PRUEBAS INFORMALES EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Rodolfo Eliseo D´Andrea; Alejandra Cañibano y Patricia Sastre Vázquez
Pontificia Universidad Católica Argentina. Campus Rosario. Argentina
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
rodolfoedandrea@yahoo.com.ar, mac@faa.unicen.edu.ar, pasava2001@yahoo.com.ar

Resumen. En Argentina, desde fines del siglo pasado, se inició una tendencia a la supresión de demostraciones rigurosas en cursos de Matemática universitaria que utilizan esta Ciencia como herramienta. Las demostraciones informales fueron tomando su lugar, aunque no en la generalidad. El objetivo de este trabajo es mostrar los resultados de un análisis empírico acerca de la actitud cognitiva de estudiantes universitarios frente a pruebas rigurosas y pruebas informales. Los resultados, en general, muestran que las pruebas informales facilitan el acceso del estudiante universitario al abordaje de la demostración matemática. Este tipo de pruebas no tiene un rigor formal, pero permiten el razonamiento y la justificación en el estudiante en procesos de validación de proposiciones.

Palabras clave: demostraciones rigurosas, pruebas informales, estudiantes

Abstract. In Argentina, since late last century, it began a trend towards the abolition of rigorous proofs in university mathematics courses that use this Science as a tool. The Informal proofs were taking their place, though not in his generality. The objective of this work is show the results of an empirical analysis of the cognitive attitude of college students that face rigorous and informal proofs. The results generally show that informal proof provide access to student to mathematical proof. This type of proof has no formal rigor, but allow reasoning and justification in the student process validation of propositions.

Key words: rigorous demonstrations, informal proofs, students

Introducción

En Argentina, desde fines del siglo pasado se inició una tendencia a la supresión de demostraciones rigurosas, en cursos de Matemática universitaria que utilizan esta Ciencia como herramienta. Las demostraciones informales fueron tomando su lugar aunque no en la generalidad. El objetivo de este trabajo es mostrar los resultados de un análisis empírico, sustentado en un breve marco teórico, acerca de la actitud de estudiantes universitarios frente a pruebas rigurosas y pruebas informales.

La utilidad de la prueba matemática es el razonamiento que se oculta detrás de los eslabones argumentativos que constituyen la cadena de la demostración. El ejercicio cotidiano de la demostración, fundado en la práctica habitual y natural de la clase teórico – práctica, es lo que realmente estimula los diferentes tipos de razonamientos que el estudiante universitario necesita desarrollar. Esta práctica no requiere del rigor de una prueba formal, sino de una prueba que arribe al objetivo y que además permita que el estudiante pueda justificar cada eslabón de la argumentación que constituye la prueba. Dreyfus (2000), expresa que las demostraciones deberían estar presentes siempre en todos los contenidos que constituyen el currículo de Matemática. Que estén presentes no es equivalente a que el estudiante tenga que reproducir demostraciones de memoria, considerando el formalismo bourbakiano.

Las pruebas informales no requieren de artificios o construcciones complejas que permitan el arribo a la tesis, requiriendo únicamente de razonamientos simples que establecen los eslabones de la cadena argumental de la prueba. La comprensión del desarrollo de la demostración en su totalidad constituye el verdadero objetivo del proceso de validación de la proposición y esto puede satisfacerlo una prueba informal. Independientemente del rigor de la prueba y de su valor epistemológico, lo que interesa realmente es que el estudiante pueda justificar, argumentando. Como consecuencia, razonando ante el valor de verdad de una proposición, y a través de un razonamiento aunque simple y sin grandes pretensiones, de forma tal que el estudiante, no termine aceptando a esa proposición como un axioma.

Resnick (1992), afirma que la Matemática contemporánea está repleta de "*working proofs*", es decir, pruebas informales no axiomatizadas. El estudiante posmoderno, retrasa cada vez más el pensamiento formal, y aquellas pruebas tan rigurosas del pasado, son cada vez menos accesibles a su pensamiento y a través del mecanismo de la prueba informal se pretende impedir 'la muerte de la demostración'. De esta forma, se pretende que el estudiante pase por el tamiz de la demostración, y no termine aceptando axiomáticamente la propiedad con la conformidad de algunos ejemplos. Ese tamiz de la demostración, si bien es carente de rigor formal, tiene como fin, que el sujeto de aprendizaje pueda llevar a cabo un razonamiento que exceda, aunque ligeramente, una simple justificación.

Un ejemplo de prueba formal y su versión informal

A continuación consideraremos por razones de espacio, un ejemplo representativo de una prueba estructurada formalmente y su versión informal. Consideremos el teorema de la derivada de la función compuesta.

Sea I un intervalo abierto, y sea $f: I \to R$ una función derivable en $x_0 \in I$, y sea g: $R \to R$, una función derivable en $y_0 = f(x_0)$, entonces:

$F = gof: I \to R / F(x) = gof(x)$ es derivable en x_0 y resulta que:

$$[gof(x)]' = g'(y_0).f'(x_0)/y_0 = f(x_0).$$

prueba formal: Sea $h \in R/x_0 \in I$

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} = \lim_{k\to 0}\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{h}$$
$$= \lim_{k\to 0}\frac{k.g'(y_0)+k.\gamma(k)}{h} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k.\,(g'(y_0)+\gamma(k))}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{h}(g'(y_0)+\gamma(k)) =$$

$$= \underbrace{\lim_{k\to 0} \frac{k}{h}}_{\to f'(x_0)} \cdot \left[\underbrace{\lim_{k\to 0} g'(y_0)}_{=g'(y_0)} + \underbrace{\lim_{k\to 0} \gamma(k)}_{\to 0} \right] = f'(x_0).g'(y_0)$$

Nota: Llamamos a $f(x_0+h) - f(x_0) = k.$

La prueba expuesta carece de justificaciones como en la generalidad de los textos universitarios. Es tarea del estudiante encontrar esos argumentos que sostienen las cadenas argumentativas. En esta prueba, el sostenerse sobre las hipótesis permite generar a partir del cociente incremental, la tesis que se quiere probar, teniendo en cuenta que si g es una función derivable, también es diferenciable. En la prueba informal, más allá del artificio (elemental) de multiplicar y dividir por el incremento de la función f, que permite la construcción de los cocientes incrementales que se quieren llegar a establecer de la tesis, se halla presente como en la prueba formal, el momento clave en el final. En este momento, donde se llega a la tesis a partir de que los límites de los cocientes incrementales hallados existen en función de argumentaciones que provienen de las hipótesis del teorema.

Prueba informal:

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{f(x_0+h) - f(x_0)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)}}_{\to g'(f(x_0))} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

Experimentación

La experimentación está desarrollada de acuerdo a la propuesta didáctica desarrollada en su investigación por D´Andrea, Curia y Lavalle (2012). Esta propuesta consiste en un proceso metodológico que pretende acercar al estudiante a la demostración matemática desde las tres facetas del lenguaje matemático: coloquial, simbólico y visual.

Durante los años 2011 y 2012, se realizó la misma experiencia con estudiantes ingresantes de Ingeniería que cursaban la asignatura Cálculo I (Cálculo en una variable). En el primer año se realizó la experiencia, con 26 estudiantes y en el segundo año con 23 estudiantes. Los estudiantes seleccionados para las actividades que se proponían eran ingresantes ‘puros’, es decir, estudiantes que no habían pasado por la experiencia de cursar otra carrera universitaria en otra facultad. La experiencia tuvo dos etapas.

En la primera etapa, el estudiante se encontraba en el proceso de aprendizaje del Precálculo (PC). Esta primer etapa se dividió a su vez, en dos partes.

En la primera parte de la primer etapa, el docente les expuso a los estudiantes, la prueba formal, acerca de la siguiente propiedad del valor absoluto: $\forall x \in R: \forall y \in R: |x.y| = |x|.|y|$. A continuación, se les propuso a los estudiantes, tres actividades relacionadas con la proposición expuesta.

Nota previa: En cada una de las siguientes experiencias, se exigía que para la realización de cada prueba, fuera justificada la argumentación de cada paso que la constituía de forma coloquial.

La Experiencia 1 que se simboliza: PC.Exp.1. consistió en que los estudiantes leyeran comprensivamente la propiedad expuesta durante unos minutos. Luego se les pidió que la reprodujeran en un papel, con algunas sugerencias para su realización.

La Experiencia 2 que se simboliza: PC.Exp.2. consistió en que los estudiantes realizaran otra versión de la prueba expuesta (una prueba informal), con las sugerencias de algunas ideas para ser llevada a cabo.

La Experiencia 3, que se simboliza: PC.Exp.3. consistió en que los estudiantes pudieran generar la prueba correspondiente a la propiedad del valor absoluto correspondiente al cociente de dos números reales, apelando a un razonamiento analógico al realizado en la prueba correspondiente a la Experiencia 2.

En la segunda parte de la primer etapa, se les presentó a los estudiantes a través de la exposición en pizarrón, la prueba formal de la siguiente propiedad del valor absoluto:

$$\forall x \in R: \forall a \in R^{+}: |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

A continuación, se les propuso a los estudiantes, tres actividades relacionadas con la proposición expuesta.

La Experiencia 4, que se simboliza: PC.Exp.4. consistió en que los estudiantes leyeran comprensivamente la propiedad expuesta durante unos minutos. Luego se les pidió que la reprodujeran en un papel, con algunas sugerencias para su realización.

La Experiencia 5, que se simboliza: PC.Exp.5. consistió en que realizaran otra versión de la prueba (una prueba informal), con las sugerencias de algunas ideas para ser llevada a cabo.

La Experiencia 6, que se simboliza: PC.Exp.6. consistió en que el estudiante pudiera generar la prueba correspondiente a la propiedad del valor absoluto:

$$\forall x \in R: \forall a \in R: |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a.$$

, apelando a un razonamiento analógico al realizado en la prueba correspondiente a la Experiencia 5.

La segunda etapa se llevó a cabo cuando el estudiante se encontraba realizando el proceso de aprendizaje del Cálculo Diferencial (CD). Esta segunda etapa, de forma similar a la primera, también se dividió en dos partes.

En la primera parte, el docente les expuso a los estudiantes, la prueba formal sobre el teorema correspondiente a la derivada de la función compuesta. A continuación, se les propuso a los estudiantes, dos actividades relacionadas con la proposición expuesta.

La Experiencia 7 que se simboliza: CD.Exp.7. consistió en que los estudiantes leyeran comprensivamente la propiedad expuesta durante unos minutos. Luego se les pidió que la reprodujeran en un papel, con algunas sugerencias para su realización.

La Experiencia 8 que se simboliza: CD.Exp.8. consistió en que los estudiantes realizaran otra versión de la prueba (una prueba informal), con las sugerencias de algunas ideas para ser llevada a cabo.

En la segunda parte, el docente les expuso a los estudiantes, la prueba formal sobre el teorema de la derivación de funciones inversas, siguiendo el mismo proceso que para la derivada de funciones compuestas. A continuación, se les propuso a los estudiantes, dos actividades relacionadas con la proposición expuesta.

La Experiencia 9 que se simboliza: CD.Exp.9. consistió en que los estudiantes leyeran comprensivamente la propiedad expuesta durante unos minutos. Luego se les pidió que la reprodujeran en un papel, con algunas sugerencias para su realización.

La Experiencia 10 que se simboliza: CD.Exp.10. consistió en que realizaran otra versión de la prueba (una prueba informal), con las sugerencias de algunas ideas para ser llevada a cabo.

Resultados

A continuación se muestran los resultados obtenidos durante las experiencias descriptas en el párrafo anterior. Los porcentajes que muestran las tablas siguientes revelan el porcentaje de estudiantes que efectivamente logró llevar a cabo la actividad propuesta en cada experiencia. Se consideró para este estudio que el estudiante fue capaz de llevar a cabo efectivamente la prueba cuando pudo efectuar lo que Balacheff (2000) denomina *cálculo sobre enunciados.* En este tipo de prueba se establecen construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, que se originan en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas formales.

	PC Exp.1	PC Exp.2	PC Exp.3	PC Exp.4	PC Exp.5	PC Exp.6
2011	8%	73%	69%	8%	81%	73%
2012	4%	74%	78%	8%	83%	74%

Figura 1: porcentajes obtenidos durante los años 2011/2012 de estudiantes que efectivamente logran desarrollar las actividades propuestas en la etapa del Precálculo.

	CD Exp.7	CD Exp.8	CD Exp.9	CD Exp.10
2011	8%	78%	4%	69%
2012	8%	74%	8%	78%

Figura 2: porcentajes obtenidos durante los años 2011/2012 de estudiantes que efectivamente logran desarrollar las actividades propuestas en la etapa del Cálculo Diferencial.

En la experiencia 1, los estudiantes mostraron que a pesar de las sugerencias para la realización de una prueba ya expuesta y explicada detalladamente, no pudieron llevarla a cabo. La carga formal de la prueba y las justificaciones implícitas generaron una brecha difícil de atravesar para el estudiante. Esta prueba fue reproducida por dos estudiantes en el primer año de la experiencia, mientras que solo uno pudo llevarla a cabo en el segundo año.

En la experiencia 2, un importante porcentaje de la muestra pudo llevar a cabo la prueba con porcentajes idénticos en los dos años.

En la experiencia 3, los estudiantes por razonamiento analógico pudieron llevar a cabo la prueba un importante porcentajes de forma similar en los dos años.

En la experiencia 4, los estudiantes nuevamente frente a la experiencia de tener que reproducir una prueba formal, a pesar de las sugerencias, se obtuvieron idénticos resultados en los dos años y fueron solamente dos estudiantes en cada año quiénes pudieron llevarla a cabo.

En la experiencia 5, los estudiantes en un importante porcentaje llegaron a la meta con resultados idénticos en los dos años.

En la experiencia 6, frente a un razonamiento analógico, los estudiantes pudieron llevar también la prueba a cabo con porcentajes similares en los dos años pero algo menor a la experiencia 5, aunque también un importante porcentaje.

Las experiencias 7 y 9, de estructura similar a las experiencias 1 y 4, permitieron ver resultados también similares a las mencionadas en los dos años. La casi totalidad de los estudiantes analizados en cada año no pudo reproducir la prueba propuesta.

Las experiencias 8 y 10, de estructura similar a las experiencias 2 y 5, también permitieron ver resultados similares a estas en los dos años. En ambos años, un porcentaje muy importante de los estudiantes analizados pudo llevar a cabo las pruebas.

Conclusiones

En general, los resultados de las pruebas aplicadas, obtenidos durante el segundo año fueron similares a los del primer año. Es representativo y suspicaz, que los estudiantes no pudieron llevar a cabo una prueba formal, expuesta minutos antes por el docente en clase, con las explicaciones correspondientes y sugerencias para su realización. Es claro, que esta observación hace referencia a las experiencias 1,4,7 y 9 respectivamente. En general, los estudiantes se limitaron en muchos casos, a exhibir algunos ejemplos de lo expuesto por el teorema. Esta es una actitud que se reitera en los estudiantes cuando no se sienten capaces de abordar o llevar a cabo una demostración. Se especula que esto puede obedecer también a la formalidad de la prueba, como consecuencia de los ítems a tener en cuenta para poder llevar a cabo la cadena argumentativa que constituye la prueba. Los estudiantes frente a estos desafíos no se sienten capaces de llevarlos a cabo. Paralelamente, también se especula en que la estructura de la prueba en su globalidad no fue comprendida por los estudiantes, al ser expuesta. Esta hipótesis, surge como consecuencia de los resultados obtenidos en todas las tareas que implicaban la reproducción formal de una prueba expuesta por el docente previamente. Las pruebas informales propuestas con una serie de sugerencias para ser llevadas a cabo, fueron desarrolladas por los estudiantes de forma tal que, sin sesgos formales pudieron llegar a la tesis. Asimismo, en general los estudiantes que llevaron a cabo las tareas propuestas, no justificaron las argumentaciones realizadas para llevar a cabo las demostraciones, a pesar del explícito pedido previo por parte del docente.

Azcárate Giménez (1995) explica que

> a menudo, la demostración existe para el alumno como un ritual, un discurso que debe repetir o cuyo estilo debe imitar si se le pide probar un enunciado, más que como una herramienta explicativa basada en un sistema común de validación construido y aceptado por él y su grupo (Balacheff, 1982). (Azcárate Giménez, 1995, p.8).

Esto es una realidad que día a día puede experimentar cualquier docente universitario de Argentina, pero que también día a día se va debilitando ya que la cultura visual del estudiante cada vez más dominante, directamente convierte la ritualidad en una negación a la reproducción de pruebas cargadas de rigor. El estudiante posmoderno, cada vez se va alejando de la ritualidad para abrirse a una nueva postura. Esa nueva postura equivale a la no realización de lo requerido por el docente, en oposición a la actitud ritual muy común y usual en las décadas pasadas. Esto invita a la reflexión de los docentes, acerca del valor de la prueba informal como agente eficaz y seguro para el razonamiento del estudiante.

Es intención seguir repitiendo esta experiencia con nuevos grupos de ingresantes, para recabar mayor información que permita saber y profundizar aún más acerca de lo observado. Es de destacar que en las nuevas experimentaciones se agregará en cada una de las etapas, la exposición por parte del docente de pruebas informales acerca de una propiedad del valor absoluto, y un teorema del Cálculo Diferencial. Esto, a los efectos de ver la actitud de los estudiantes frente a la exposición de este tipo pruebas por parte del docente y su posterior reproducción sin sugerencia alguna para su realización.

Los resultados expuestos podrían considerarse como un acicate para la búsqueda por parte del docente de pruebas válidas pero informales para llevar a cabo procesos de validación en el aula accesibles para la comprensión, reproducción y generación de nuevas pruebas por parte de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Azcárate Giménez, C. (1995). *Procesos de pensamiento matemático avanzado. Definiciones, demostraciones, ¿Por qué?, ¿Cuándo?, ¿Cómo?* Documento interno del Departamento de Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales de la Universidad Autonóma de Barcelona.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Una empresa docente*. Bogotá: Universidad de Los Andes.

D´Andrea, R.E., Curia, L. y Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En N. Gorgorió, A. Deulofeu, y A. Bishop (Coords.). *Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Graó. S.R.L.: Barcelona.

Resnick, M. D. (1992). Proof as a source of truth. En M. Detlefsen (ed.), *Proof and knowledge in mathematics,* 6-32. London: Routledge.