RESCATANDO LOS POLIEDROS DE ARQUÍMEDES

Mario Dalcín y Verónica Molfino
Departamento de Matemática. Consejo de Formación en Educación. Uruguay
mdalcin00@gmail.com, veromolfino@gmail.com

Resumen. ¿Por qué prismas y poliedros regulares tienen un rol protagónico en la matemática escolar? Los poliedros arquimedianos, ¿pueden ser relevantes para su inclusión en la matemática escolar de Educación Secundaria y Formación de profesores? En este taller proponemos reconocer y visualizar poliedros semirregulares con el uso del programa Poly Pro, descubrir y describir algunas de sus propiedades, identificar cuáles de ellos son arquimedianos, analizar las relaciones entre esta familia de poliedros y los poliedros regulares, explorar maneras de construirlos -a partir del análisis de grabados del artista renacentista W. Jamnitzer-, conjeturar acerca de la cantidad de elementos de esa familia y ensayar diferentes justificaciones. Es decir, proponemos una actividad que favorezca el tránsito entre los niveles 0, 1 y 2 propuestos por Van Hiele en el contexto de la geometría euclidiana del espacio, articulada a su vez con la forma de concebir la actividad geométrica de Kuzniak, a través de paradigmas caracterizados por el interés por resolver problemas específicos

Palabras clave: paradigmas, poliedros arquimedianos, tránsito entre niveles

Abstract. Why prisms and regular polyhedra play a leading role in school mathematics? May Archimedean polyhedra be relevant for inclusion in school mathematics Secondary and Teacher Educaion? In this workshop we propose to recognize and visualize semiregular polyhedra using Poly Pro program, discover and describe some of their properties, identify which ones are Archimedean, analyze the relationship between this family of polyhedra and regular polyhedra, explore ways to build them -from the analysis of Renaissance artist prints W. Jamnitzer-, make conjectures about the number of elements of that family and try different justifications. That is, we propose an activity that promotes the transition between levels 0, 1 and 2 proposed by Van Hiele in the context of Euclidean geometry of space, articulated in turn with Kuzniak's way of conceiving geometric activity, through paradigms characterized by the interest in solving specific problems

Key words: paradigms, Archimedean polyhedra, transit between levels

Introducción

Explorando currículos de Enseñanza Secundaria de diferentes países encontramos que en la mayoría de ellos se sugiere el tratamiento de los poliedros regulares, prismas y pirámides. En particular, en los programas de Uruguay se encuentran también "Posiciones relativas entre rectas y planos en el espacio", "Paralelismo" y "Perpendicularidad" como contenidos a ser desarrollados independientemente de su aplicación a los poliedros y en forma abstracta, es decir con un rigor deductivo mayor del que los estudiantes pueden desarrollar por sí mismo o incluso entender.

Frente a esta situación nos cuestionamos: ¿por qué prismas y poliedros regulares tienen ese rol protagónico dentro de los poliedros? ¿Qué otras familias de poliedros pueden ser relevantes para su inclusión en la matemática escolar de Educación Secundaria? En ese sentido, y buscando una manera de organizar estos contenidos para un curso de Geometría en el primer año de la carrera de Profesorado de Matemática en el Instituto de Profesores 'Artigas' de Montevideo, utilizamos como criterio de clasificación de poliedros el hecho de que sus caras sean polígonos regulares.

Así, los poliedros regulares, por ejemplo, se encuentran dentro de la familia 'poliedros cuyas caras son polígonos regulares de un solo tipo'. Pero, continuando con la clasificación, propusimos la familia 'poliedros cuyas caras son polígonos regulares de más de un tipo'… De esta forma, nos podemos cuestionar:

- ¿Existen prismas cuyas caras sean polígonos regulares de más de un tipo? ¿Y antiprismas? ¿Y pirámides? ¿Cuántos?
- ¿Existen otros tipos de poliedros con caras polígonos regulares de más de un tipo? ¿Cuáles y cómo son?

Buscando responder estas preguntas, diseñamos una serie de actividades que son las que proponemos en este taller. Desde hace tres años, estas mismas actividades son propuestas también a los estudiantes de primer año de Profesorado de Matemática en su curso de Geometría Euclidiana. Se centran en reconocer y visualizar poliedros semirregulares con el uso del programa Poly Pro, descubrir y describir algunas de sus propiedades, identificar cuáles de ellos son arquimedianos, analizar las relaciones entre esta familia de poliedros y los poliedros regulares, explorar maneras de construirlos -a partir del análisis de algunos grabados del artista renacentista W. Jamnitzer-, conjeturar acerca de la cantidad de elementos de esa familia y ensayar diferentes justificaciones.

¿Cómo concebir la geometría y la actividad geométrica?

Houdement y Kuzniak (1999) proponen tres geometrías:

<u>Geometría I</u>. La geometría natural. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.

<u>Geometría II</u>. La geometría axiomática natural. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad.

<u>Geometría III</u>. La geometría axiomática formalista. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

Estas tres geometrías nos dan un marco desde el cual dar cuenta de toda la geometría, desde la que se trabaja en la enseñanza primaria hasta aquella con la que trabaja un matemático. Lejos de pensar una jerarquía entre estos paradigmas de pensamiento geométrico, los autores postulan tres geometrías posibles, tres enfoques distintos de un mismo hecho, pero donde ninguno niega a los otros. Las prácticas permiten ver en cuál se está trabajando en cada momento, son tres dimensiones distintas: el camino deductivo es uno de esos caminos (Geometría II), pero también puede ser el de constatar mediante mediciones (Geometría I), o validar al interior de un sistema axiomático formal (Geometría III). Esto permite concebir la formación de un estudiante en el ámbito de la geometría como un tránsito continuo entre estas tres dimensiones.

Entendemos que este modelo puede ser de utilidad para entender el trabajo geométrico de los estudiantes de profesorado y así poder contribuir a su desarrollo. Específicamente, en las clases hemos observado que las producciones de nuestros estudiantes al iniciar sus estudios de profesorado y en lo que hace referencia a temas de geometría del espacio, se ubican dentro de la Geometría I, pero con la dificultad extra que implica la representación (plana o espacial) de figuras tridimensionales. Aspiramos a que el tipo de actividades que proponemos en este taller promueva un tránsito entre las otras dimensiones.

Por otro lado, en Kuzniak (2006) se presenta una articulación entre esta manera de concebir la actividad geométrica y la teoría del desarrollo del pensamiento geométrico desarrollada por Van Hiele (1986). La consideración de cómo los estudiantes transitan entre los niveles de pensamiento geométrico (0: visualización, 1: análisis, 2: deducción informal, 3: deducción formal y 4: abstracción) enriquece el modelo de los paradigmas geométricos, permitiendo diseñar secuencias para la matemática escolar.

La actividad que se propone en el taller fue pensada para facilitar el tránsito entre los niveles 0, 1 y 2 de la teoría de van Hiele en un contexto que tan áspero suele resultar para los estudiantes, como el de la geometría euclidiana del espacio.

Algunas actividades propuestas y su justificación

Actividades 1, 2 y 3

a) ¿Hay prismas/antiprismas/pirámides cuyas caras sean todos polígonos regulares de un solo tipo? En caso de que sí, ¿cuántos?

b) ¿Hay prismas/antiprismas/pirámides cuyas caras sean todos polígonos regulares de más de un tipo? En caso de que sí, ¿cuántos?

Esta es una actividad enmarcada en el nivel 0 de los propuestos por Van Hiele (1986), con el objetivo de que los estudiantes reconozcan y visualicen poliedros con condiciones dadas: por ejemplo, para el caso de los prismas (actividad 1), deberán en primer lugar visualizar la familia de los prismas (puede ser imaginándola o una representación concreta, en libro, Internet o software como el PolyPro). Y, dentro de ella, identificar cuáles elementos verifican además que sus caras son polígonos regulares de un solo tipo, o más de un tipo, según lo solicitado.

Actividad 4

- En esta actividad analizaremos las siguientes propiedades de algunas familias de poliedros: Poliedro convexo.
- Sus caras son polígonos regulares.
- Sus caras son uniformes (iguales entre sí).
- Sus aristas son uniformes (todas están incluidas en el mismo par de caras).
- Sus vértices son uniformes (concurren la misma cantidad de caras, del mismo tipo y en el mismo orden).

A continuación se propone una tabla de doble entrada: en las columnas las propiedades y en las filas las familias: poliedros platónicos, arquimedianos, prismas, antiprismas, pirámides, deltaedros, bipirámides, de Johnson y de Catalán.

Asimismo, se aclara que en casos en que las caras pueden o no ser polígonos regulares (como prismas o antiprismas), se considerará la subfamilia formada por los que sí las tienen.

Esta actividad tiene por objetivo favorecer el tránsito entre niveles 0 y 1 de la teoría de Van Hiele (1986): a partir de la visualización de cada elemento de cada familia, se deben reconocer sus elementos, las diferencias y semejanzas entre los mismos miembros de una familia, y comprobar, a partir de un análisis de cada uno, si la familia verifica o no una determinada propiedad. De esta manera, se descubrirá, entre otras cosas, que los únicos que verifican todas las propiedades son los platónicos y que los deltaedros tienen caras regulares y uniformes y aristas uniformes pero sus vértices no lo son. Y, en particular, se reconocerá algo que nos permitirá definir a los arquimedianos: que las familias que verifican tener caras regulares y vértices uniformes a la vez son solamente los arquimedianos, prismas y antiprismas. De esta manera, definimos:

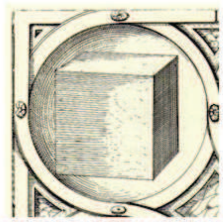
- Llamaremos *poliedros semirregulares* a los poliedros convexos que tienen caras polígonos regulares (de uno o varios tipos) y con vértices uniformes.
- Llamaremos *poliedros arquimedianos* a los poliedros semirregulares que no sean regulares (platónicos), ni prismas, ni antiprismas.

En la propuesta de las actividades 5 a 10, 15 y 16 utilizamos imágenes tomadas del libro *Perspectiva corporum regularium*, publicado en Nuremberg en 1568 y cuyo autor es Wenzel Jamnitzer (1508–1585)

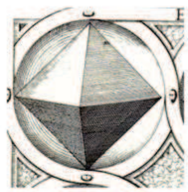
Exponemos a modo de ejemplo algunas de ellas:

Actividad 5

a) Marca en la figura que representa el cubo cómo lo truncarías para obtener el poliedro representado en esta imagen:

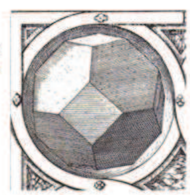


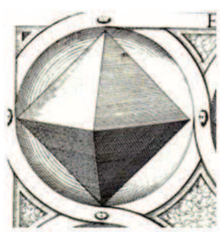
b) Ahora considera el mismo tipo de truncamiento para el octaedro: ¿Qué poliedro obtendrías?



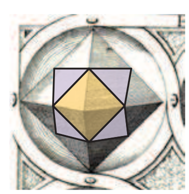
Actividad 9

Marca en la figura que representa el octaedro regular cómo lo truncarías para obtener el poliedro representado en esta imagen:





En este tipo de actividades se recorren posibles truncamientos por puntos medios de aristas y puntos que las dividen en tres partes iguales, para los cinco poliedros platónicos. Se analizan todos los casos posibles, lo que implica un tránsito entre los niveles 1 (análisis) y 2 (deducción informal).



Por ejemplo, en la actividad 5, cuando se pide truncar al octaedro por puntos medios, los estudiantes cuentan con herramientas teóricas para demostrar que uno de los tipos de caras obtenido es triángulo equilátero (los lila en la figura): utilizan el concepto previamente abordado de paralela media.

Sin embargo, si bien pueden deducir que el cuadrilátero naranja tiene cuatro lados de igual medida, no cuentan con herramientas teóricas para demostrar que es plano, ni tampoco que es un cuadrado. Por lo que estaríamos admitiendo una deducción de tipo informal, pero bajo un tipo de actividad propia del paradigma II, según el modelo de Houdement y Kouzniak (1999). Esas herramientas teóricas se abordan después en el curso. En el caso del taller, todos los asistentes, profesores de Educación Media e investigadores en Matemática Educativa, contaban con ellas por lo que pudo elaborarse una reflexión al respecto.

Dentro de este análisis de casos, proponemos algunos truncamientos que no conducen a la obtención de un poliedro arquimediano, como por ejemplo en la siguiente actividad:

Actividad 11

a) Si consideramos el mismo tipo de truncamiento que en la Actividad 9 (por puntos que dividen a las aristas en tres partes iguales) para el cubo, ¿se obtiene un poliedro arquimediano? ¿Por qué?

b) ¿Y para el dodecaedro?

Y, a continuación, una alternativa para sugerir otro tipo de truncamientos a los ya analizados:

Actividad 12

Vimos que truncando el cubo por los puntos "al tercio" de sus aristas no se obtiene un arquimediano. Ahora, ¿es posible, considerando algún otro par de puntos que separe a la arista en tres partes no necesariamente iguales, construir uno que sí lo sea? ¿Cómo? Explica cómo construir, a partir de la arista, los segmentos que permitirían hacer tal truncamiento.

Esta actividad requiere otro tipo de procesos cognitivos diferentes a los ya evocados: el cálculo de medidas y la construcción en verdadera magnitud.

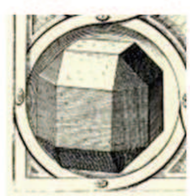
Por último, y dado que con este tipo de truncamiento no se pueden obtener todos los poliedrosarquimedianos, proponemos una actividad que conduce a una nueva forma de construirlos:

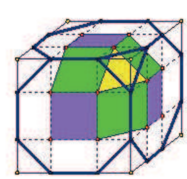
Actividad 15

En nuestra búsqueda de poliedros arquimedianos, un camino posible sería ahora considerar truncamientos de los que ya tenemos, por ejemplo por los puntos medios de sus aristas.

Consideremos por ejemplo el cuboctaedro: ¿se obtiene un poliedro arquimediano al truncar por los puntos medios de sus aristas?

Obtenemos algo parecido a esto, ¿no?





Adjuntamos ahora otra figura que puede sugerir un camino posible:

Explica con tus palabras cómo se haría.

Reflexiones finales

Las actividades propuestas en el taller fueron disparadoras de reflexiones interesantes entre los asistentes: se reconoció el valor de las mismas como favorecedoras del tránsito entre los niveles 0, 1 y 2 propuestos por Van Hiele. Asimismo, los asistentes pudieron identificar en sus propias producciones, características del paradigma II (en el cual están acostumbrados a situarse en su rol de profesores e investigadores), pero también características del paradigma I, lo que resultó removedor.

Quienes hemos estudiado ya varios años de Matemática, solemos pensar que ya no validamos afirmaciones sólo mediante la percepción o la medición, hasta que nos enfrentamos frente a un problema no analizado previamente, y que se encuentra fuera de lo tradicionalmente institucionalizado y difundido en la matemática escolar. Estas actividades referidas a poliedros arquimedianos son un ejemplo de ello.

Por último, consideramos que la inclusión de los poliedros arquimedianos en la formación de profesores y en la Enseñanza Media es una buena forma de mantener viva la obra de Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.) a más de 2200 años de su muerte. El taller que presentamos propone una forma de hacerlo.

Referencias bibliográficas

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Geometríe et paradigmenes geometriques. *Petit x*, 51, 5-21.

Jamnitzer, W. (1568). *Perspectiva corporum regularium*. Nuremberg

Kuzniak, A. - Equipe Didirem Université Paris VII. (2006). *Paradigmes et espaces de travail geometriques. Elements d'un cadre theorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en geometrie*. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education. 6 :2, April 2006, pp. 167 – 187.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education.* Orlando, FL: Academic Press.