ESTUDIO EXPLORATORIO ACERCA DE LAS DIFICULTADES QUE MUESTRAN ALUMNOS DE BACHILLERATO PARA TRANSITAR DE UN RAZONAMIENTO INDUCTIVO A UNO DEDUCTIVO

Jesús Salinas Herrera y Salvador Moreno Guzmán
CCH Plantel Vallejo, UNAM. (México), CCH Plantel Naucalpan, UNAM. México
jes54@unam.mx, salvador.cchnauc@gmail.com

Resumen. Se replica un experimento de enseñanza considerando la dimensión histórica de las matemáticas, en el cual se considera la aritmética pitagórica para explorar las dificultades que tienen los alumnos de segundo semestre de bachillerato para transitar de un razonamiento inductivo a un razonamiento deductivo. Se muestran los resultados de este experimento y la manera en que el profesor-investigador gestiona dicho experimento para propiciar que los estudiantes realicen dicha tarea

Palabras clave: números poligonales, razonamiento inductivo y deductivo

Abstract. It replicates a teaching experiment considering the historical dimension of mathematics, which is considered the Pythagorean arithmetic to explore the difficulties of students in the second semester of high school to move from inductive reasoning to deductive reasoning. It shows the results of this experiment and how the teacher-researcher managed the experiment to encourage students to perform this task

Key words: polygonal numbers, inductive and deductive reasoning

Introducción

En este estudio se replicó un experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000) considerando la histórica de las matemáticas como recurso didáctico (Salinas, 2010), y se enriqueció dicho experimento en su contenido y gestión. El enfoque histórico (Fauvel, 1991) se tomó con una doble función: para mostrar un rostro humano de las matemáticas, considerando su papel en la cultura (Bishop, 1995) y, utilizar los diagramas de los números poligonales como instrumentos psicológicos (Vygotsky, 1995; Kozulin, 2000; Wertsch, 1988) para el desarrollo del pensamiento deductivo a través de la aritmética pitagórica.

En el experimento anterior (Salinas y Maz Machado, 2012), se observaron diversas dificultades que tienen alumnos de matemáticas, de primer año del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, para demostrar un teorema de la aritmética pitagórica. No obstante, que mostraron avances en la identificación de los patrones numéricos y geométricos de los números poligonales, no pudieron transitar de un razonamiento inductivo a un razonamiento deductivo para efectuar dicha demostración. En el trabajo que aquí se presenta se replicó dicho experimento de enseñanza, y se enriqueció su contenido y la manera de gestionarlo, para avanzar en alcanzar dicha meta.

Problema de Investigación

Enfocamos nuestra atención fundamentalmente en: analizar el tipo de dificultades que tienen alumnos de primer año de bachillerato para elaborar un razonamiento deductivo, a partir de la identificación de los patrones de los números poligonales, y observar si logran superar dichas dificultades con cierta orientación del profesor-investigador.

Marco teórico

En el diseño del experimento de enseñanza que se llevó a cabo se considera el dominio histórico, social y cultural del desarrollo de las matemáticas (Fauvel, 1991, Bishop, 1999). De esta manera, se aborda el conocimiento matemático como parte de la cultura que produce una sociedad en determinado momento histórico (Rico, 1998). Paralelamente, seguimos la perspectiva teórica de Vygotsky (2009). Así, utilizamos los diagramas pitagóricos como signos externos de la teoría numérica, y de esta manera, usamos dichos diagramas como instrumentos psicológicos, instrumentos de mediación semiótica (Kozulin, 2000), para propiciar el desarrollo de un pensamiento deductivo en los alumnos.

De acuerdo con lo anterior, consideramos el aprendizaje de los estudiantes como un proceso de apropiación de los métodos de acción y de representación de una cultura dada (Radford, 1997). En dicha apropiación, consideramos que los instrumentos psicológicos o simbólicos desempeñan una función esencial en el desarrollo cognitivo (Wertsch, 1988).

Metodología

Se llevó a cabo una secuencia didáctica con una duración de 10 horas. Las actividades se realizaron en parejas de estudiantes, constituidas por ellos mismos.

La población observada fue un grupo de 24 alumnos de segundo semestre de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, durante las actividades escolares de un curso ordinario. Participaron 10 hombres y 14 mujeres con edades entre 15 y 17 años.

Se resolvieron problemas adaptados de la aritmética pitagórica. Se llevó a cabo un análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes.

Procedimiento

En la secuencia didáctica los alumnos realizaron diversas actividades. La duración fue de 10 horas. En la apertura de la secuencia, en dos sesiones de una hora y media cada una, el profesor-investigador describió y explicó a los estudiantes algunas ideas centrales del pensamiento numérico de los pitagóricos, en el marco de su contexto cultural. En el desarrollo de la secuencia, en 3 sesiones, con una duración de hora y media cada una, los estudiantes, debían observar e interpretar los patrones aritméticos y geométricos que se representan en una tabla donde se dibujan los primeros cinco números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales, respectivamente. Después, debían demostrar un teorema adaptado de la aritmética pitagórica. Finalmente, en el cierre de la secuencia, dos sesiones de una hora, los alumnos debían probar, con cierta orientación del profesor-investigador, dos teoremas más de la aritmética pitagórica.

Análisis de los contenidos matemáticos implicados en las actividades

Los números poligonales se forman por puntos que describen polígonos regulares (Fig. 1). Las figuras geométricas que construyeron los pitagóricos con los números poligonales, proporcionan una evidencia visual de numerosas propiedades de los números naturales. De esta manera, estos diagramas han mostrado ser heurísticamente ricos, por ejemplo, para establecer relaciones entre propiedades de órdenes consecutivos de números de un determinado tipo, así como relaciones entre números poligonales de tipos diferentes. Todas estas propiedades y relaciones se obtienen de simples comprobaciones aritméticas. Sin embargo, su prueba requiere de un simbolismo algebraico.

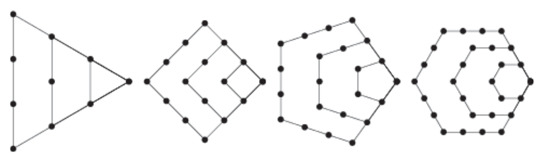

Figura 1. Primeros cuatro números poligonales

Los diagramas anteriores, Fig. 1, ilustran gráficamente el proceso mediante el cual los números poligonales se construyen. La regla para formar un número triangular es agregar, a cada triangulo de lado n, un lado con n+1 puntos, así obtenemos 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... que resultan de la serie 1+2+3+4+5+6 ... Por lo tanto, el n-ésimo número triangular está dado por $T(n) = [n \cdot (n+1)]/ 2$

La misma observación de las figuras señala que $T(n) = T(n-1)+n$, donde $T(1) = 1$, lo cual proporciona una definición recursiva de números triangulares que permite obtener cada uno de ellos en términos del número anterior. Similarmente, los diagramas ilustran como construir los demás números poligonales a partir de los números triangulares. Por ejemplo, es posible observar que todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.

$1+3=4$

$3+6=9$

$6+10=16$,

Es decir, $C(n)= T(n)+T(n-1)$ (*Teorema de Teón de Esmirna* (González Urbaneja, 2009)

$C(n)= [n\cdot(n+1)]/2 + [(n-1)\cdot n]/2 = n^2$

Además, podemos observar cual es la regla recursiva para la construcción de los números cuadrados $C(n) = n^2$.

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

$1+3+5+7+9=5^2$, En general, $C(n)= C(n-1) + (2n-1)$, $C(1)=1$. Esto además pone de manifiesto la relación entre los números cuadrados con los números impares.

Instrumentos de observación

De los instrumentos de observación que se aplicaron en el experimento de enseñanza nos centraremos sólo en el cierre de la secuencia didáctica, en la cual los alumnos debían demostrar algunos teoremas adaptados de la aritmética pitagórica. Los datos que aquí se reportan fueron tomados de las hojas de actividades realizadas en el salón de clase. Tales datos fueron expresados en forma de textos y se realizó un análisis cualitativo de ellos.

La primera de dichas actividades fue la siguiente:

1. Demostrar que todo número cuadrado es igual a la suma de dos números triangulares sucesivos

Partimos de observar que hacen los estudiantes al pedirles demostrar este teorema. Como parte de la gestión del experimento, una vez que llevaron a cabo esta actividad, el profesor-investigador comentó con el grupo los errores y explicó que la demostración de un enunciado universal requiere de la utilización de una simbolización algebraica que contemple el aspecto general del problema. Se proporcionó a los alumnos las expresiones algebraicas para los números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales; y se ejemplifico como hallar dichas expresiones algebraicas para los números triangulares y cuadrados. .

Posteriormente, se realizaron dos actividades más de demostración de otros dos teoremas de la aritmética pitagórica. La primera de estas dos actividades fue:

2. De acuerdo a los diagramas de los números poligonales pitagóricos, observa si se cumple que todo número pentagonal se compone de un número triangular del mismo orden más otros dos de orden previo. Si consideran que se cumple esta situación, demuestra que ese enunciado es verdadero.

Después de la realización, por parte de los alumnos, de esta actividad, el profesor volvió a explicar los aspectos que se deben tener en cuenta, e hizo énfasis en distinguir el carácter universal del enunciado en cuestión, asociado con su representación algebraica, de los casos particulares expresados aritméticamente.

Una vez hecho lo anterior, se les pidió realizar la siguiente actividad:

2. Observa si se cumple que todo número hexagonal se compone de un número triangular del mismo orden y otros 3 de orden previo y demuestra que dicho enunciado es verdadero.

Resultados y discusión

Actividad 1: Demostrar que todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.

En esta actividad los alumnos manifiestan fundamentalmente habilidad para la representación aritmética y sólo algunos manejan una representación geométrica de los números poligonales (triangulares y cuadrados). Sin embargo, en sus respuestas, para probar el enunciado general, todos los alumnos solo responden poniendo ejemplos en los que se cumple el enunciado en cuestión.

Actividad 2: De acuerdo a los diagramas de los números poligonales pitagóricos, observa si se cumple que todo número pentagonal se compone de un número triangular del mismo orden más otros dos de orden previo. Si consideran que se cumple esta situación, demuestra que ese enunciado es verdadero.

Dos parejas de alumnos utilizaron adecuadamente la información y la orientación dada por el profesor-investigador para realizar correctamente la actividad. Distinguen los casos particulares del caso general. Plantean correctamente el enunciado en términos algebraicos y desarrollan correctamente el procedimiento algebraico para demostrar que el enunciado es verdadero.

Sin embargo, la mayor parte, seis parejas de alumnos, sigue proponiendo casos particulares para justificar la verdad del enunciado. Y, otros alumnos pretenden demostrar el enunciado mediante la sustitución de un valor particular en la “fórmula general”, como se muestra en la Fig. 3. Aquí, confunden comprobación con demostración.

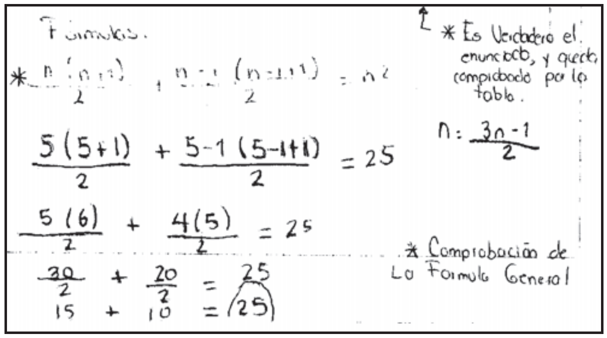

Figura 3.

Actividad 3: Observar y mostrar que todo número hexagonal se compone de un número triangular del mismo orden y otros tres de orden previo y demostrar que dicho enunciado es verdadero.

Las respuestas a esta última actividad reflejan un avance cualitativo y cuantitativo muy importante en los alumnos. Más de la mitad de ellos, ocho parejas, responden correctamente a esta actividad. Ver Fig. 4. Otras tres parejas plantean bien el problema pero comenten errores en el desarrollo algebraico.

Así pues, se observa, análogamente al experimento de enseñanza anterior, que desde las primeras actividades de la secuencia didáctica, un número importante de alumnos reconocen el patrón geométrico y aritmético que se encuentra en la fig. 1, y la conversión (Duval, 1999), es decir, el pasaje de un registro de representación a otro se da de manera espontánea sin intervención del profesor-investigador. Los alumnos vinculan ambos patrones de representación y dan continuidad a las secuencias de números representados. Esta situación les permite realizar tareas donde trabajan con sucesiones y series de números y relaciones entre ellas, es decir hay un desarrollo en el tratamiento del registro de representación aritmético (Duval, 1999). Así, podemos afirmar que sin instrucción explicita los alumnos desarrollan un proceso de interiorización de los patrones de los números poligonales.

En su primer intento de probar un teorema de la aritmética pitagórica los alumnos reconocen el cumplimiento de ciertas relaciones entre diferentes tipos de números poligonales. Pueden identificar el cumplimiento de dichas relaciones para casos particulares, pero no son capaces de justificar su cumplimiento general. En esta fase siguen utilizando fundamentalmente un razonamiento inductivo para tratar de mostrar el carácter general de las propiedades y relaciones entre los números poligonales. Las estrategias que utilizan son fundamentalmente dos: indicar algún ejemplo o sugerir un procedimiento recursivo.

Sobre esta base, en el cierre de la secuencia didáctica, se observa que los alumnos tienen un obstáculo que requiere ayuda para involucrarse en otros procesos de desarrollo cognitivo. Así, a través de la mediación del profesor-investigador y la interacción que se produce entre los alumnos y los alumnos y el profesor-investigador en la realización de las actividades, se propicia una negociación de significados que les permite a los alumnos distinguir, gradualmente, el aspecto particular de los ejemplos del carácter general de una demostración. De esta manera, prácticamente todos los alumnos avanzan en la demostración del tercero de los teorema de la aritmética pitagórica que se les proponen.

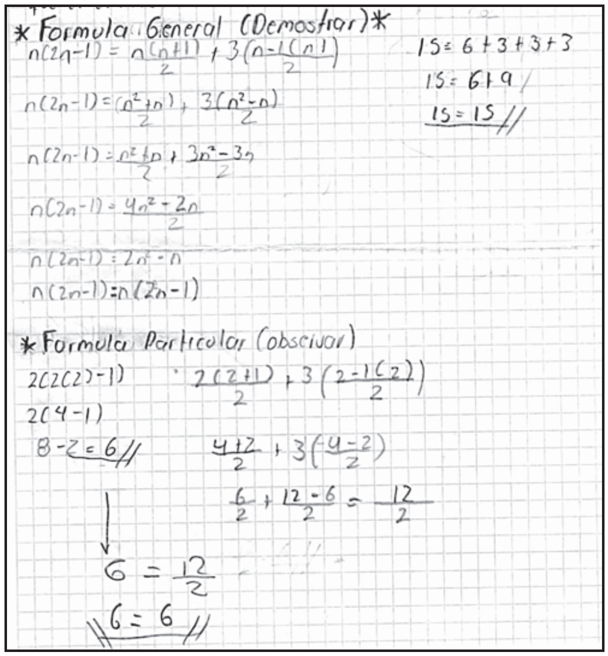

Figura 4

Conclusiones

En este experimento de enseñanza, la dificultad fundamental que muestran alumnos de bachillerato para transitar de un razonamiento inductivo a uno deductivo, es comprender la diferencia entre el caso particular de los ejemplos y el aspecto general de la demostración.

Los alumnos van interiorizando gradualmente los patrones aritméticos y geométricos de los números poligonales, y en las diferentes actividades que realizan se basan en un razonamiento inductivo. Este tipo de razonamiento es la estrategia central que utilizan para identificar los patrones y generalizar, sin embargo, cuando se trata de probar un resultado general no logran desvincularse del mismo tipo de razonamiento y se restringen sólo a mostrar el cumplimiento de casos particulares. Así, implícita o explícitamente, confunden la demostración con una comprobación de casos.

La distinción de los casos particulares y el general, en una demostración, es algo que los estudiantes no logran asimilar espontáneamente y requiere la intervención del profesor-investigador para negociar el significado del simbolismo algebraico y comprender la necesidad de su uso en la realización de esta tarea. Así, la mayor parte de los alumnos avanzan en elaborar un razonamiento deductivo. .

Referencias bibliográficas

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultura*. Barcelona, España: Paidos.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For de learning of mathematics*. 11 (2), 13-16.

González Urbaneja, P. M., (2009). *Pitágoras. El filósofo del número.* Madrid: Nivola libros y ediciones.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos Psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Radford, L. (1997). L`invention d`une idée mathematique: la deuxieme inconnue en algebra. *Repères, Revue des IREMs* 28 (july), 81-96

Rico, L. (1998). Conocimiento numérico y formación del profesorado. *Revista de la Universidad de Granada*. Vol. 11. Granada: Universidad de Granada.

Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* Lleida: SEIEM. pp. 557-568.

Salinas, J. y Maz-Machado, A. (2012). Una aproximación a la prueba a través de la aritmética. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 25, pp. 283-290*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Steffe, L. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Nelly y R. A. Lesh (Eds). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Vygotsky, L. S. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente.* Barcelona: Paidos.