SOBRE EL APRENDIZAJE DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE: ALGUNAS DIFICULTADES Y UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Ana Mabel Juárez y Liliana Irassar
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Argentina
mjuarez@fio.unicen.edu.ar, lirassar@fio.unicen.edu.ar

Resumen. El presente trabajo muestra, en primer lugar, algunos de los resultados de un estudio descriptivo realizado con el objetivo de localizar errores y dificultades que presentan los alumnos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), durante el aprendizaje de la transformada de Laplace y sus aplicaciones. Se seleccionaron, en este caso, los errores relacionados con el cálculo de la transformada de Laplace de funciones continuas por tramos. A continuación, este trabajo pretende compartir una propuesta didáctica, elaborada desde un enfoque constructivista del aprendizaje con los aportes de las teorías de Ausubel y Duval. El diseño de esta propuesta está orientado a asimilar el concepto de función escalón; adquirir habilidad para describir funciones continuas por tramos en términos de escalones unitarios y resolver problemas que involucran procesos discontinuos

Palabras clave: aprendizaje, errores, dificultades, propuesta didáctica

Abstract. This paper shows, at first, some of the results of a descriptive study carried out in order to locate mistakes and difficulties that students use to make and run throuh in Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), while learning Laplace transform and its applications. In this case, mistakes associated with Laplace transform calculus of piecewise continuous functions, were selected. Then, this paper aims to share a didactic proposal, built up from a constructivist approach to learning with the contributions of Ausubel and Duval's Theories. The design of this proposal is intended to assimilate the concept of step function; to gain ability to describe piecewise continuous functions in terms of unitary steps, and to solve problems that involve discontinuous processes

Key words: learning, mistakes, difficulties, teaching proposal

Introducción

La asignatura Análisis Matemático III, que se dicta para todas las carreras de Ingeniería de UNCPBA, trata el estudio de las ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales para modelar sistemas complejos. En algunas situaciones, los modelos tienen que representar bruscos cambios en estos sistemas como puede ser, por ejemplo, un circuito eléctrico LR en serie, que se modela mediante la ecuación diferencial lineal para la corriente $l(t)$: $L\frac{dl}{dt}+Rl=E(t)$donde $E(t)$ puede aplicarse sólo durante un breve periodo de tiempo y después se suspende o puede tenerse un interruptor para abrir y cerrar de manera que el voltaje se aplique, se suprima y luego se vuelva a aplicar. En términos matemáticos se estaría tratando con funciones continuas por tramos expresadas de la siguiente manera, por ejemplo:

$$E(t)=\begin{cases} f(t) & 0\le t\le a \\ 0 & t>a \end{cases} \quad \text{o} \quad E(t)=\begin{cases} f(t) & 0\le t\le a \\ 0 & a<t<b \\ f(t) & t\ge b \end{cases}$$

Para estos casos, la transformada de Laplace es una herramienta especialmente útil, concretamente, en la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes cuando el término no homogéneo o término de forzamiento tiene discontinuidades de salto (que modelan la acción de un interruptor).

Una de las primeras funciones de este tipo que se estudia en asignaturas anteriores, es la función escalón unitario, también llamada función de Heaviside en ingeniería. Esta función, además, permite describir otras funciones definidas por intervalos, lo cual resulta muy útil en el cálculo de sus transformadas de Laplace usando propiedades, sin recurrir a la definición que muchas veces presenta integrales laboriosas. Justamente, expresar una función de manera conveniente en términos de funciones escalones unitarios, ocasiona diversas dificultades a los alumnos. Los obstáculos que suelen aparecer resultaron ser el motor para la elaboración de una propuesta didáctica que permita intervenir, en primer lugar, sobre los conocimientos previos, en este caso las funciones discontinuas como el escalón unitario, avanzando en una comprensión adecuada del tema usando distintos registros de representación y realizando conversiones entre los registros. También, se busca ampliar los conocimientos previos, incorporando la interpretación física del escalón unitario al asignarle la función de "interruptor" o de "activar" y "desactivar" funciones, por resultar útil para representar distintas funciones continuas por partes. Por otro lado, se pretende que la propuesta contenga actividades de resolución de ecuaciones diferenciales cuando el término no homogéneo presente discontinuidades de saltos finitos, para aplicar los conocimientos aprendidos. Por último, que este tratamiento didáctico incorpore actividades de control diseñadas con algunos de los errores encontrados en el estudio exploratorio.

La propuesta didáctica fue elaborada tomando como base un modelo de enseñanza que ubica al docente en mediador entre las experiencias de los alumnos y los conceptos matemáticos, asumiendo la responsabilidad del diseño de actividades de aprendizaje y la búsqueda de condiciones que promuevan la apropiación de los conocimientos por parte del alumno.

Marco conceptual

La teoría de Ausubel acuña el concepto de "aprendizaje significativo" definido como un proceso a través del cual una nueva información se relaciona con un aspecto relevante preexistente en la estructura cognitiva del aprendiz. Este proceso incluye la interacción de la nueva información con una estructura de conocimiento específica, a la cual Ausubel define como concepto subsunsor (inclusor, subordinado), ya existente en la estructura cognitiva del individuo. Ausubel (1978, citado por Pozo, 2006) llama estructura cognitiva a una estructura jerárquica de conceptos que son representaciones de experiencias sensoriales del individuo. Considera que el almacenamiento de informaciones en el cerebro se da de manera organizada, formando una jerarquía conceptual en la cual los elementos más específicos de conocimientos son asimilados con conceptos más inclusivos. Señala el papel que juegan los conocimientos previos del alumno en la adquisición de nuevas informaciones. La significatividad sólo es posible si se relacionan los nuevos conocimientos con los que ya posee el sujeto. Según Ausubel, un aprendizaje es significativo cuando "puede relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe" (Ausubel, Novak y Hanesian, 1978, citado por Pozo, 2006, p. 211).

En Matemática, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. No existe noética sin semiótica: no existe adquisición conceptual de un objeto sin una representación realizada por medio de signos (Duval, 1993, citado por D'Amore, 2005). Las características de la semiótica involucran tres actividades cognitivas diversas: representación, tratamiento y conversión. La construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar distintos registros de representaciones semióticas de dichos conceptos: de *representarlos* en un registro dado, de *tratar* tales representaciones al interior de un mismo registro y de *convertir* tales representaciones de un dado registro en otro registro. Desde el punto de vista cognitivo, la conversión resulta más relevante, en tanto, desde un punto de vista matemático se da mayor importancia al tratamiento (D'Amore, 2005). De una forma más específica, Duval menciona la operación cognitiva de conversión, que consiste en la transformación de una representación producida dentro de un sistema de representación a otro, de tal manera que la última representación permite explicitar otras significaciones relativas al contenido representado. Enfatiza la condición de que los objetos matemáticos no deben ser confundidos con el contenido de la representación. Es decir, la acción de convertibilidad entre los registros, permite discriminar el concepto, no por medios intuitivos como se maneja tradicionalmente, sino por acciones organizadas para establecer la correspondencia entre los registros, además se debe recordar que toda representación contiene parcialmente el objeto representado, por lo que las representaciones de diferentes registros no contienen los mismos aspectos del contenido conceptual. Fortalecer la conversión, contribuye a establecer la articulación de varios registros semióticos de representación, y con ello enriquecer las estructuras cognitivas en el estudiante.

El estudio de los errores en el proceso de aprendizaje es clave en Educación Matemática. El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas. Brousseau (1983) sostiene que el aprendizaje de Matemática genera muchas dificultades a los alumnos y que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en forma de errores, los cuales pueden tener procedencias diferentes pero en cualquier caso son considerados como la presencia en el alumno de esquemas cognitivos inadecuados y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento. Analizar los errores tiene un doble interés: por una parte, sirve para ayudar a los profesores a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor la enseñanza y el aprendizaje de Matemática, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y por otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de los mismos.

Consideraciones metodológicas

Para investigar los errores y dificultades que presentan los alumnos de Ingeniería de la UNCPBA en el aprendizaje de la transforma de Laplace, se realizó un estudio exploratorio, donde se analizaron los protocolos de exámenes parciales de los últimos años en los ítems relacionados con el tema transformada de Laplace. La metodología se centró en una descripción de los errores detectados en las producciones de los alumnos.

Para elaborar una alternativa didáctica superadora de las dificultades encontradas, se clasificaron los errores encontrados y se diseñaron actividades para atacar, en la medida de lo posible, algunas de esas dificultades.

Errores y dificultades de los alumnos

Los errores y dificultades detectadas durante el aprendizaje de la transformada de Laplace y sus aplicaciones se clasificaron en tres categorías:

a) Cálculo de la transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos escritas en forma analítica por partes o dadas en forma gráfica.

   Los errores aparecen en dos momentos: cuando tienen que expresar tales funciones en forma compacta combinando escalones unitarios y, luego, cuando tienen que hacer los “arreglos” necesarios para calcular sus transformadas usando propiedades (especialmente el segundo teorema de desplazamiento). Los errores surgen de manera natural al realizar manipulaciones dentro de uno de los registros o bien al hacer la conversión entre dos registros.

b) Resolución de Ecuaciones Diferenciales cuyo término no homogéneo es una función continua por partes expresada analíticamente en términos de la función escalón unitario o dada en forma gráfica o analítica por partes. Los errores surgen de manera similar que lo descrito en el ítem a).

c) Resolución de problemas que involucran procesos discontinuos.

   Comprender y plantear un problema siempre es una dificultad pero los errores surgen durante el proceso de modelación, específicamente en la representación de funciones definidas por intervalos usando funciones escalones unitarios.

De los resultados anteriores se interpreta, en el contexto de la resolución de ecuaciones diferenciales, que el concepto de la función escalón unitario (conocimientos previos) y la interpretación de la función de interruptor de los escalones unitarios representa obstáculos durante el aprendizaje de la transformada de Laplace.

Propuesta didáctica

La alternativa didáctica que se propone está estructurada en una secuencia de actividades: iniciales, intermedias, de aplicación y de control, con la sugerencia que estas actividades se integren a la guía de trabajos prácticos de la asignatura, en forma ordenada y articulada para que los alumnos avancen en forma paulatina al logro de los objetivos, teniendo acercamientos iniciales al contenido y avanzando niveles más amplios de comprensión y generalización. Los objetivos de la propuesta son:

- Expresar funciones continuas por tramos en términos de escalones unitarios.
- Calcular la transformada de Laplace de funciones continuas por tramos.
- Resolver ecuaciones diferenciales y problemas que involucren procesos discontinuos.

Actividades iniciales

Se diseñaron estas actividades para revisar el concepto de función escalón unitario (conocimiento previo) y para interpretar su función de interruptor, de activar y desactivar funciones, es decir, entender el efecto físico de "apagar" y "encender" una función dada f. Para ello se utilizaron distintos registros de representación (verbal, gráfica y analítica), proponiendo la traducción de un lenguaje a otro para lograr una mayor comprensión del tema. Con estas actividades se pretende, además, que los alumnos adquieran habilidad para representar analíticamente en forma compacta las funciones continuas por partes.

Ejemplos

1) Representar las funciones $u(t-1)$ y $u(t-a)$ $(a \geq 0)$ en forma analítica por partes, gráfica y verbal. (Considerar $(t \geq 0)$, en todos los casos.)

2) Representar en forma analítica por partes, gráfica y verbal las siguientes funciones:

a) Aa2 $u(t-1)$

b) $2-2u(t-1)$

c) $u(t-1)+2u(t-3)-5u(t-4)$

d) $f(t)u(t-1)$, siendo $f(t)=t$

e) $f(t)-f(t)u(t-a)$

f) $f(t) + [g(t) - f(t)]u(t-a) + [h(t) - g(t)]u(t-b)$

3) Expresar analítica y gráficamente la función $\mathrm{f(t)} = \mathrm{cos3t}$ que se activa a partir de $t = \pi$.

4) Expresar analíticamente la función $f(t) = 3t$ que se activa a partir de $\mathrm{t} = 2$ y se desactiva para los $t \geq 5$. Graficar.

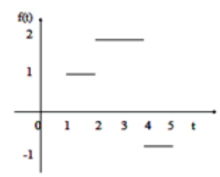
5) Graficar la función $\mathrm{f(t)} = \sin \mathrm{t}$ sabiendo que deja de actuar a partir de $t = \frac{5\pi}{2}$. Expresarla analíticamente en forma compacta.

6) Expresar analíticamente, en términos del escalón unitario, y gráficamente la función que es igual a $2t$ hasta que t llega a 3, donde la función toma un valor constante 6 hasta que t llega a 5, allí realiza un salto de 2 unidades y continua constante para todos los t mayores que 5.

7) Expresar en términos de la función escalón las siguientes funciones definidas por partes.

Actividades intermedias

$$(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \pi \\ t - \pi & \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & 2\pi < t \end{cases}$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \cos t & 0 < t < \pi \\ \sin t & t > \pi \end{cases}$$

Estas actividades están propuestas para determinar la transformada de Laplace de funciones continuas por tramos. Los alumnos tienen que aplicar lo aprendido en las actividades iniciales para calcular la transformada de Laplace sin recurrir a la definición. Esto implica, además de expresar las funciones definidas por partes en forma compacta utilizando f(t)escalones unitarios, realizar los “arreglos” u artíficos necesarios para calcular transformadas aplicando propiedades

Ejemplos

Usando propiedades de la transformada de Laplace, calcular $\mathrm{L\{f(t)\}}$ para las funciones dadas a continuación:

a) $\mathrm{f(t)} = 4(\mathrm{t} - \pi)^2 \mathrm{u}(\mathrm{t} - \pi)$

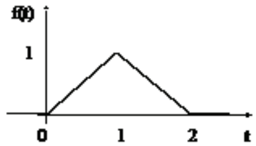
b) $\mathrm{f(t)} = \mathrm{t}^2\, \mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}\, \mathrm{u}(\mathrm{t} - 1)$

c) $\mathrm{f(t)} = \begin{cases} 0, & \mathrm{t} < 0 \\ \mathrm{t}, & 0 < \mathrm{t} < 2 \\ 4 - \mathrm{t}, & 2 \leq \mathrm{t} \leq 4 \\ \mathrm{o}, & \mathrm{t} > 4 \end{cases}$

d) $\mathrm{f(t)} = (\mathrm{t} - 2)[\mathrm{u}(\mathrm{t} - 2) - \mathrm{u}(\mathrm{t} - 3)]$

e) $g(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t, & t \geq 3 \end{cases}$

f)



Actividades de aplicación

Estas actividades están pensadas para que los alumnos aprendan a modelar, resolver e interpretar problemas físicos y técnicos que involucran procesos discontinuos. Son problemas con valores iniciales donde las ecuaciones diferenciales tienen coeficientes constantes y término no homogéneo o término de forzamiento con discontinuidades de salto (que modelan la acción de un interruptor). Con estas actividades los alumnos deben poner en juego lo aprendido hasta el momento, con acciones adicionales de determinar la transformada inversa de Laplace.

Ejemplos

1) Expresar el término forzado discontinuo en términos de la función escalón unitario, cuando corresponda, y resolver el problema con valores iniciales:

a) $y'' + 2y' + 5y = h(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 7 \\ 0, & t > 7 \end{cases}$

b) $y'' + 3y' = u_2(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

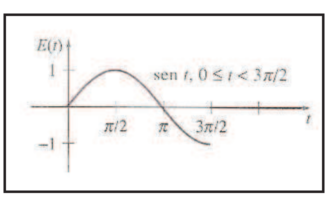
2) Un circuito en serie contiene un inductor, un resistor y un capacitor para el cual $L = 0.5h$, $R = 10\,\Omega$ y $C = 0.01f$ respectivamente. El voltaje $E(t)$ dado por:

$$E(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq t \end{cases}$$

se aplica al circuito. Determinar la carga instantánea $q(t)$ en el capacitor para

$t \geq 0$ si $q(0) = 0$, $q'(0) = 0$.

3) Determinar la corriente $i(t)$ en un circuito en serie RL cuando $i(0) = 0$, $L = 1h$, $R = 1\Omega$ y $E(t)$ es la que se muestra en la figura.



Actividades de control de resultados y procedimientos

Las actividades de control se diseñaron con errores propios de los alumnos con el objetivo de promover la reflexión y análisis crítico sobre lo realizado. Están pensadas para intercalarse entre las actividades anteriores para que el alumno, vaya desarrollando la capacidad de control chequeando sus resultados y procedimientos, a la vez, que va mejorando sus aprendizajes. Se busca, con estas actividades, que los alumnos aprendan estrategias de control para conocer si lo que están realizando es correcto o no, sin tener que resolver estas actividades, en algunos casos.

Ejemplos

1) Dado el problema: “Hallar la carga $q(t)$ en el capacitor de un circuito en serie RC, sujeto a las siguientes condiciones indicadas: $q(0)=0$, $R(0)=2.5\Omega$, $C=0.08f$ y

$$E(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<3\\ 5, & t\ge 3\end{cases}$$

Determinar cuál de los siguientes planteos es correcto, explicando procedimientos utilizados para el control.

$$2.5\,q'(t)+0.08\,q(t)=5\,u(t-3) \qquad\qquad 2.5\,q'(t)+0.08\,q(t)=5-5\,u(t-3)$$

2) Dado el problema:

Determinar la corriente en un circuito LRC en serie para el cual $\mathrm{L}=0.1\mathrm{h}$, $R=20\Omega$ $C=10^{-3}\,f$y la corriente inicial es nula. La tensión aplicada $\mathrm{E(t)}$ es:

$$E(t)=\begin{cases}120t, & 0<t<1\\ 0, & t>1\end{cases}$$

Controlar si el desarrollo propuesto (incompleto) es correcto. En caso contrario, señalar el o los errores cometidos, y proponer la solución correcta.

$$0{,}1\,\frac{di(t)}{dt}+20\,i(t)+10^{-3}q(t)=120t-120t\,u(t-1)$$

$$0{,}1\,\frac{di(t)}{dt}+20\,i(t)+10^{-3}\int_0^t i(z)\,dz=120t-120t\,u(t-1)$$

$$\frac{di(t)}{dt}+200\,i(t)+10000\int_0^t i(z)\,dz=120t-120t\,u(t-1)$$

$$s\,I(s)+200\,I(s)+\frac{10\,000}{s}\,I(s)=\frac{120}{s^2}-\frac{120}{s^2}\,e^{-s}$$

$$(s^2+200s+10000)\,I(s)=\frac{120}{s}-\frac{120}{s}\,e^{-s}$$

$$I(s)=\frac{120}{s(s+100)^2}-\frac{120}{s(s+100)^2}\cdot e^{-s}$$

Reflexiones finales

La mayor riqueza de la propuesta didáctica reside en las actividades iniciales, que contemplan los conocimientos previos, considerando que una base sólida contribuye a un aprendizaje significativo del tema central de estudio.

Las actividades presentadas pueden encontrarse en libros de texto, pero la selección de ellas con objetivos concretos, su combinación, usando además recursos de experiencias de aprendizajes de los alumnos y un sustento teórico que respalde el trabajo anterior podría ser la clave para diseñar alternativas de enseñanza que promuevan aprendizajes de calidad.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1985). *La formación del espíritu científico* (13ª ed.). España: Siglo veintiuno editores.

Boyce, W. E. DiPrima, R. C. (1994). *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera* (3ª ed.). México: Limusa Noriega Editores.

Brousseau, G. (1983). 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4* (2), 165-198.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México: Reverté Ediciones.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotuque et fonctionnement cognitif de la penseé. *Annales de Didáctique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM de Strasbourg, pp. 37-65.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization*, *North American Chapter of PME,* pp. 311-335. Cinvestav-IPN, México.

Pozo, J. I. (2006). *Teorías Cognitivas del Aprendizaje* (9ª ed.). Madrid: Ediciones Morata. S.L.

Rico L., (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrik, P. Gomez y L. Rico (Eds.) *Educación Matemática*, cap. 3, pp. 69-108. México: Grupo Editorial Iberoamérica.