

SITUACIONES ASOCIADAS A LOS NÚMEROS NEGATIVOS EN TEXTOS DE MATEMÁTICAS ESPAÑOLES DE LOS SIGLOS XVIII Y XIX

Alexander Maz y Luis Rico

Se presenta el avance de una investigación sobre la presencia de los números negativos en los textos de matemáticas publicados por autores españoles durante los siglos XVIII y XIX. El centro de atención ha estado en determinar el tipo de situaciones con las que se asociaba el número negativo.

Palabras clave: Números negativos; Historia; Libros de texto.

This is an advance of an investigation about the presence of the negative numbers in the texts of mathematics published by Spanish authors during the 18th and 19th centuries. The centre of attention is to determine the type of situations which were associated to the negative number.

Keywords: Negative numbers; History; Textbooks.

Los números negativos han llamado la atención de los investigadores en Educación Matemática dado que, durante el desarrollo de las actividades de enseñanza de las matemáticas, los profesores encuentran dificultad manifiesta en los alumnos para su comprensión.

Se han llevado a cabo diversas investigaciones que, en términos generales, pretenden descubrir, explicar, diagnosticar y corregir las dificultades de los escolares con los números negativos. Tales investigaciones han abordado el problema desde variadas perspectivas: epistemológicas, didácticas, históricas y conceptuales.

De estas investigaciones surgen explicaciones sobre la evolución de los negativos, que van desde los conocidos obstáculos de Glaeser (1981) hasta las interpretaciones sociales y culturales de Lizcano (1993) y Schubring (1987, 1988, 1993), pasando por la conjetura de los números naturales relativos de González (1995). Los números naturales relativos (\mathbb{N}_r), que abarcan números positivos y negativos, pero cuya estructura y relación de orden son distintas a las de \mathbb{Z} , son un concepto propio del trabajo de González.

Maz, A. y Rico, L. (2007). Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españolas de los siglos XVIII y XIX. *PNA*, 1(3), 113-123.

La investigación sobre aspectos epistemológicos e históricos en Educación Matemática ha tomado gran auge en los últimos años, tal como lo reflejan las investigaciones señaladas. Teniendo en cuenta estas aportaciones y la opinión de los investigadores (Cohen y Manion, 1990; Fox, 1980) sobre la importancia de la investigación histórica y, más aún, en Educación (Gall, Borg y Gall, 1996) y, en particular, en Educación Matemática (Brito y Cardoso, 1997; Filloy, 1999; Sierra, 2000); teniendo igualmente en cuenta la investigación que realizamos sobre el tratamiento dado a los números negativos por los autores de textos en España durante los siglos XVIII y XIX (Maz, 2000), hemos continuado ese estudio histórico-epistemológico de los números negativos.

Vemos cómo la historia y la epistemología se encuentran a través de la historia de las ideas y, en particular, con los métodos histórico-críticos, los cuales en Educación Matemática vienen siendo utilizados para identificar y describir problemas concernientes a la emergencia en los conflictos por la evolución de los conceptos, y al choque de éstos con los conocimientos ya establecidos y aceptados en situaciones derivadas de la implantación de nuevos currículos, entre otras.

Al respecto, es importante recordar el listado de categorías teóricas para la investigación en la historia social de la matemática propuesto por Schubring (1991), quien indica que sería beneficioso investigar sobre la producción de libros de texto en un periodo determinado, y enfatiza la necesidad de elaborar categorías que permitan analizar la voluminosa información que se puede obtener de este hecho. Deberán tenerse en cuenta los factores intelectuales y sociales en el desarrollo y la transmisión del conocimiento, pues este no debe analizarse de manera aislada o de manera neutra, pues los mencionados factores inciden en los objetivos, metodologías y contenidos de los textos.

METODOLOGÍA

Hemos tomado y matizado los procedimientos que Schubring (1991) y Glaeser (1981) utilizan para llevar a cabo un análisis epistemológico a través del análisis de textos antiguos de matemáticas. Analizamos los contenidos matemáticos de los textos de un determinado periodo de la historia española, 1700 a 1900, puntualizando el tipo de texto y autor, caracterizándolo de acuerdo a nuestros propósitos.

Para llevar a cabo este estudio trabajamos con los manuales y tratados de matemáticas redactados por los matemáticos españoles de estos dos siglos y que tuvieron gran difusión y utilización en la enseñanza española del siglo XIX. Tratamos de discriminar el tipo de número negativo que se presenta y transmite en cada uno de los libros que se analizó. De este modo dispusimos de un indicador para establecer el conocimiento en el campo del álgebra y de las estructuras numéricas de los matemáticos españoles de esta época.

El uso original de textos como material histórico para obtener nuevos puntos de vista en los problemas, situaciones y ambientes intelectuales que llevaron a la

génesis de conceptos matemáticos, enfocando su estudio como alternativa para comprender algunas situaciones educativas actuales a la luz de esos hallazgos, ha tomado gran auge entre la comunidad de investigadores en Educación Matemática (e.g., Dennis, 2000; Freudenthal, 1987; Friedelmeyer, 1998; Gallardo, 1994).

En otros trabajos (Maz, 2000; Maz y Rico, 2001) hemos presentado algunos resultados asociados a esta investigación. Aquí solamente presentaremos los resultados obtenidos para el objetivo que surge de la pregunta:

¿Cuáles eran los contextos con los que se presentaban los números negativos en los textos en este periodo?

En total se revisaron 60 textos originales. Fueron seleccionados diez para llevar a cabo un estudio piloto. Una vez hecho el listado para dicho estudio, era necesario fijar unos criterios para realizar tanto su análisis de contenido, como su análisis histórico-crítico. Por tanto, se determinaron tres puntos de interés para caracterizar los textos: Autor, Estructura de la obra y Contenido sobre los números negativos.

En este último punto se centró el análisis para determinar los contextos utilizados para presentar los números negativos.

Con el propósito de llevar a cabo una adecuada sistematización del trabajo, se definieron unos campos para organizar la información obtenida. Estos campos se muestran en la Tabla 1, en la cual se recoge una de las parrillas elaboradas para la sistematización y organización de la información.

Tabla 1

Campo y texto

	Campo	Texto
TSN1	Significado y presentación de los signos + y -	
TSN2	Presentación de las cantidades negativas	
TSN3	Naturaleza de las cantidades negativas	
TSN4	Justificación de la aparición de las cantidades negativas	
TSN5	Cantidades negativas como menores que nada	
TSN6	Ejemplificación de cantidades negativas	
TSN7	Regla de los signos	
TSN8	Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa	
TSN9	Orden en las cantidades negativas	
TSN10	Operaciones y utilización de las cantidades negativas	
TSN11	Interpretación de los resultados negativos	
TSN12	Utilidad de las cantidades negativas	
TSN13	Otros	

Los campos que sobre los que se centró la atención para determinar los contextos fueron TSN2, TSN3, TSN4, TSN6, TSN10, TSN11 y TSN13.

Una vez hecho el estudio piloto, mediante el cual se puso a prueba las parrillas elaboradas para la sistematización y organización de la información (Maz, 2000), se seleccionaron los siguientes textos para el estudio final:

- ◆ Pedro de Ulloa (1706). *Elementos mathematicos*. Tomo I. Madrid: Antonio González de Reyes, Impresor.
- ◆ Thomas Vicente Tosca (1727). *Compendio matemático*. Tomo II. Segunda edición corregida y enmendada. Madrid: Imprenta de Antonio Marín.
- ◆ Thomas Cerdá (1758). *Liciones de mathematica, o elementos generales de arithmetica y algebra para el uso de la clase*. Tomos I y II. Barcelona: Francisco Suriá, impresor de la Real Academia de Buenas Letras de dicha ciudad.
- ◆ Benito Bails (1772). *Elementos de arismética*. Tomos I y II. Primera edición. Madrid: D. Joaquín Ibarra. Impresor de la cámara de S.M.
- ◆ Francisco Verdejo González (1794). *Compendio de matemáticas puras y mixtas*. Tomo primero. Madrid: Imprenta de la viuda de Ibarra.
- ◆ Juan Justo García (1814). *Elementos de aritmética, álgebra y geometría*. Cuarta edición. Tomo primero. Salamanca: Imprenta de D. Vicente Blanco.
- ◆ José Mariano Vallejo (1841). *Tratado elemental de matemáticas*. Tomo I. *La aritmética y álgebra*. Cuarta edición. Madrid: Imprenta Garrasayaza.
- ◆ José de Odriozola (1844). *Curso completo de Matemáticas puras*. Tomo I reformado. Aritmética y álgebra elemental. Tercera edición. Madrid: Imprenta de los señores viuda de Jordán é hijos.
- ◆ Jacinto Feliu (1847). *Tratado elemental de matemáticas. Para el uso del colegio general militar*. Tomo II. Álgebra. Madrid: Imprenta de D. José M. Gómez Colón y Compañía.
- ◆ José María Rey y Heredia (1865). *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias*. Madrid: Imprenta nacional.
- ◆ Zoel García de Galdeano y Yaguas (1883). *Tratado de álgebra. Tratado elemental*. Parte primera. Madrid: Imprenta de Gregorio Juste.
- ◆ Joaquín Maria Fernández y Cardín (1884). *Elementos de matemáticas. Algebra*. Decimocuarta edición notablemente mejorada. Madrid: Imprenta de la viuda e hija de Fuentenebro.
- ◆ Juan Cortazar (1892). *Tratado de álgebra elemental*. Trigésima primera edición. Madrid: Imprenta y fundición de Manuel Tello. La primera edición es del año 1846.
- ◆ Acisclo Fernández Vallín y Bustillo (1892). *Elementos de matemáticas. Aritmética y álgebra. Geometría, trigonometría y nociones de topografía*. Nueva edición estereotípica. Madrid: Imprenta de la Viuda de Hernando y Compañía.
- ◆ Diego Terrero (1894). *Lecciones de aritmética y de álgebra elemental*. Cuarta edición. Oviedo: Imprenta de Pardo, Gusano y Compañía.

RESULTADOS

Los autores justifican los números de diversas formas, desde la interpretación de situaciones concretas tales como desplazamientos, hasta la ampliación formal de la sustracción, pasando por interpretaciones operativas, y explicaciones retóricas propias de la aritmética. Las distintas situaciones que son utilizadas para ejemplificar y caracterizar a las cantidades negativas son:

1. *Haber/deber*. Son utilizadas las situaciones de ahorro y deudas tanto para dar significado a las cantidades negativas como para ilustrar que se entiende por una cantidad menor que nada.

Ejemplo 1

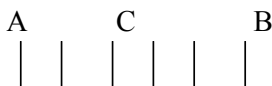
Pues fi á uno que tiene 6 ducados fe le juntan 0 ducados, fe queda con el mismo dinero, que tenia, porque o ni añade, ni quita; pero fi fe le junta -2 ducados, fe queda con $6 - 2$ ducados = 4, por lo tanto -2 es inferior á 0 (Cerda, 1758, Tomo I, pp. 49-59).

Para las cantidades negativas es lo mismo. Si á una deuda ab añado otra deuda de 7ab (fea la cantidad que fea ab) la fuma de las deudas ferá -8ab. Pues las deudas que difminuyen en la renta, tienen mucha femejanza con la quantidads negativas, que fe oponen á las pofitivas, y las difminuyen (Cerda, 1758, Tomo I, pp.52-53).

2. *Avanzar/retroceder*. El conjunto de situaciones que se utilizan está asociado a desplazamientos; estos son comparaciones de medidas dirigidas con sentidos opuestos.

Ejemplo 2

Es facil formar ideas de eftas Cantidades menores que nada. Supóngafe, que defde C. hasta B. ay tres leguas; y defde C. hasta A. ay dos. Si vn Caminante efta en C. con defignio de llegar a B. y effectivamente faliendo de C. llega a B. es verdad dezir, que abançó; y que fu abance es mayor que nada; y que la medida de este abance es tres leguas. Si no obstante su defignio fe halla precisado a detenerse en C. su abance es ninguno, o es igual a nada. Si en vez de caminar azia B. saliendo de C. llega a A. en la phrase vulgar fe dira, que cejó; y para expressar, que hizo lo contrario, de lo que avia de hacer, puede dezirse, que ha abançado menos que nada, y que fu avance es, -2. leguas: conque aquí, dos leguas fon menos que nada (Ulloa, 1706. p. 20).



3. *Llenado/vaciado*. Se recurre a fenómenos asociados a llenados o vaciados de recipientes, establos o almacenes.

Ejemplo 3

Si nos proponemos averiguar en cuanto tiempo se llenará un estanque de agua, en que por un lado entra agua y por otro sale, tendremos que atender no solo al agua que entra, sino también al agua que sale; y como el agua que entra conspira al fin que nos proponemos, esta será la positiva; y la que sale, conspira á vaciar el estanque, que es lo contrario de llenarle, será la negativa (Vallejo, 1841, p. 185).

4. *Comparaciones*. Se comparan tanto números como cantidades. Se utilizan las relaciones mayor que y menor que.

Ejemplo 4

Si de dos sujetos uno debe 2000 duros y otro 7000, decimos que la deuda del primero, es MENOR que la del segundo, ó la de éste MAYOR que el capital del primero; lo mismo que si uno tiene 2000 duros de capital y otro 7000, diremos que el capital del primero es MENOR que el del segundo, ó el de éste MAYOR que el del primero. También podría decirse que la deuda del primero era mayor ó menor que el capital del segundo, pero entonces prescindimos del modo de existencia de estas cantidades y solo atendemos á sus valores absolutos (Terrero, 1894, p. 177).

5. *Operaciones*. Son utilizadas operaciones entre distintas cantidades para mostrar las cantidades tanto positivas como negativas.

Ejemplo 5

Cuando se propone restar de un número particular otro mayor, la operación es á la evidencia imposible aritméticamente, como por ejemplo si se pide resta 6 de 5. Pero, indicando algébricamente la operación, será

$$5 - 6;$$

y veamos á qué resultado algébrico nos conduce el siguiente razonamiento

Esta cantidad, cualquiera que ser pueda, subsistirá la misma indudablemente aunque se añada y quite 1 al mismo tiempo, ó bien, añadiendo 1-1 que es nada. Entonces la expresión propuesta se transforma en

$$5 + 1 - 6 - 1;$$

que se reduce á 6 - 6 - 1, y finalmente á - 1;

resto negativo, resultante de resta la cantidad mayor de la menor (Odrizola, 1844. p. 39).

6. *Secuencia numérica.* Se muestran o utilizan cantidades negativas como si fuesen parte de una secuencia numérica.

Ejemplo 6

Si la cantidad -a es menor que cero, ¿cómo se concilia que sus potencias pares son mayores, y sus potencias impares menores que cero?

Contra estas antiguas objeciones de D'Alembert y de Carnot, no vale decir que las cantidades negativas añadidas á las positivas dan una suma menor que si se les añadiese cero; porque esta añadidura ó adición no es otra cosa que subtracción, y el resultado debe llevar el nombre de resta, y no el de suma.

Ni tampoco es razon bastante la que se deduce de la série natural aritmética

... -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

á la cual erróneamente atribuye Mr. Coyteux el carácter de creciente, cuando no es sino ascendente, explicándose el ascenso uniforme de ella por el decremento cuantitativo de los términos negativos hasta cero, y el incremento de los positivos. Este ascenso progresivo podría representarse de una manera geométrica, haciendo perpendiculares por bajo y por encima de un eje horizontal los valores absolutos ó numéricos de todos los términos: una oblicua que pasase por el punto de origen, sería el lugar geométrico de todas estas longitudes (Rey y Heredia, 1865, p. 33).

Ejemplo 7

Se dice que las cantidades negativas son menores que cero, y esto debe entenderse, no con respecto al cero absoluto, que no puede ser comparable con las cantidades sino con respecto al cero relativo de la serie

... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

Que comprende los números enteros, positivos y negativos (García de Galdeano, 1883, p. 8).

A continuación, presentamos la Tabla 2, donde realizamos un cruce de autores con los distintos tipos de situaciones que agrupan los fenómenos asociados a las cantidades negativas.

Tabla 2
Situaciones asociadas a los números negativos

Texto / autor	1	2	3	4	5	6
1. Elementos matemáticos (1706). Tomo I. Pedro de Ulloa (1663-1721)		X				
2. Compendio mathematico. Tomo II (1727). Thomas Vicente Tosca (1651-1723).	X	X			X	
3. Liciones de matemática, o elementos generales de arithmetica, y algebra para el uso de la clase. Tomo primero (1758). Thomas Cerda (1715-1791).	X			X		X
4. Elementos de arismética. Tomos I y II. (1779). Benito Bails (1730-1797).	X	X			X	
5. Compendio de matemáticas puras y mixtas (1794). Francisco Verdejo González (1794).	X		X			X
6. Elementos de aritmética, álgebra y geometría (1814). Juan Justo García (1752-1830).	X	X				
7. Tratado elemental de matemáticas. Tomo I. (1841). Cuarta edición. José Mariano Vallejo (1779-1846).	X		X	X		
8. Curso completo de matemáticas puras (1844). José de Odriozola (1785-1864).	X			X	X	
9. Tratado elemental de matemáticas. Para uso del colegio general militar. Tomo II Algebra (1847). Jacinto Feliu (1787-1867).		X		X	X	
10. Teoría transcendental de las cantidades imaginarias(1865). José María Rey y Heredia (1818-1861).	X	X				X
11. Tratado de álgebra (1883). Zoel García de Galdeano (1846-1924).		X	X			X
12. Elementos de matemáticas (1884). Joaquín Maria Fernández y Cardin (1820-1893).	X			X		X
13. Tratado de álgebra elemental. 31ª edición. (1892). Juan Cortázar (1809-1873)		X		X	X	
14. Elementos de matemáticas. Aritmética y álgebra. Geometría, trigonometría y nociones de topografía. (1892). Acisclo Fernández Vallín y Bustillo (1825-1896).	X	X		X		
15. Lecciones de aritmética y de álgebra elemental (1894). Diego Terrero (1830-1892).	X	X		X		X

CONCLUSIONES

A partir de la clasificación hecha de las situaciones identificadas a partir del análisis de los textos, y analizando la distribución de éstas en relación con los autores en la Tabla 2, se observa que es notorio el predominio de situaciones reales como contexto para presentar, justificar y explicar las cantidades negativas en los textos de matemáticas españoles durante los siglos XVII y XIX.

Se aprecia que excepto Pedro de Ulloa, todos los demás autores utilizan, por lo menos tres diferentes tipos de situaciones. Así mismo, es llamativo el hecho de que quienes utilizan operaciones, no emplean secuencias numéricas, ni al contrario.

Se ha establecido una clasificación de situaciones que puede ser útil para indagar en los textos escolares actuales, con el propósito de conocer si continúan utilizándose estas mismas situaciones en la enseñanza de los números negativos o si se han incorporado nuevas.

REFERENCIAS

- Brito, A. y Cardoso, V. C. (1997). Uma abordagem histórico-pedagógica dos fundamentos do cálculo diferencial: Reflexões metodológicas. *Zetetike*, 5(7), 129-140.
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fox, D. (1981). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Universidad de Navarra.
- Freudenthal, H. (1987). Philosophie implicite de l'histoire des mathématiques et de leur enseigner. En M. Carmagnole (Ed.), *Fragments d'histoire des mathématiques II* (pp. 9-21). París: APMEP.
- Friedelmeyer, J. P. (1998). Introduction et objectifs pédagogiques. En A. Boyé, J. P. Cléro, M. J. Durand-Richard, J. P. Friedelmeyer, M. Hallez, G. Hamon et al. (Eds.), *Images, imaginaires, imaginations. Une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes* (pp. 5-15). París: Ellipses.
- Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. Tesis doctoral. México D. F.: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV).
- Gall, M., Borg, W. y Gall, J. (1996). *Educational research. An introduction*. Sixth edition. New York: Longman.

- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 39(2), 303-346.
- González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Lizcano, E. (1993) *Imaginario colectivo. La construcción social del número y el infinito*. Barcelona: Paidós.
- Maz, A. (2000). *Tratamiento dado a los números negativos en libros de texto publicados en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Maz, A. y Rico, L. (2001). Una visión histórica de cambios en el concepto de número en los textos: ¿un reto para la educación matemática? En J. Berenguer, B. Cobo y J. M. Navas (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Retos de la educación matemática del siglo XXI* (pp.159-165). Granada: SAEM THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit X*, 12, 5-32.
- Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbooks authors. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.
- Schubring, G. (1988). *Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématique entre 1795 et 1845*. Trabajo presentado en Premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique, Francia.
- Schubring, G. (1991). Categorías teóricas para la investigación en la historia social de la enseñanza de la matemática y algunos modelos característicos. *Epsilon*, 19, 100-104.
- Schubring, G. (1993). Les enjeux épistémologiques des nombres négatifs. En E. Barbin (Ed.), *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique. Actes de la première université d'été européenne* (pp. 443-449). Montpellier: IREM de Montpellier..
- Sierra, M. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. En A. Martínón (Ed.), *Las matemáticas del siglo XX* (pp. 93-96). La Laguna: Nivola.

Este documento se presentó originariamente en el VI Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico, Santiago de Compostela, España, 2002.

Alexander Maz
Universidad de Córdoba
malmamaa@uco.es

Luis Rico
Universidad de Granada
lrico@ugr.es