresión analítica, ya que en la primera se aprecia el "pico" de la curva y se asocia al teorema correspondiente sin necesidad de efectuar cálculo alguno.

Si bien el uso de la tecnología es un valioso apoyo para realizar las actividades de visualización matemática, no es la parte central de la propuesta. El objetivo de este proyecto es analizar cuáles representaciones semióticas son más adecuadas en cada etapa de la enseñanza del concepto de la derivada de una función en un punto dado.

Una parte importante de la propuesta consiste en incorporar problemas que involucran diversos contextos y que sean susceptibles de solucionarse mediante la aplicación de derivadas, para que el estudiante sea capaz de transferir el conocimiento matemático a otras ciencias. Para tal fin se plantean situaciones de crecimiento poblacional, de la eliminación de un medicamento en el organismo, o de la desintegración del carbono catorce e incluso de fenómenos sociales tales como la propagación de un rumor, de manera que la modelación matemática de estas funciones en conjunto con el planteamiento de alguna pregunta clave cuya respuesta conduzca necesariamente al concepto de la derivada. Durante el proceso de solución de cada uno de estos problemas se incorporan las actividades de visualización mediante las diversas representaciones de la derivada, ya sea con ayuda de algún programa computacional o con trabajo a lápiz y papel.

## Metodología

La base del trabajo es el programa vigente de Cálculo Diferencial e Integral del CUCEI, en particular la unidad III (Derivadas) y el énfasis del trabajo se puso en el concepto de la derivada y los casos en que una función carece de derivada en un punto dado.

Para comenzar, se proporciona un adelanto del significado de la derivada como una razón de cambio en las siguientes gráficas, que describen alguna situación de nuestro "mundo real" (figura 1), y se proporcionan ejemplos de gráficas de funciones tales como crecimiento poblacional en México, la eliminación de un medicamento en el cuerpo, la desintegración del carbono 14, la propagación de un rumor y la eliminación de la cafeína consumida. Una vez analizadas todas las situaciones mencionadas, se prosigue con la siguiente explicación: Cada una de estas gráficas, describe un cambio que está ocurriendo: el crecimiento de población, eliminación de un medicamento, propagación de un rumor y de cafeína en el cuerpo. Se puede notar que hay una relación entre estos cambios y la “inclinación” de la gráfica. El Cálculo provee la herramienta matemática para estudiar cada uno de estos cambios en forma cuantitativa. La derivada proporciona la medida numérica de la “inclinación” de una curva en un punto particular

Posteriormente se plantea la siguiente actividad inicial para introducir el concepto de la derivada desde un contexto geométrico y activar los conocimientos previos del estudiante acerca de la pendiente de una recta y la ecuación de la recta: Determine la ecuación de la recta tangente a la función $y = x^2$, en el punto P(1, 1). La solución se obtiene mediante un proceso que involucra la representación gráfica del problema y una tabulación o representación numérica de las aproximaciones de una recta secante a la recta tangente (figura 2). Se tiene diseñada una práctica mediada por la computadora para resolver este mismo problema (figura 3), aunque es opcional su implementación..

A manera de cierre de esta actividad se concluye que la pendiente de la recta tangente a una función en un punto dado es el límite de la pendiente te la recta secante ($\boldsymbol{m}_{PQ}$) a la curva *f(x)*, cuando la diferencia (***h***) entre $x_Q$ y $x_P$ es tan pequeña que tiende a cero.

Una vez analizado el significado geométrico de la derivada se pide calcular la pendiente de la recta tangente a la función $y = \sqrt{x}$ en (a) $x = 4$ y en (b) $x = 0$. La discusión grupal girará en torno a las siguientes preguntas: ¿Por qué no es posible obtener la pendiente para el inciso (b)? ¿En qué casos la pendiente de una recta es indeterminada? ¿Por qué no es posible determinar el límite de $y = \sqrt{x}$ cuando $x \to 0$?

**UN ADELANTO DEL SIGNIFICADO DE LA DERIVADA**

Para obtener una visión del objetivo final del cálculo diferencial, veremos un adelanto del significado de la derivada como una razón de cambio en las siguientes gráficas, que describen alguna situación de nuestro mundo real.

**CRECIMIENTO DE POBLACIÓN EN MÉXICO**

En gráfica de la figura 1, se consideraron los datos de la población de México entre los años de 1980 a 1986, para ver la forma en que estaba creciendo la población de un año a otro.

En la gráfica vemos que la población crece más y más rápido a medida que pasa el tiempo, pudiendo hacer un pronóstico para 60 años después de 1980.

En 1980 la población era de 67.38 millones, en la gráfica observamos que la población se duplicará aproximadamente en 27 años; esto recibe el nombre de *tiempo de duplicación*.

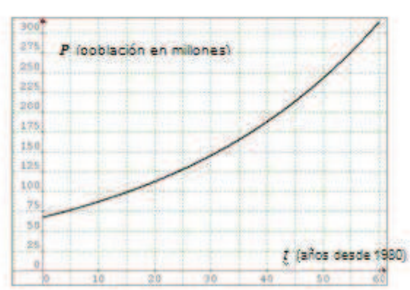



Figura 1. Crecimiento de población

**ELIMINACIÓN DE UN MEDICAMENTO EN EL CUERPO**

A un paciente se le suministra una dosis de 250 mg. de ampicilina. Aproximadamente 40% de este medicamento se elimina cada hora.

En gráfica de la figura 2, podemos ver que el medicamento se reduce a la mitad de su cantidad original, o sea 125 mg, después de 1.4 horas aproximadamente.

Decimos, que la *vida media* de la ampicilina es de 1.4 horas.

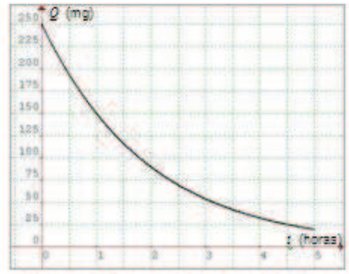
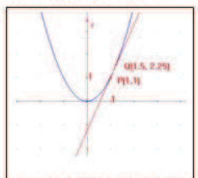



Figura 2. Eliminación de un medicamento

Figura 1. Adelanto sobre el significado de la derivada

*Por ejemplo: la pendiente de la recta que pasa por P(1, 1) y Q(1.5, 2.25) tiene como pendiente:*

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = 2.5$$




*No obstante este valor es aproximado ¿Cómo se puede obtener el valor exacto de la pendiente de la recta tangente a $y = x^2$, en el punto P(1, 1)?*

Completa la siguiente tabulación de valores de la pendiente $m_{PQ}$ conforme el punto Q se acerca al punto P:

| $x_Q$ | $m_{PQ}$ |
|---|---|
| 0.9 | |
| 0.99 | |
| 0.999 | |

| $x_Q$ | $m_{PQ}$ |
|---|---|
| 1.1 | |
| 1.01 | |
| 1.001 | |

Se concluye que la pendiente de la recta tangente a la función en el punto (1, 1) es el ***límite*** de la pendiente de las rectas secantes $\lim_{x_Q \to x_P} m_{PQ} = 2$, que también se representa como $\lim_{x_Q \to 1} m_{PQ} = 2$

Figura 2: Representación numérica o tabular mediante la cual se determina la pendiente de la recta tangente a $y = x^2$ en (1, 1) con apoyo de la representación gráfica del problema

*Actividades con computadora (opcional)*

Iniciar sesión en Geogebra y seguir las siguientes indicaciones:

| Comando o lugar | Acciones | Comentarios |
|---|---|---|
| **Entrada** (parte baja de la pantalla) | Capturar la función: f(x)=x^2 | Oprimir ENTER |
| **Entrada** (parte baja de la pantalla) | Capturar: P(1,1) | Oprimir ENTER |
| **Punto** (Barra de Herramientas) | Señalar un punto sobre la función | Por default se llamará "A" |
| **Recta que pasa por dos puntos** (Barra de Herramientas) | Hacer clic sobre los puntos P y A | Por default la recta se llamará "a"<br>Es una recta secante a f<br>Es posible variar la posición del punto A, pero el punto P debe quedar fijo |
| **Vista Algebraica** | Colocar el cursor sobre la recta "a", oprimir el botón derecho del ratón,<br>elegir "renombra" y cambiar nombre a "s" ;<br>ahí mismo, elegir "propiedades" y cambiar color | La recta secante se renombra como "s" y se cambia el color. |
| **Recta tangente** (Barra de Herramientas) | Seleccionar al punto P y a un punto cualquiera de la función f | Aparece la recta tangente a f, que pasa por el punto.<br>Por default se llamará "a" |
| **Vista Algebraica** | Colocar el cursor sobre la recta "a", oprimir el botón derecho del ratón,<br>elegir "renombra" y cambiar nombre a "t" ; ahí mismo, elegir "propiedades" y cambiar color | La recta tangente se renombra como "t" y se cambia el color. |
| **Entrada** (parte baja de la pantalla) | Capturar: Pendiente[s] | Oprimir ENTER. En la vista algebraica aparece el valor de la pendiente de la recta secante. Por default se nombra "a". Renombrar a "ms" |
| **Entrada** (parte baja de la pantalla) | Capturar: Pendiente[t] | Oprimir ENTER. En la vista algebraica aparece el valor de la pendiente de la recta secante. Por default se nombra "a" Renombrar a "mt" |

1. Arrastrar el punto A a lo largo de la función f y observar la variación de la pendiente.
2. Acercar el punto A al Punto P y comparar las pendientes de la recta secante y la recta tangente
3. Si se coloca al punto A sobre el punto P ¿qué sucede con el valor de la pendiente de la recta secante?

Figura 3. Significado geométrico de la derivada: actividad con apoyo de la computadora.

La propuesta de enseñanza continúa con la definición de derivada, su notación, algunos teoremas y la definición de derivadas laterales (figura 4).

- Una función es ***diferenciable en un punto c*** de un intervalo [a, b] si y solo si las derivadas laterales para ese punto son iguales.

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \qquad f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

A estos límites se les conoce como "derivada por la izquierda" y "derivada por la derecha", respectivamente.

Figura 4: Definición de las derivadas laterales de una función

Después de esto se analizan los casos en que una función carece de derivada en un punto dado. Para este tema con recomendables las actividades mediadas por la computadora. En las figuras 5, 6 y 7 se muestran los casos en que una función carece de derivada en un punto dado, con imágenes obtenidas mediante el uso del *geogebra*:

- Si la recta tangente a la función en ese punto, es vertical (figura 5)
- Si el límite bilateral de la función en ese punto, no existe (figura 6)
- Si la gráfica de la función presenta un "pico" (figura 7)

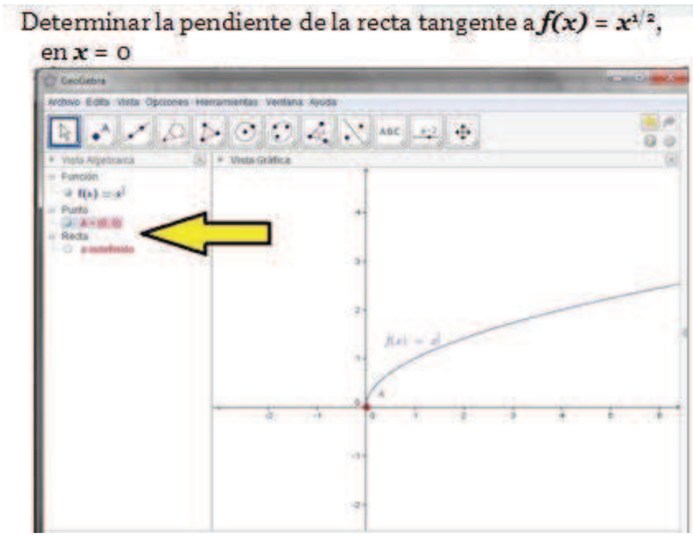



Figura 5: La función carece de derivada en un punto donde la recta tangente a ella es vertical

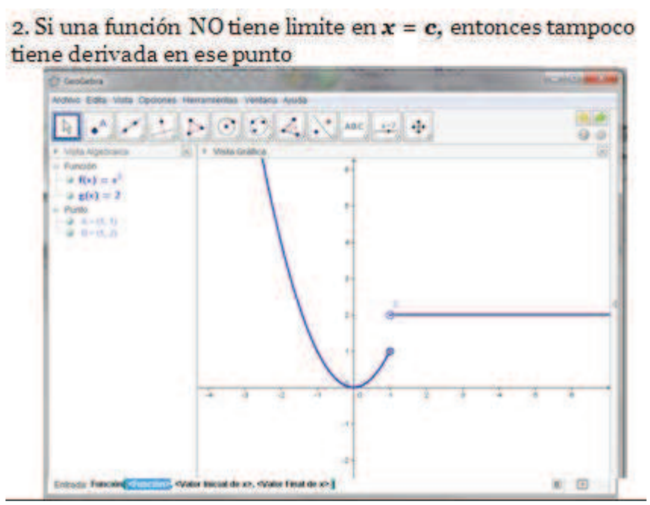



Figura 6: Si el límite de una función en un punto dado no existe, entonces la función no es derivable en ese punto.

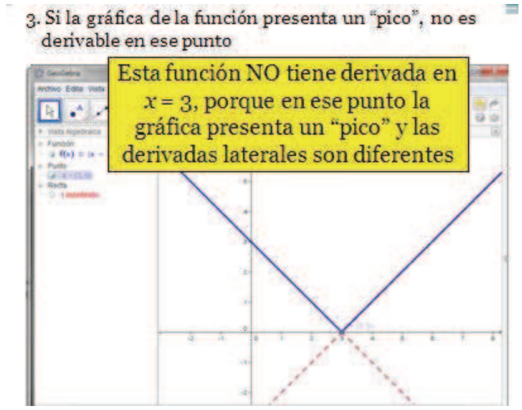



Figura 7: Si la gráfica de la función presenta un "pico" en un punto dado, entonces no es derivable en ese punto.

## Consideraciones finales

El uso de las diferentes representaciones semióticas de las funciones y sus derivadas enriquece la construcción de los significados matemáticos. El resto de los contenidos del tema de las derivadas consiste en deducir las fórmulas de derivación para distintos tipos de funciones, así como las reglas del cociente, producto, de la cadena, etc., lo cual se maneja principalmente mediante procedimientos algebraicos. No obstante el manejo de las diversas representaciones semióticas que se plantean para la construcción del concepto de derivada fortalece el aprendizaje del estudiante, quien puede auxiliarse de dichos registros en cualquier momento que lo requiera.

La participación activa del estudiante en la manipulación de las representaciones semióticas, así como una secuencia de actividades apropiada, propicia el descubrimiento de la derivada de una función en un punto dado y sus propiedades.

Estas ideas son la base para una futura investigación experimental para el aprendizaje de la derivada de una función en un punto dado.

Las actividades mediadas por la computadora son un apoyo importante en esta propuesta, ya que permiten a los estudiantes construir significados mediante la manipulación de los objetos matemáticos

## Referencias bibliográficas

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 213-224.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto. Una mirada desde la Didáctica de las Matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 10(2),* 419-434.

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en la Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 11(2)*, 267-296.