ESTUDIO EPISTÉMICO DEL NÚMERO π: IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Patricia M. Konic, Juan D. Godino, Walter F. Castro y Mauro Rivas
Universidad Nacional de Río Cuarto. Argentina
Universidad de Granada España
Universidad de Antioquia. Colombia
Universidad de los Andes Venezuela
pkonic@gmail.com, jgodino@ugr.es, wfcastro82@gmail.com, rmauro@ula.ve

Resumen. La realización de un estudio documental epistemológico de la evolución de π, nos permitió reconstruir un referente global para este número. Concretamente hemos recuperado a lo largo de su construcción científica, tipos de situaciones problemas y sistemas de prácticas en que se pone en juego este objeto. Si bien el punto de partida fue la detección de problemas que hicieran emerger algún significado de π, interesó estudiar las técnicas, los lenguajes, las entidades conceptuales, proposicionales y argumentativas puestas en juego en cada momento y circunstancia. Los sistemas de prácticas identificados por ese conjunto de objetos permitieron estudiar y describir, desde el punto de vista epistémico, como se configuran los mencionados objetos matemáticos y poner en descubierto la complejidad epistémica de π. Así, la construcción de un referente global permitió describir tres etapas en las que se ponen de manifiesto que π va asumiendo diferentes estatus y características, posibilitando dar respuesta a algunos interrogantes vinculados a la enseñanza

Palabras clave: número π, estudio epistémico, enseñanza

Abstract. The writing of a documental epistemic study on the evolution of π allows us to reconstruct a global referent for this number. Specifically we have recover types of problems and systems of practices that are put into play while working with π. Even though we wanted to find problems that promote the emergence of some meanings related to π, we were also interested in studying the techniques, the language, the conceptual entities, the propositions and the justifications put into play in each and every moment and circumstance. The systems of practice identified for the aforementioned set of mathematical objects leaded us to study and to describe, from an epistemic perspective, the configuration of such objects and to display the complexity of the number π. Thus, the construction of a global referent allow us to describe three stages that reveal how π assumes a number of status and characteristics, making it possible to answer some questions related to teaching

Key words: number π, epistemic study, teaching

Introducción

El número π es un objeto que no solo ha motivado a matemáticos de primera línea y en todos los tiempos sino que evoca reconocimiento e interés en personas que no están implicadas en el tema de manera profesional (Beckmann, 2006; Posamentier y Lehmann, 2006). En la comunidad educativa π es un número que tiene presencia temprana en la escolaridad elemental. La indagación de algunos procesos de enseñanza y estudios referidos a libros de textos muestran que π comienza a tener presencia escolar en forma directa con la longitud de la circunferencia hacia el final de la escolaridad primaria, se torna ausente, o sin un tratamiento explícito en los primeros años de la escolaridad media, y más aún en los cursos siguientes cuando aparecen los números reales. Estos hechos muestran que π se convierte en un dato que no solo obstaculiza la posibilidad de un trabajo consciente sobre este objeto, sino que enfrenta al estudiante ante la paradoja de proponerle inicialmente un objeto "familiar" pero al que será poco probable que en el futuro, le atribuya su verdadero estatus numérico.

Convencidos que profundizar en el análisis de la naturaleza y desarrollo de los contenidos matemáticos permite dilucidar factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, nos hemos propuesto en esta investigación abordar una reconstrucción histórica/epistemológica de este número, con el propósito de identificar qué aspectos de π se estudian en los niveles educativos y hacer visibles posibles cambios curriculares que podrían implementarse en la enseñanza obligatoria (Konic y Godino, 2005). Dicha reconstrucción se ha realizado tomando en cuenta problemas que han determinado su emergencia (Berggren, Borwein, Borwein, 1997), las técnicas desarrolladas para cada problema, su crecimiento, así como las nociones y propiedades matemáticas que se han ido construyendo de modo progresivo (Fauvel y Maanen, 2000). Algunos de los interrogantes que motivaron y guiaron nuestra investigación fueron: ¿Cuál es el papel que desempeña el número π en la educación matemática de los niveles pre-universitarios? ¿Qué aspectos de π se estudian en dichos niveles? ¿Con qué otros objetos matemáticos se relaciona? ¿Qué cambios se podrían hacer en los diseños curriculares de la enseñanza primaria y secundaria para aprovechar las posibilidades educativas de π? Definimos entonces el problema de investigación como el estudio de los elementos epistémicos inherentes a π con el propósito de caracterizar a dicho número como objeto de enseñanza.

Marco teórico y metodología

La metodología adoptada para abordar el problema fue la realización de un estudio documental con carácter descriptivo. Se trata de un estudio epistémico de π, esto es, la identificación de las componentes del contenido matemático involucrado en dicho número, su secuenciación y modo en que se configuran (Godino, Batanero y Font, 2007). Las herramientas teóricas que permitieron llevar a cabo el mencionado proceso metodológico están insertas en el Enfoque Ontosemiótico para el Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino et al, 2007).

La noción neural considerada es la de Significado Institucional de Referencia, entendido como el sistema de prácticas que es utilizado como referencia para elaborar el significado pretendido, es decir, como una parte del significado holístico del objeto matemático. Se considera práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. Estos objetos a los que hacemos alusión se denominan en el EOS objetos primarios y son identificados como: Situaciones/problemas, definiciones/conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y tipos de lenguaje. La descripción de estos objetos intervinientes en una práctica matemática, en su versión institucional, y el modo en que se relacionan aluden a una configuración epistémica.

Reconstrucción de un significado institucional de referencia para π

Considerando el estudio histórico realizado hemos llegado a la conclusión que los tipos de problemas en los cuales ha emergido el número π se pueden agrupar asi:

1. La medida directa de la longitud de la circunferencia por los hebreos del tiempo de la Biblia.
2. La cuadratura del círculo realizada en el antiguo Egipto, como se describe en el Papiro de Rhind.
3. La acotación del perímetro del círculo por inscripción y circunscripción de polígonos, proceso desarrollado por Arquímedes.
4. La interpretación de una longitud medida a lo largo de una circunferencia o de alguna otra curva.
5. La interpretación del argumento de sen(x).
6. La cantidad de decimales de π.
7. La naturaleza de los decimales de π.
8. También han generado un tipo de problemas los siguientes interrogantes:
9. ¿Es π algebraico?
10. ¿Con quién se relaciona π?

En esta tipología π va asumiendo diferentes estatus lo que permitió distinguir tres etapas básicas, donde a cada una de ellas hemos asociado una serie de problemas que intentan representarlas. En la primera etapa, rescatamos aquellos problemas plasmados en documentos originales o en sus primeras reconstrucciones, dado que aportan indicios sobre situaciones, contextos y modos en que se manifiesta la presencia de π. En esta etapa, los problemas originales resultan esenciales ya que de ellos se puede obtener información sobre los orígenes de este objeto matemático. Se encuentran situaciones reales, con resolución en el contexto geométrico y con justificaciones basadas fundamentalmente en la evidencia. En una segunda etapa abordamos aquellos problemas que se dirigen hacia la búsqueda de la "caracterización" de π como objeto matemático, donde ahora es el contexto el que permite un avance en dicho propósito. Esto se da por la fuerte evolución del cálculo, brindando herramientas de estudio que permiten abordar la problemática desde diferentes contextos (geométrico, trigonométrico, analítico) produciendo a su vez nuevos resultados en esa rama de la matemática. Por último, y en una tercera etapa, ante la identificación de este elemento como objeto matemático, estudiamos aquellos problemas relacionados con las propiedades y los vínculos que π, como objeto formal, adquiere dentro de una estructura matemática. También su inserción como modelo en diferentes ámbitos matemáticos.

El estudio se materializó, en primera instancia, detectando las nociones, proposiciones, lenguaje, acciones, argumentos y problemas que subyacen en cada problema. Para los tres primeros problemas, además, se elaboró una red epistémica que permita visualizar las relaciones entre las componentes que los configuran. Con todos estos elementos y del estudio de sus relaciones, avanzamos hacia la búsqueda de la estructuración de π.

El esquema de la figura 1 permite visualizar el enriquecimiento del significado de π a través de su evolución histórica. En este sentido queda explícita por un lado cada una de las etapas de evolución y por el otro, las diferentes situaciones que han promovido la búsqueda de problemas que las representan. Estos problemas a través del sistemas de prácticas que desarrollan permiten detectar claramente elementos de significado tales como conceptos, argumentos, procedimientos, propiedades, lenguaje que conforman los significados parciales del objeto matemático π.

Los elementos figurativos que integran el esquema refieren a las siguientes cuestiones: en paralelepípedos se ubican las situaciones, las que permiten la búsqueda y selección de problemas representativos. El esquema de nube contiene y representa a cada uno de dichos problemas, intentando reflejar el carácter relativo en cuanto a su selección. Los sistemas de prácticas que se desprenden del análisis del problema se agrupan en hexágonos, dados que en ellos se concentran los seis elementos básicos de significado que hemos querido detectar en este estudio. Las flechas marcan distancia y evolución entre las distintas situaciones en cuanto al desarrollo histórico del número π. Los hexágonos ubicados en la parte superior del esquema contienen una "expresión" de π que intentan simbolizar, a lo largo de su trayectoria, su evolución en cuanto a su estatus como objeto matemático. Por último cabe destacar que las flechas de bloque junto a las etapas señalan un cambio epistemológico sobre el enfoque de la problemática de π. En efecto, pasamos desde la solución a problemas en un contexto real a través de la medida hasta la la concepción de π como número con infinitas cifras decimales y como elemento del cuerpo de los números reales.

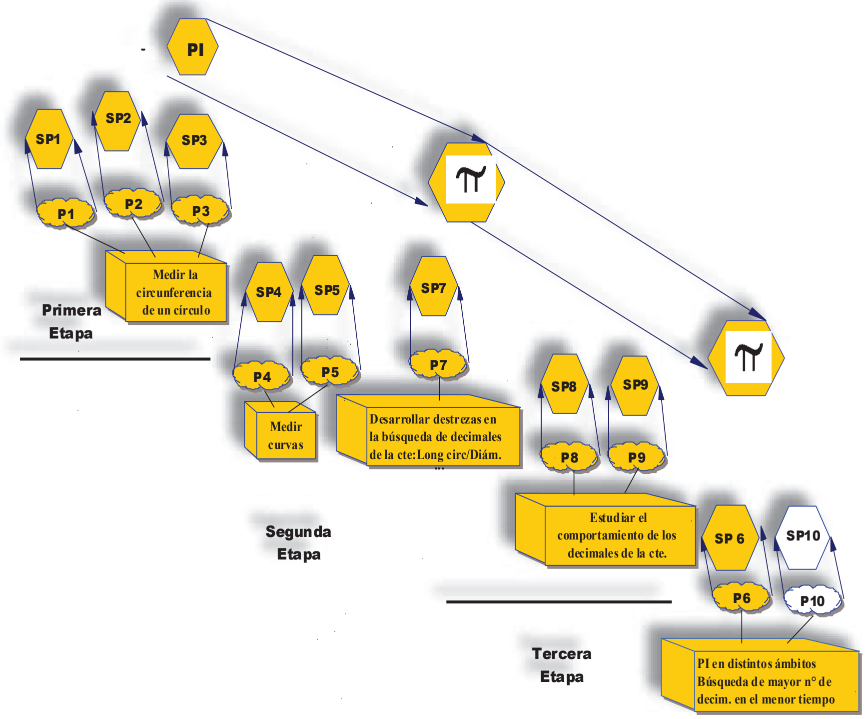

Figura 1: Configuración de los sistemas de prácticas desde las situaciones generadas durante la evolución histórica de π.

Por razones de espacio, y a los fines de ilustrar el tipo de estudio realizado, seleccionamos un problema representativo del tipo 2, el cual corresponde a la primera etapa de nuestra clasificación.

Problema tipo 2: La cuadratura del círculo en el antiguo Egipto

El problema 50 que encontramos en el Papiro de Rhind se enuncia y resuelve del siguiente modo (Berggren, Borwein y Borwein, 1997, p.1):

Problema 50: "Ejemplo de un campo redondo de diámetro 9 khet. ¿Cuál es su área?

La solución que se describe es:

"Resta 1/9 del diámetro, esto es, 1; el resto es 8. Multiplica 8 veces 8; resulta 64. Por tanto contiene 64 setat de tierra.

En estos problemas el área del círculo se iguala a la de un cuadrado cuyo lado es (8/9) del diámetro del círculo.

No se sabe cómo pudieron llegar a esta fórmula para hallar la "cuadratura del círculo", pero un pequeño diagrama geométrico (Fig. 2 (a)) que acompañaba al problema 48 ofrece una posible clave (Eves, 1969; reproducido en Berggren, Borwein y Borwein, 1997, p.402).

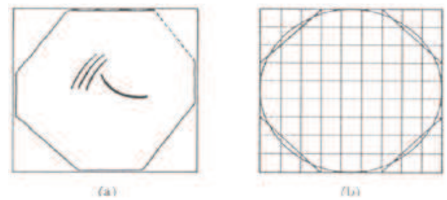

Figura 2: Diagrama geométrico que acompaña al problema 48

El diagrama sugiere que al cuadrado se le han cortado las cuatro esquinas a una distancia 1/3 del lado. Si la figura se dibuja con cuidado y se inscribe un círculo se observa que el área del círculo inscrito se ajusta bastante bien mediante el área de la figura octogonal obtenida (Figura 2(b)). Si el diámetro del círculo se toma como 9, también será 9 el lado del cuadrado, por tanto el octógono tendrá de área: 81 - 4(9/2) = 63, y el lado del cuadrado de igual área que el circulo será √63 que, a su vez se puede aproximar por √64, o sea, 8.

Por consiguiente, el lado de un cuadrado equivalente es aproximadamente los 8/9 del diámetro del círculo dado.

En la figura 3 presentamos de manera esquemática la configuración epistémica asociada al problema de la cuadratura del círculo según la conjetura sugerida por Eves (1969) y reformulada por nosotros.

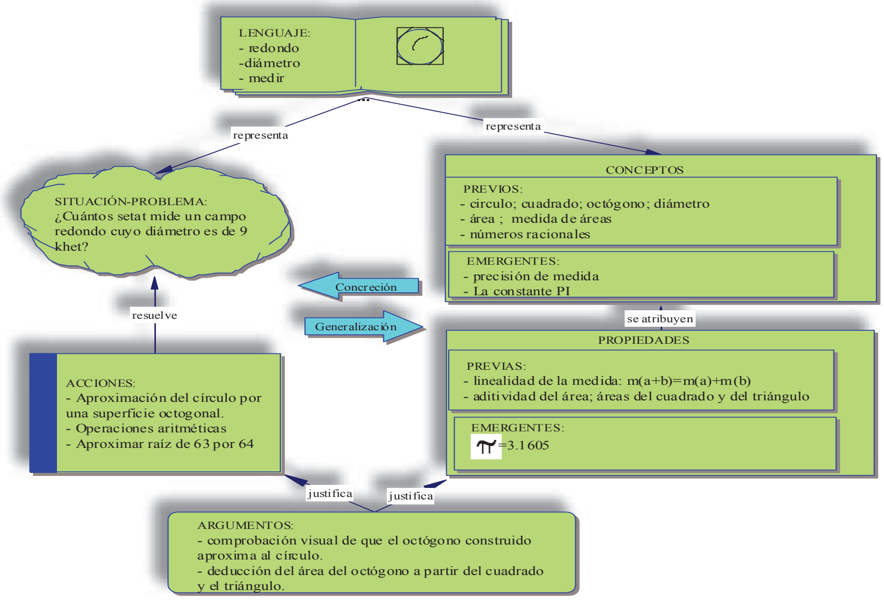

Figura 3: Configuración epistémica de la cuadratura del círculo

Tanto este problema como los otros dos desarrollados en sus orígenes, remiten a un contexto donde predominan técnicas geométricas. Las que se corresponden naturalmente con la primera etapa de la evolución histórica que hemos mencionado. Observamos que en el problema del

Papyrus de Rhind, la "estimación" de los egipcios es de 3,1605. En este como en los otros problemas desarrollados se evidencia que π no podría ser considerado como un número que participa en una fórmula, dado que en esa época se enunciaban programas de cálculo formulados en lenguaje corriente. Somos nosotros los que realizamos interpretaciones para obtener los valores de π descriptos en cada caso.

Un segundo esquema, (Fig.4) permite visualizar cómo se agrupan los distintos sistemas de prácticas para luego identificarse a través de un objeto emergente común. Consideramos que la potencialidad de esta presentación radica en la puesta en descubierto de los contextos en los que se desarrollan estos sistemas de prácticas. (Contextos de uso).

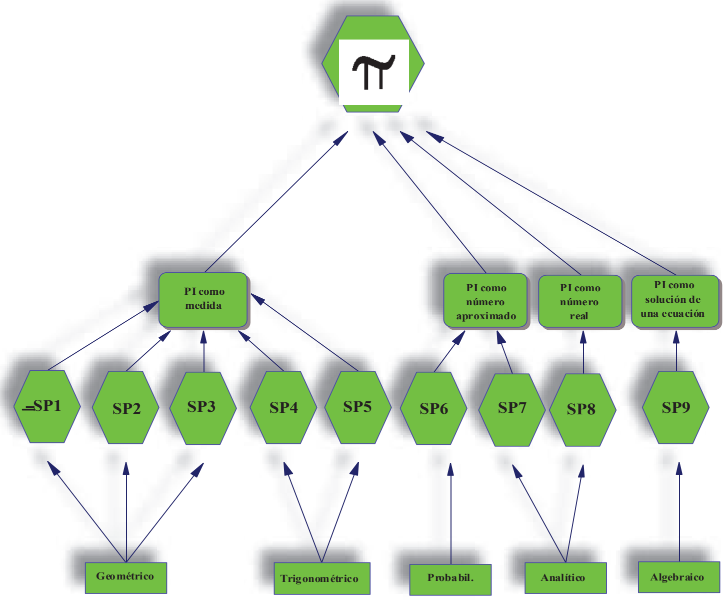

Figura 4: Configuración de los sistemas de prácticas estudiados y su relación con los contextos de uso.

Conclusiones

La reconstrucción del significado global de π ha permitido por un lado caracterizar tres etapas de su evolución histórica: 1) Medir la circunferencia de un círculo; 2) Medir curvas, desarrollar destrezas en la búsqueda de decimales de la constante long. circunf./diámetro, estudiar el comportamiento de los decimales de la constante; 3) π en distintos contextos, búsqueda de la mayor cantidad de decimales de π en el menor tiempo. A partir tanto de la selección de problemas representativos de dichas etapas, que marcaron cambios en su estatus, como del análisis de prácticas emergentes de ellos se detectaron multiplicidad de objetos (conceptos, acciones, propiedades, argumentos, lenguaje) tanto presentes en la base de su concepción como emergentes de las relaciones entre ellos, lo que ha permitido poner en evidencia la complejidad epistémica que este objeto encierra.

Algunos de los objetos vinculados a π detectados en la primera etapa fueron: La consideración del diámetro de una circunferencia como unidad de medida, la relación entre el diámetro y el perímetro del círculo, la emergencia de π como una constante, la precisión de la medida, la aproximación del área del círculo por medio de otras áreas, la acotación de una medida. La distinción entre la expresión decimal de un número y un número decimal. Algunos de estos objetos aparecen en los diseños curriculares pero la forma en que se solicitan así como su tratamiento en los libros de textos de enseñanza obligatoria se hace de un modo que no promueve la emergencia de significados de π. En las etapas siguientes se detectan otros objetos que conllevan mayor complejidad epistémica y por ende están asociados a otros niveles del sistema educativo. Tal es el caso de la concepción de la longitud de una circunferencia como el límite del perímetro de un polígono regular inscripto (circunscrito) de *n* lados cuando el número de lados crece indefinidamente, el problema de la medición de cualquier curva, sistemas de medición adecuados, determinación de la cantidad de decimales de π, caracterización de los decimales de π, reconocimiento de π como número irracional, la trascendencia de π. La investigación nos ha permitido mostrar la posibilidad de alcanzar significaciones de π desde la escolaridad elemental a través del estudio de las configuraciones epistémicas asociadas a los problemas seleccionados, las que nos brindan información de los objetos necesarios y de sus relaciones internas, dando cuenta de la presencia y jerarquía de cada una de ellos.

Referencias bibliográficas

Beckmann, P. (2006). *Historia de π*. Ciudad de México. D.R Libraria, SA de CV.

Berggren, L., Borwein, J. y Borwein, P. (Eds.) (1997). *PI: A source book*. NewYork:Springer.

Fauvel, J. y Maanen, J. Van (Eds.) (2000). *History in mathematics education*. The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135.

Konic, P. y Godino, J. D. (2005). Configuraciones epistémicas asociadas al número PI. En A. Contreras, L. Ordoñez y C. Batanero (Eds.), *Aplicaciones y desarrollos de la teoría de las funciones semióticas.* (pp. 215-217). Jaén (España): Servicios de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Posamentier, A. y Lehmamm I. (2006). *La proporción trascendental: La historia de π, el número más misterioso del mundo.* Barcelona. Editorial Ariel S.A