DEMOSTRACIONES Y CONSTRUCCIONES ELABORADAS POR ESTUDIANTES DE PROFESORADO A PARTIR DE UNA CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS

Mario Dalcín y Verónica Molfino
Instituto de Profesores 'Artigas', Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación — Uruguay
mdalcin00@gmail.com, veromolfino@gmail.com

Resumen. Se describe y fundamenta una secuencia de actividades llevada a cabo con tres grupos de estudiantes de primer año de Profesorado del Instituto de Profesores 'Artigas' (Montevideo), en su curso regular de Geometría Euclidiana. El objetivo de la misma fue indagar sobre la posibilidad de construcción o justificación de inexistencia de cuadriláteros generados a partir de una clasificación de los mismos tomando como criterio la cantidad y posición de lados iguales, de ángulos iguales y de segmentos de diagonal iguales. Proponemos esta serie de actividades acorde a una modalidad de trabajo que consideramos necesaria en la formación de profesores: los estudiantes son quienes construyen conocimiento, en particular conocimiento que no puede ser encontrado usualmente en libros de texto u otras referencias. Sostenemos que con este tipo de experiencias, los estudiantes, futuros profesores de Matemática, no sólo se van formando en lo que hace a su conocimiento matemático, sino también en lo que hace a su concepción de qué es ser docente y cómo ponerlo en práctica

Palabras clave: demostración, construcción, clasificación de cuadriláteros

Abstract. In this report a sequence of activities carried out with three groups of first-year students of the Institute of Teachers Teachers 'Artigas' (Montevideo), in its regular course of Euclidean Geometry, is described and based. The purpose of it was to inquire about the possibility of construction or justification for absence of quadrilaterals generated from a classification of them using as criteria the number and position of equal sides, equal angles and equal diagonal segments. We propose this series of activities according to a way of working that we consider necessary in the initial training of teachers: students are those who construct knowledge, especially knowledge that cannot usually be found in textbooks or other references. We argue that with these experiences, students, future teachers of mathematics, are formed not only in regard to their mathematical knowledge, but also in regard to his conception of what being a teacher and how to implement it

Key words: proof, construction, quadrilaterals classification

Introducción

Los estudiantes que inician su formación como profesores de matemática de enseñanza media en el Instituto de Profesores "Artigas" (IPA, Montevideo – Uruguay), enfrentados a la tarea de nombrar y dibujar todos los cuadriláteros que conocen, incluyen en su lista a cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, paralelogramo tipo, trapecio, trapecio isósceles, trapecio birrectángulo, trapezoide, romboide… Reuniendo todas sus respuestas, la lista nunca sobrepasa la docena de nombres. Dado que estos son los cuadriláteros que generalmente se presentan en Enseñanza Primaria, las respuestas de los estudiantes nos sugieren que durante su formación posterior ha sido reforzada la idea de que esos son los únicos cuadriláteros que existen. Primer problema: los estudiantes conocen un número restringido de familias de cuadriláteros. (Dalcín, 2006; Dalcín y Molfino, 2011a)

Si a estos estudiantes se les pide que definan cada uno de los cuadriláteros que previamente nombraron, la diversidad de definiciones que surgen en el colectivo de estudiantes que inician su formación como docentes de matemática de Enseñanza Media es abrumadora: la totalidad de las definiciones hacen referencia a lados, ángulos, diagonales en una misma definición; en muchos casos no son definiciones mínimas; y pudimos constatar que bajo un mismo nombre los ejemplos que se pueden construir de cuadriláteros son distintos. Segundo problema: los estudiantes manejan un conjunto de definiciones no minimales y bastante caótico de las distintas familias de cuadriláteros. (Dalcín, 2006; Dalcín y Molfino, 2012).

Cuando se les pide que clasifiquen de alguna manera los cuadriláteros nombrados, en la mayoría de los casos lo hacen recurriendo a tres clases: paralelogramos, trapecios, trapezoides, asumiendo el paralelismo de los lados como criterio: dos pares de lados paralelos, un solo par de lados paralelos o sin lados paralelos. Hasta aquí la clasificación cumple las propiedades de una partición del conjunto de los cuadriláteros (si un cuadrilátero está un una clase no está en otra, y la unión de las clases conforman los cuadriláteros). Dentro de cada una de estas tres clases hacen nuevas distinciones pero recurriendo a diversos criterios. Por ejemplo, en el caso de los trapecios usan como criterio la igualdad de lados y la igualdad de ángulos, para distinguir trapecio isósceles y trapecio birrectángulo respectivamente. En esas subclases, en ocasiones la partición se comienza a desdibujar, o queda tan trivial como "el trapecio es birrectángulo o no lo es". Pero ya no es compatible, si lo queremos pensar como una partición, con la de "el trapecio es isósceles o no lo es". El cruzamiento de tantos criterios a la vez hace que las propiedades de partición ya no sean tan explícitas. Tercer problema, reconocido a partir de reflexiones en torno a la vinculación de la teoría en Enseñanza de la Geometría con nuestras prácticas docentes: los estudiantes conocen una única manera de clasificar los cuadriláteros y en dicha clasificación interviene más de un criterio de clasificación.

Fundamentación de una propuesta de actividades

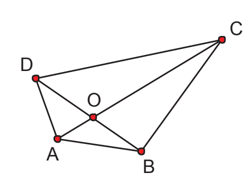
Haciendo una revisión de los libros de texto usados en nuestro país, tanto en enseñanza primaria como media, constatamos que hay una compatibilidad entre estos y los conocimientos de los cuadriláteros expresados por los estudiantes que ingresan al profesorado. Una característica común a los textos revisados es que privilegian explicitar las definiciones así como enunciar y demostrar las propiedades (Dalcín y Molfino, 2013b).

Nos propusimos revertir los tres problemas detectados en las concepciones sobre los cuadriláteros que manejan los estudiantes y diseñamos para ello una serie de actividades incluidas en el libro *Geometría Euclidiana en la formación de profesores* (Dalcín y Molfino, 2013a) que permitieran a los estudiantes: i) concebir y construir nuevos cuadriláteros, o fundamentar la imposibilidad de su existencia; ii) elaborar nuevas definiciones y analizar su equivalencia; iii) hacer clasificaciones de los cuadriláteros distintas a las que aparecen en los libros de texto y conocidas por ellos. Todas estas actividades proponen una alternativa al tratamiento que se da de estos temas en los textos, es decir, buscan involucrar a los estudiantes en los procesos de definición, construcción, formulación de conjeturas y su demostración en el ámbito de los cuadriláteros en vez de explicitar definiciones y demostrar propiedades. Las actividades buscan enseñar a definir más que enseñar definiciones, involucrar a los estudiantes en hacer construcciones, formular conjeturas y elaborar pruebas más que enseñar propiedades y sus demostraciones, y estudiar diferentes clasificaciones según criterios previamente establecidos, así como el cruzamiento entre dos o más de ellas.

Estas actividades fueron pensadas tomando en cuenta que el trabajo en Geometría puede hacerse desde diferentes paradigmas, propuestos por Houdement y Kuzniak (1999) y Kuzniak (2006), denominados Geometría I, II y III. La Geometría I se corresponde con la *geometría natural*: La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos. La Geometría II se corresponde con la *geometría axiomática natural*: La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad. Por último, la Geometría III se refiere a la *geometría axiomática formalista*: Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible o en lo real. En particular, las actividades fueron pensadas para el trabajo de los estudiantes en los dos primeros paradigmas: en instancias de descubrimiento, construcción y formulación de conjeturas se desarrolla sobre todo la Geometría I, en instancias de demostración y sistematización, principalmente la Geometría II.

Este reporte: un diseño de actividades

Desde 2005 a la fecha hemos diseñado-puesto en práctica-rediseñado actividades que apuntan a lo señalado previamente y lo hemos ido consignando en distintas ocasiones. Esta forma de trabajo nos ha llevado a cuestionarnos la definición misma de cuadrilátero (Dalcín y Molfino, 2013b), lo que nos condujo a la consideración de cuadriláteros convexos, no convexos simples y no convexos "cruzados". Sin embargo, dado el estado actual del desarrollo de nuestra investigación nos restringiremos a los cuadriláteros convexos. En este reporte damos cuenta del último rediseño, puesto en práctica en el curso de Geometría 2013, de primer año en la carrera de Profesorado de Matemática en Uruguay. Los estudiantes cuentan con computadoras con

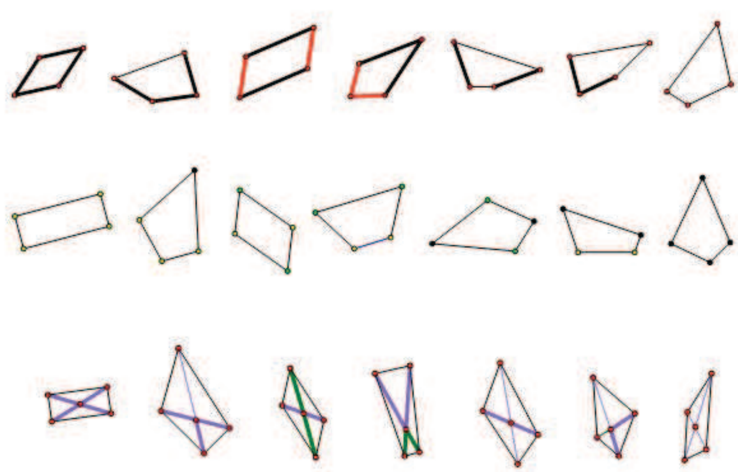


el software GeoGebra instalado para trabajar en clase, que utilizan además de figuras realizadas en papel. Consideramos como elementos del cuadrilátero a tener en cuenta: lados, ángulos y segmentos de diagonales.

Una primera serie de actividades consiste en realizar una clasificación de los cuadriláteros tomando como criterio de clasificación exclusivamente la cantidad de i) lados iguales, ii) ángulos iguales, iii) segmentos de diagonales iguales.

Las clases que surgen son: cuatro lados iguales, solo tres lados iguales, dos pares de lados iguales (pero diferentes entre sí), sólo un par de lados iguales, sin lados iguales. Considerando las clases dos pares de lados iguales y sólo un par de lados iguales, vemos que se puede hacer una distinción según si los lados son opuestos o consecutivos (agregando al criterio de igualdad el de posición de los lados en el cuadrilátero), llevando así a siete las clases posibles. Siete clases análogas se presentan para las clasificaciones ii) y iii). Puntualicemos que cada clase es disjunta con las restantes, y así las consideraremos en el resto del reporte.

Una segunda serie de actividades consiste en construir cuadriláteros para cada una de las siete clases de las clasificaciones según i) lados, ii) ángulos, iii) segmentos de diagonales.



Una tercera serie de actividades consiste en formular conjeturas acerca de los elementos del cuadrilátero no considerados en la construcción bajo cada clasificación, y demostrarlas. Por ejemplo, si la clasificación tuvo como criterio la igualdad y posición de los lados, se pide formular conjeturas referidas a la igualdad y posición de ángulos o a la igualdad y posición de los segmentos de diagonales, y demostrarlas. Veamos algunos ejemplos:

❖Si un cuadrilátero tiene cuatro lados iguales, necesariamente tiene dos pares de ángulos opuestos iguales (que pueden o no ser iguales entre sí) y dos pares de segmentos de diagonales iguales (que pueden o no ser iguales entre sí).

❖Si un cuadrilátero tiene dos pares de ángulos opuestos iguales, necesariamente tiene dos pares de lados opuestos iguales y dos pares de segmentos de diagonales opuestos iguales.

❖Si un cuadrilátero tiene dos pares de segmentos de diagonales consecutivos iguales, necesariamente tiene un par de lados opuestos iguales y dos pares de ángulos consecutivos iguales.

Para la demostración de estas propiedades los estudiantes cuentan con axiomas tratados en instancias anteriores del curso: las relaciones entre ángulos entre paralelas, derivadas del axioma de Euclides (ángulos alternos internos, correspondientes, etc.) y los cuatro criterios de congruencia de triángulos (Dalcín y Molfino, 2013a).

Una cuarta serie de actividades consiste en construir (si existen), o fundamentar que no existen, cuadriláteros que cumplan simultáneamente condiciones referidas a la cantidad de: i) lados iguales y ángulos iguales, ii) ángulos iguales y segmentos de diagonales iguales, iii) lados iguales y segmentos de iguales.

Proponemos para la sistematización de esta actividad, la consideración de tablas de doble entrada considerando de a dos los tres elementos de partida: lados, ángulos y segmentos de diagonales. Estas tres son tablas con 49 casilleros cada una, o sea con 49 cuadriláteros para construir o fundamentar su inexistencia

Consideremos la tabla de doble entrada de lados y ángulos.

Tener en cuenta las actividades previas puede simplificar la tarea: ya se concluyó que todo cuadrilátero con cuatro lados iguales necesariamente tiene dos pares de ángulos opuestos iguales o cuatro ángulos iguales. De esa manera, al considerar la columna correspondiente a cuatro lados iguales se puede concluir que no es posible construir cuadriláteros con solo tres lados iguales, ni con dos pares de ángulos consecutivos iguales, ni con un solo par de ángulos consecutivos iguales, ni con un solo par de ángulos opuestos iguales, ni sin ángulos iguales.

Cantidad y posición de los ÁNGULOS iguales como criterio					
Sólo 3 iguales	2 pares opuestos iguales y diferentes entre sí	2 pares consecutivos iguales y diferentes entre sí	Sólo 1 par opuestos iguales	Sólo 1 par consecutivos iguales	Sin ángulos iguales

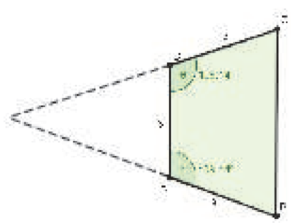
Un argumento análogo al anterior puede considerarse para la fila de cuatro ángulos iguales, habiendo analizado previamente qué implicancia tiene sobre la cantidad de lados iguales.

Los resultados obtenidos en actividades anteriores y la dualidad vista para la columna de cuatro lados iguales y para la fila de cuatro ángulos iguales puede ser tenida en cuenta para la columna (fila) de dos pares de lados (ángulos) opuestos iguales y para la columna (fila) de dos pares de lados-(ángulos) consecutivos iguales. Esto reduce sensiblemente el trabajo a hacer sobre el cuadro y genera una interrogante acerca de la dualidad del cuadro cuando se intercambian lados y ángulos: ¿es simétrica la tabla respecto de su diagonal? ¿Si consideramos las demostraciones, se puede establecer alguna dualidad?

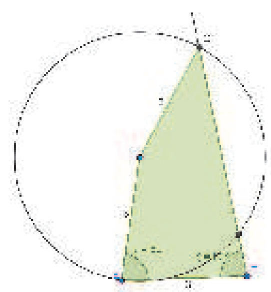
Respecto a dualidades

Analicemos por ejemplo los dos casilleros duales "sólo tres lados iguales y sólo un par de ángulos consecutivos iguales", por una parte, y "sólo un par de lados consecutivos iguales y sólo tres ángulos iguales", por otra.

En el primer casillero se pueden considerar tres situaciones diferentes:



Caso 1: Los ángulos iguales están comprendidos entre lados iguales.



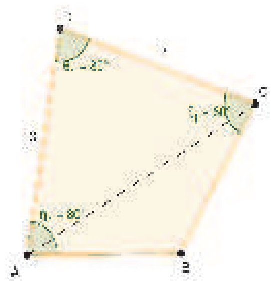
Caso 2: Uno de los ángulos iguales está comprendido entre lados iguales y el otro es adyacente al desigual.

Caso 3: Los ángulos iguales son adyacentes al lado desigual.

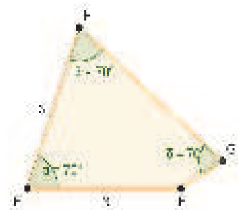
Tanto en el caso 1 como en el 3, se puede comprobar, utilizando el hecho de que un triángulo es isósceles sí y sólo si es isoángulo, que no existen cuadriláteros que cumplan lo pedido en el casillero. En ambos casos quedan necesariamente los otros dos ángulos también iguales, por lo que pasarían a ser ejemplos para el casillero "cuadrilátero con sólo tres lados iguales y dos pares de ángulos consecutivos iguales".

Sin embargo, el caso 2 se diferencia de los anteriores: para esa situación sí pueden encontrarse ejemplos. Si bien existen restricciones para que el cuadrilátero exista (los ángulos iguales tienen que medir entre 60° y 90°), en la figura se muestra la construcción de uno (EFGH) y puede apreciarse que el cuadrilátero EFIH también cumple las condiciones exigidas.

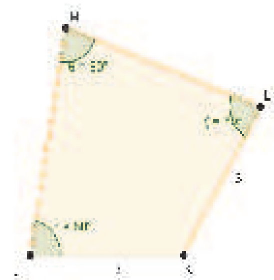
Cuando pensamos en el casillero dual (sólo tres ángulos iguales y sólo un par de lados consecutivos iguales), vuelven a presentarse tres casos según la posición de los lados iguales respecto a los ángulos iguales.



Caso 1: Los lados iguales son adyacentes a los ángulos iguales.



Caso 2: Uno de los lados iguales está comprendido entre ángulos iguales y el otro es adyacente al desigual.



Caso 3: Los lados iguales comprenden al ángulo desigual.

Invitamos al lector a comprobar que nuevamente dos de los casos generan situaciones imposibles, pero sí existen ejemplos para uno de ellos, cuando uno de los lados iguales tiene como adyacente a uno de los ángulos iguales pero su otro ángulo adyacente es el desigual. En los otros casos, se genera un cuadrilátero que tiene necesariamente dos pares de lados consecutivos iguales, lo que nos deja fuera del casillero.

Reflexiones finales

A partir de nuestra práctica docente, y contrastando lo experimentado con consideraciones teóricas (Houdement y Kuzniak, 1999; Kuzniak, 2006), hemos reportado la presencia de tres problemas en lo que respecta a la construcción de conocimiento relativo a los cuadriláteros: los estudiantes conocen pocas familias de cuadriláteros, las definiciones que presentan no son minimales, en un mismo grupo hay una amplia diversidad de definiciones para un mismo cuadrilátero, y el único criterio de clasificación que conocen es el del paralelismo de los lados, al que subordinan la igualdad de lados o de ángulos, a semejanza de como aparecen en algunos libros de texto.

Frente a esta problemática, hemos desarrollado una secuencia de actividades con el fin de abordar esos problemas. Consideramos que para hacerles frente, es necesario desestructurar la enseñanza tradicional del tema, en la que se dan una cantidad reducida de familias, sus definiciones, y a partir de ellas los estudiantes deben demostrar propiedades previamente enunciadas en un libro o por el profesor.

Con las actividades que proponemos, los estudiantes -futuros profesores- se ven enfrentados a las tareas de clasificar utilizando criterios establecidos por el profesor o por ellos mismos; definir, teniendo en cuenta las clases derivadas de esas clasificaciones, y demostrar propiedades que surgen como cuestionamientos intrínsecos de la actividad propuesta al intentar cruzar dos de los criterios de clasificación; construir o fundamentar la inexistencia de cuadriláteros.

Consideramos que este tipo de actividades representa una posibilidad de desarrollo para los futuros profesores en dos sentidos: por un lado posibilita la consideración de nuevos contenidos que amplían y reubican los conocimientos con los que ingresan los estudiantes al profesorado de matemática, por otro, la construcción del conocimiento en las clases se hace de una manera acorde a como se espera que el estudiante se desempeñe en su futura tarea como profesor de enseñanza media.

Referencias bibliográficas

Dalcín, M. (2006). La definición y clasificación de cuadriláteros en los libros de texto de ayer y de hoy. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19 (ALME 19)*, pp. 472-477.

Dalcín, M. y Molfino, V. (2011a). Clasificación particional de cuadriláteros como fuente de demostraciones y construcciones en la formación inicial de profesores. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 1(1).

Dalcín, M. y Molfino, V. (2012). Una propuesta para el trabajo en Geometría en la formación inicial de profesores de matemática. *Unión*, 30 (Junio), pp.171-185.

Dalcín, M. y Molfino, V. (2013a). *Geometría Euclidiana en la formación de profesores*. Montevideo: Ediciones Palíndromo.

Dalcín, M. y Molfino, V. (2013b). ¿De qué hablamos cuando hablamos de polígono? *Actas del Congreso Iberoamericano de Educación Matemática 7 (CIBEM 7).* Disponible en http://www.cibem.org/home.php

Disponible en http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8841.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Geometríe et paradigmenes geometriques. *Petit x*, 51, 5-21.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail geometriques. Elements d'un cadre theorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en geometrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 6 (2), 167–187.