ESPACIOS DE REFLEXIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA MEDIA. ANÁLISIS GRÁFICO COMO PUERTA DE ENTRADA HACIA EL APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2

Analía Edith Bozzalla ySilvina Aida García Serrano
Universidad Argentina de la Empresa Argentina
abozzalla@uade.edu.ar, silvinags@gmail.com

Resumen. Este trabajo surge del deseo de colaborar, desde nuestra labor en el aula, con el proceso de comprensión y apropiación del concepto de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. El abordaje tradicional de la temática, ubica a los alumnos en un lugar estático, meramente algorítmico, con escasas situaciones de transferencia y en contextos carentes de pluralidad. Este escueto panorama nos motiva a diseñar estrategias didácticas, en las cuales el tema sea indagado desde distintos sistemas de representación

Palabras clave: sistemas, análisis gráfico, registros, rectas

Abstract. This work comes out from the desire to aid, from our classroom work, with the process of understanding and appropriation of the concept of 2x2 systems of linear equations. The traditional approach places students in a static, purely algorithmic way of work, with very few transfer situations and contexts devoid of plurality. This brief overview motivates us to design teaching strategies, in which the matter is investigated from different registers of representation

Key words: systemsm, graphical analysis, registers, lines

Introducción

El interés que nos convoca a realizar este trabajo radica en la necesidad de elaborar una secuencia didáctica que facilite el aprendizaje del objeto matemático: sistemas de ecuaciones lineales.

Consultando con algunos textos usados en la escuela media (destinada a alumnos de 13 a 17 años), hemos observado que el recorrido más habitual, en la presentación de la temática, comienza con la especificación de los métodos utilizados en la resolución de sistemas, siguiendo con la verificación de los resultados obtenidos a través de la representación gráfica y por último, la presentación de algunos problemas para que el alumno modele a través de un sistema lineal.

Partiendo de este panorama nos pareció interesante, y aún más fructífero, generar una secuencia didáctica donde el eje constructor de la misma radique en la circulación, en ambos sentidos, de los distintos registros de representación: registros verbales (RV), algebraicos (RA) y gráficos (RG). Según Duval (1999), la relación entre las representaciones y los diferentes registros genera una interpretación semiótica del vínculo entre los diferentes sistemas de signos que simbolizan el mismo objeto. Según el autor, las representaciones en los diferentes registros, no sólo son necesarias a fines de comunicar, sino esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento; en el pasaje de un registro a otro no son los mismos aspectos del objeto los que se representan, de ahí la importancia del recorrido por todos los registros. La conceptualización implica coordinación entre registros, con lo cual, según el autor, la comprensión de un objeto matemático radica en la coordinación de al menos dos registros de representación.

Problemática

Como docentes en el nivel superior, recibimos a alumnos, egresados de la escuela media (con edad mínima de 17 años), con importantes dificultades a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales; los mismos radican en problemas sobre la manipulación aritmética del sistema, en la verbalización de las ecuaciones involucradas y en la resolución gráfica del sistema presentado (Guzmán, 1999). Esto sucede en un contexto, en el cual, los algoritmos de resolución son perfectamente aplicados y explicados por el docente a cargo. De acuerdo a investigaciones consultadas, (Panizza, Sadovsky y Sessa, 1999), los alumnos no son capaces de verificar la solución obtenida y en pocas ocasiones, a partir del análisis gráfico, pasan al abordaje algebraico. Los resultados de estas investigaciones han motivado nuestro deseo de proponer un recorrido diferente en la presentación del objeto matemático: sistemas de ecuaciones lineales, trabajando sobre el eje central de la circulación de los registros mencionados (RV↔RG) (RG↔RA) (RA↔RV) y de los factores que hacen posible dicho pasaje.

Por otro lado, en general, los alumnos presentan dificultades en el tratamiento y en la expresión de la solución de una ecuación con infinitas soluciones.

El trabajo de indagación sobre textos de escuela media que contienen el tema estudiado, nos permitió sintetizar un panorama en donde el desarrollo algorítmico prevalecía sobre cualquier otra actividad. Esta situación, entre otras, consideramos genera una ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico; los alumnos (con edades de entre 13 y 17 años) en escasas ocasiones son capaces de realizar pasajes del registro verbal al algebraico y viceversa. Consideramos que enmarcar el inicio de la actividad en el registro verbal puede generar un espacio en donde el paso entre los diferentes registros de representación resulte indispensable para avanzar en la actividad propuesta. Según Duval (1999), cuando se pasa de un registro a otro, los aspectos del objeto que se ven representados no son los mismos, de ahí que los sistemas son complementarios. Llegar a la conceptualización requiere de una actividad de coordinación de al menos dos registros de representación.

Las actividades propuestas a continuación han sido pensadas para desarrollar en clases de primero y segundo año de la escuela media (alumnos de 14 y 15 años de edad) guiadas por el docente a cargo

Nos propusimos iniciar la secuencia didáctica con una situación problemática, de forma de indagar sobre la capacidad de los alumnos para producir una escritura de una ecuación con dos variables aislada de una sistema de ecuaciones lineales.

Actividad 1

a) Halle dos números enteros ***a*** *y* ***b*** tales que la suma del primero y el doble del segundo sea igual a 100.
b) ¿Es posible hallar más de un par de números que cumplan dicha condición?
   i. Halle por lo menos tres pares.
   ii. Halle por lo menos 20 pares.

Con este problema nos proponemos entre otras cosas:

- Introducir de forma muy sencilla la idea de solución no única.
- Crear la necesidad de realizar un registro algebraico del problema de forma de poder generar rápidamente distintos pares de números que cumplan la condición pedida.
- Enfatizar el trabajo con el registro verbal: ¿cómo leo $a + 2b = 100$?
- Repasar el concepto de ecuación visto anteriormente en clase.

Seguimos Trabajando…

Actividad 2

La dueña de una casa de té decide renovar la decoración de su local. Para ello compra telas para cortinas, las cuales cuestan $200 el metro, y otras para mantelería cuyo costo es $ 50 el metro. Si en total pagó $2500, ¿podría determinar cuántos metros compró de cada tela?

Registro Algebraico

$$200c + 50m = 2500$$

Donde la variable c representa la cantidad de metros de tela para cortinas y m es la cantidad de metros en telas para mantelería

Una vez generada la escritura de la ecuación que responde al problema planteado, se les pedirá a los alumnos hallar las soluciones buscadas.

¿Qué esperamos de esta actividad?

Las investigaciones (Panizza, Sadovsky y Sessa, 1999; Grimaldi, Baldassari, Sivori, 2012; Segura de Herrero, 2004; Font, Godino y D' Amore, 2007) muestran que:

- Los alumnos se apoyan en sus conocimientos previos de ecuaciones con una variable, este hecho los conduce a querer hallar un valor para c y otro para m.
- Al situarse en el contexto del problema los alumnos anticipan la unicidad de la solución del problema.

- Al intentar despejar una variable los alumnos evidencian desconcierto al no poder interpretar la expresión algebraica encontrada.

De acuerdo a las respuestas presentadas por los alumnos se puede acompañar la actividad planteada con pares ordenados para que el alumno determine si son o no solución y vean que la ecuación no posee solución única.

Nuestra experiencia junto con las investigaciones indagadas nos permiten arribar a las siguientes reflexiones:

- Algunos alumnos son capaces de sustituir el par dado en la ecuación original pero presentan dificultades en el análisis de los resultados obtenidos 3=3; 3=8, etc.
- En otros casos, los alumnos insisten en la resolución de la misma para lograr arribar a alguna de las soluciones propuestas.

Ante nuestra pregunta y la inquietud de algunos alumnos respecto de la cantidad de soluciones de la ecuación planteada, encontramos el momento propicio para introducir el registro gráfico.

Nota: Para representar gráficamente la ecuación se utilizo el utilitario GEOGEBRA. Se consensuó la necesidad de expresar la ecuación en términos de x e y, dado que el graficador propuesto no reconoce otra variables.

Actividad 3

Sabiendo que: $x=c=$ cantidad de metros de tela para cortina

$y=m=$ cantidad de metros de tela para mantelería

Represente $200c + 50m = 2500$ | ¿Qué obtiene?

1- Ubique los pares $(9, 14)$; $(5, 20)$; $(5,30)$; $(8.5, 16)$ $(9,10)$ en el gráfico realizado. ¿Cómo se relacionan las soluciones de la ecuación planteada con el gráfico obtenido?
2- Proponga otros pares que sean solución de la ecuación. Proponga al menos tres

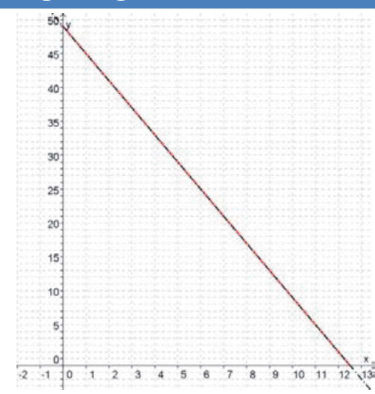
¿Qué preguntas esperamos que esta actividad genere en el aula?

- ¿Cuántas soluciones tiene el problema?
- ¿Cómo se relacionan las soluciones con los puntos de una recta?
- ¿Por qué un par es solución y otro no?
- ¿Podría un par poseer componentes negativas?
- ¿Siempre las soluciones son los puntos de una recta?

En este momento sería importante destacar la correspondencia entre las distintas expresiones obtenidas en la resolución de la actividad 2 y la gráfica de la ecuación.

Distintas investigaciones ya mencionadas, muestran que cualquiera haya sido el trabajo realizado alrededor de la "ecuación de una recta", este trabajo no parece suficiente como para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de una recta y las soluciones a la ecuación planteada.

Esta tarea nos permite introducir otro registro en la resolución de ecuaciones.

Registro verbal	Registro Algebraico	Registro gráfico
Si la dueña de una casa de té para renovar la decoración de su local requiere de c metros de tela para las cortinas cuyo costo es de $200 el metro su gasto para las cortinas será 200c pesos. Por otro lado si su local requiere de m metros de tela para mantelería cuyo costo es $ 50 el metro, su gasto será de 50m pesos. Con lo cual el gasto total será: $200c + 50m = 2500$	$200c + 50m = 2500$ Donde la variable c representa la cantidad de metros de tela para cortinas y m es la cantidad de metros en telas para mantelería	

La idea de incorporar otro registro de representación tiene como propósito que el alumno participe en el proceso de transformación del objeto sistemas de ecuaciones lineales. Es decir, la conversión de la representación de un objeto que se encuentra en un registro en la representación del mismo objeto en otro registró. Esta secuencia didáctica pretende generar espacios donde el alumno pueda "moverse" con fluidez entre los distintos registros, donde el camino de ida y vuelta, le permita realizar actividades de autocorrección y comprensión del concepto estudiado.

Una vez discutida la unicidad del conjunto solución de las ecuaciones lineales con dos incógnitas se propone una actividad de mayor complejidad con el propósito de introducir el concepto de sistemas de ecuaciones.

Actividad 4

Dadas las ecuaciones $2x + 3y = 5$ y $5x - 4y = 1$

a- Proponga al menos tres pares que sean solución de cada una de ellas. Explique cómo obtiene cada par y qué estrategia uso para hallarlos?

b- ¿Existe algún par que sea solución de ambas ecuaciones? ¿Cómo y donde lo buscaría?

c- ¿El punto (1,1) es solución de la ecuación $2x + 3y = 5$?

Los alumnos podrán hallar el punto de intersección, solución del sistema utilizando el comando "Intersección de dos objetos" correspondiente al software Geogebra. A partir de lo hecho para ecuaciones lineales de dos incógnitas será natural buscar la solución en la intersección entre las dos rectas.

Luego de definir el concepto de sistemas de ecuaciones lineales y de discutir desde el registro gráfico el conjunto solución, los alumnos arribarán a la conclusión de que el par (1,1) es solución del sistema planteado.

Ahora bien, planteamos otro interrogante que intenta volver sobre lo trabajado:

¿El punto (1,1) es solución de la ecuación $2x+3y=5$?

De acuerdo con investigaciones mencionadas se pude ver que los estudiantes consideran que el par (1,1) es solución de ambas ecuaciones y no de una de ellas. Esta respuesta se relaciona con la concepción que mantienen los alumnos de que una ecuación con dos variables en un sistema es un objeto diferente de una ecuación con dos variables.

Esta actividad tiene como principal propósito afianzar el concepto de solución de una ecuación de dos variables, estableciendo una relación entre los puntos de una recta y las soluciones de la ecuación correspondiente; afianzando la idea de que una ecuación con dos variables en un sistema, es el mismo objeto que dicha ecuación fuera del sistema.

En esta actividad el recorrido sobre los distintos registros podría seguir esta dirección: RG→RV →RA.

El pasaje de un registro al otro implica un tratamiento del sistema en el cual el alumno está trabajando y un diseño de estrategias para pasar al otro. En este sentido la conversión resulta muy interesante, porque se pretende hacer transitar al alumno en un recorrido no habitual e incongruente.

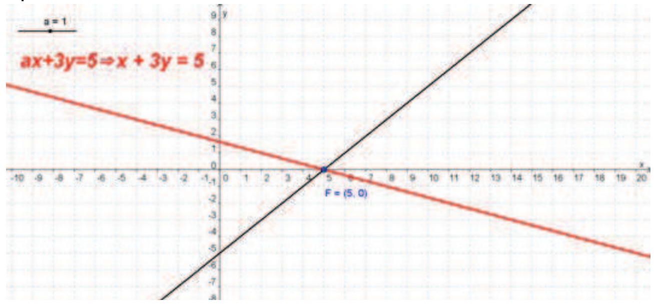
Actividad 5

El siguiente gráfico representa un sistema de ecuaciones lineales:

Se pide:

a) Determine si el mismo posee solución. Si la respuesta es afirmativa determine las coordenadas del punto solución del mismo
b) Escriba las ecuaciones que definen el sistema.

c) A partir de la modificación del parámetro a responda ¿Siempre un sistema posee solución?

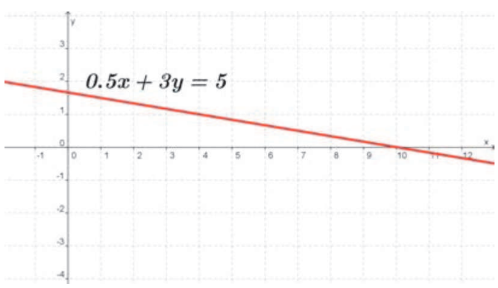


A partir de la discusión y resolución de esta actividad, esperamos que el alumno:

- Sea capaz de pasar del registro gráfico al registro algebraico
- Sea capaz de identificar la solución del mismo
- Identifique que el sistema no posee solución cuando las rectas son paralelas, discutir a partir del registro algebraico como ver en las ecuaciones que las rectas son efectivamente paralelas llevándolas a la forma $y = mx + b$

Actividad 6

El siguiente gráfico es la representación de una de las ecuaciones que integran un sistema, si la otra ecuación involucrada es $x - 6y = 10$. Determine si el mismo posee solución. Si la respuesta es afirmativa determine si la misma es única.



Con la siguiente actividad se espera que el alumno aborde el análisis de sistemas con infinitas soluciones y a partir del análisis de los parámetros de las rectas involucradas discutir como reconocer este tipo de sistemas.

A modo de síntesis se propone la siguiente actividad:

Actividad 7

Dada la ecuación $2x + 4 = 8y$ proponga otra ecuación de forma tal que el sistema resultante posea:

1-El punto (2,1) como única solución.

2-Tenga infinitas soluciones.

3-No posea solución

Conclusión

A partir del análisis realizado hemos observado las dificultades en el manejo y la interpretación por parte de los alumnos de una ecuación lineal con dos incógnitas, en parte motivado por el fraccionamiento que propone el docente en los contenidos impartidos. Los alumnos no son capaces de extrapolar los conocimientos que poseen sobre rectas y función lineal a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Esta problemática creemos tiene su origen en la elecciones didácticas realizadas por los docentes a cargo, respecto del orden y correlaciones temáticas.

Como resultado de lo anterior los alumnos no son capaces de moverse con fluidez entre los registros gráfico, analítico y verbal careciendo en consecuencia de estrategias de autocontrol

Esto genera la mecanización en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, transformando esto último en una mera acumulación de algoritmos, los cuales se aplican sin justificación y con escasa comprensión por parte de los alumnos.

Frente a esta realidad, el presente trabajo pretende mostrar una secuencia didáctica basada en el recorrido constante entre los distintos registros de representación del objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales. Dicha secuencia pretendemos que invite al alumno a "entrar al tema" desde un contexto gráfico alejado de los métodos de algorítmicos de forma de evitar la confusión del objeto matemático con los algoritmos de resolución.

Esperamos que este trabajo pueda sentar las bases para futuras investigaciones referidas a los procesos algoritmos vinculados con la resolución de sistemas de ecuaciones, de manera de dotarlos de sentido para los alumnos.

Referencias bibliográfícas

Duval, R. (1999), *Sémiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Universidad del Valle.

Font, V., Godino, J. y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las Representaciones en Educación Matemática. *For the learning of Mathematics, 27(2),2-7.*

Grimaldi,V., Baldassari,V. y Sivori, A. (2012). El mejor camino… ¿para quién…?. Maneras alternativas de abordar el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. III Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el Campo de las Ciencias Exactas y

Naturales. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad Nacional de la Plata.

Guzmán, R. I. (1999). *Apuntes del curso Fundamentos teóricos de la didáctica de la matemática* (Magister en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática) Valparaiso, Chile: Universidad Católica de Valparaíso.

Habre, S & Abboud, M. (2006). Student's conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior*, 25 (1), 52-72.

Panizza, M. , Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La ecuación Lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias,* 17, 453-461.

Segura de Herrero, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7 (1), 49-78.