CONFRONTACIÓN DE MODELOS DE ENSEÑANZA EN LA TRANSICIÓN DE LA SUMA ARITMÉTICA A LA SUMA ALGEBRAICA

Andrea Aurora Pérez Esguerra, Eugenio Filloy Yagüe, Aurora Gallardo Cabello
DME, CINVESTAV – IPN México
aaperez@cinvestav.mx; efilloy@cinvestav.mx; agallardo@cinvestav.mx

Resumen. En este trabajo realizamos una confrontación de tres diferentes modelos de enseñanza, durante la transición de la suma aritmética a la suma algebraica, en alumnos de primero de secundaria. Se utilizaron el modelo de enseñanza sintáctico, el modelo continuo de la recta numérica contextualizada y un modelo discreto consistente en una actividad lúdica denominado "la cucaracha". Los resultados obtenidos muestran las tendencias cognitivas presentadas en cada modelo, por los alumnos del estudio.

Palabras clave: modelos, enseñanza, transición, suma algebraica

Abstract. In this work we perform a comparison of three different models of teaching, during the transition from arithmetic to algebraic sum, in seventh grade students. We used the syntactic teaching model, continuous model number line contextualized and a discrete model consisting of a recreational activity called "la cucaracha". The results show cognitive trends presented in each model, students study.

Key words: models, teaching, algebraic sum, transition

Diversos investigadores como Glaeser (1981) y Gallardo (2002) entre otros, han evidenciado la resistencia a la aceptación de soluciones con números negativos en ecuaciones y problemas, tanto en el ámbito histórico del desarrollo de la matemática como en estudiantes que se inician en el estudio del algebra simbólica (Gallardo, 2002). El objetivo de este estudio es identificar como transita un alumno de primero de secundaria de una suma aritmética a una algebraica. Las preguntas de investigación son: ¿identifican y operan correctamente los elementos necesarios para realizar una suma aritmética? ¿Qué procesos cognitivos se desencadenan para transitar de la suma aritmética a la algebraica?

Marco teórico-metodológico

Dentro de los Modelos Teóricos Locales (Filloy, 1999), una perspectiva semiótica para la observación experimental en Matemática Educativa, se señala la existencia de tendencias debido a las estructuras cognitivas del sujeto que aparecen en cada estadio del desarrollo individual, que da preferencia a distintos mecanismos de proceder, diferentes maneras de codificar y descodificar los mensajes matemáticos pertinentes al estadio en cuestión. Se sugiere la existencia de una etapa pre – operacional en la que se presentan obstrucciones, que generan después errores naturales de sintaxis como: uso inadecuado de los signos de igualdad, ausencia de éstos, olvido de algunos términos, etc.

Estas tendencias (TC) son "hechos" que siempre se presentan cuando en una situación de enseñanza se está tratando de pasar de un estrato de un lenguaje de Sistema Matemático de Signos (SMS) más concreto a uno más abstracto. Las tendencias cognitivas identificadas por Filloy son once, en este estudio se identificaron: la TC2 la dotación de sentidos intermedios; la TC4 la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes; la TC7 la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución; la TC8 la presencia de mecanismos inhibitorios; y la TC10 la generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales en las actividades que realizaron los estudiantes en los modelos de enseñanza aplicados, especialmente la solución de ejercicios con presencia de soluciones negativas da lugar a obstrucciones de reglas sintácticas ya dominadas.

Respecto a la TC2, (Gallardo, 2002), identificó cuatro sentidos intermedios de los números negativos. Estos sentidos se designan e interpretan a continuación: *Número sustractivo:* la noción de número está subordinada a la magnitud. En la resta de dos cantidades $a - b$, siempre b será menor que a, donde a, b son números naturales, es decir, el signo menos sólo tiene carácter binario en el nivel de la operación de sustracción. Por ejemplo: 7 – 4 = 3. *Número signado:* Es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo menos. Surge la dualidad del signo: binario (signo de la operación de adición o sustracción) y unario (signo asociado al número natural). Por ejemplo: 6 + (– 8). *Número relativo:* Se hace presente cuando se concibe la idea de opuestos en situaciones discretas, y la idea de simetría en situaciones continúas. Por ejemplo: +4, – 4. *Número aislado:* Se acepta un número negativo como la solución de una operación, un problema o una ecuación. Por ejemplo: – 6.

En relación con los modelos de enseñanza, hay posiciones encontradas respecto al tipo de recursos didácticos a utilizar en el desarrollo curricular: una propone "modelar" en contextos más "concretos" o contextos familiares para el alumno, las nuevas operaciones, con el propósito de dotarlos de significados y tomando éste como punto de partida, construir los primeros elementos de sintaxis. Una posición opuesta es la que propone partir del nivel sintáctico y enseñar las reglas sintácticas, modelo tradicional en la enseñanza de la resolución de ecuaciones basado en el modelo sintáctico – viético (transposición de términos de un miembro a otro) para aplicarlas en la resolución de ecuaciones y problemas.

Los contrastes entre los dos modelos saltan a la vista: mientras que en el modelo concreto se pone énfasis en trabajar con una gran carga semántica en todos los signos y operaciones involucrados. En el modelo sintáctico, el énfasis se pone en la regla general utilizada para construir los hábitos que desencadenarán las operaciones.

El aprendizaje de la suma y la resta comienza en la etapa infantil de una manera informal, a través de situaciones cotidianas y está presente, con diferentes grados de abstracción, a lo largo de la escolaridad obligatoria, a medida que se introducen los sistemas numéricos. Bruno, sugiere el uso de la recta numérica como un modelo para las operaciones con números negativos, siempre que su uso se dote de significado concreto: "los estudiantes lograrían un uso más productivo de la recta numérica si ésta fuese considerada más como una representación contextualizada que como un modelo abstracto". (Bruno, 1994, p.47)

La enseñanza de los números negativos con alumnos de 12 o 13 años, supone la modificación de creencias fuertemente arraigadas construidas a lo largo de la enseñanza Primaria. Hay muchos alumnos que cometen errores al efectuar operaciones simples con números negativos.

En general, la operación más sencilla de efectuar es la suma y la más difícil es la resta, ya que la multiplicación y división suelen resultar más fáciles que la resta. Las respuestas erróneas son debidas a malas aplicaciones de las reglas. A veces los alumnos inventan reglas falsas que les pueden llevar a resultados correctos o incorrectos, según sean los signos de los números, es por ello, que les resulta complicado modificarlas. No debemos minimizar los errores de los alumnos, ya que son el reflejo de ciertas dificultades que producen los cambios en la introducción de los números negativos. Siguiendo la terminología de Socas (1997), podemos distinguir entre:

Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos

- Hay una nueva notación para los números positivos: +2 = 2.
- El signo menos tiene dos significados distintos, como signo del número y como operación de resta.
- Aparece una mayor complejidad sintáctica: paréntesis y signos.
- Se dan nuevas reglas para las operaciones.

Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

- Los números negativos tienen menos usos que los números positivos. Por ejemplo, con los números negativos no podemos establecer el cardinal de un conjunto.
- Se identifican las operaciones de suma y resta.
- Hay un cambio en el efecto de las operaciones: sumar (multiplicar) no siempre es aumentar, restar (dividir) no siempre es disminuir.

Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza

- La enseñanza basada sólo en las reglas que rigen la operatoria puede causar problema a muchos estudiantes que necesitan situaciones concretas en las que apoyarse.
- No se conecta con el conocimiento previo de los estudiantes sobre los números positivos.

Instrumentos y procedimiento

Esta etapa de la investigación consta de dos momentos. En el primero, de diagnóstico (Pérez Esguerra, 2012, p.265), a un grupo de 20 alumnos de primero de secundaria de entre 11 y 13 años, se aplicó un cuestionario donde resolvieron ejercicios como: “escribir el inverso de algunos números como: – (–9)…”

En un segundo momento, reportado en este escrito, localizaron números y realizaron operaciones del tipo: + (+27) – (+11) – (–15) =. Partiendo de un modelo de enseñanza sintáctico, se les propusieron tareas en el aula que partían de sumas de números naturales para llegar a sumas de números enteros. Estas tareas se fundamentan en Filloy y Rojano (2001). Con respecto al modelo sintáctico, la evidencia empírica señala que aparte de generarse semánticas privadas del sujeto que confieren significado a los términos propuestos por la regla general y a las operaciones involucradas, además, aparecen fenómenos de lectura de las situaciones propuestas, guiadas por los sentidos que se les han conferido a las reglas que han de desencadenarse para ejecutar la tarea sintáctica.

Un ejemplo de los ejercicios realizados en el modelo sintáctico es el siguiente:

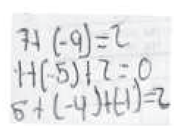


Ilustración 1. Ejemplo modelo sintáctico

Se aplicó también un modelo de enseñanza continuo, en el que los alumnos usaron la recta numérica contextualizada con ejercicios del tipo de temperaturas, deudas y ascensor, estos ejercicios se basaron en lo expresado por Bruno (1994). Las dificultades de estos problemas vienen determinadas por los siguientes aspectos: la estructura del problema; la posición de la incógnita; el contexto y los tipos de números (signos de los números). A continuación se ilustra este modelo, con un ejemplo:

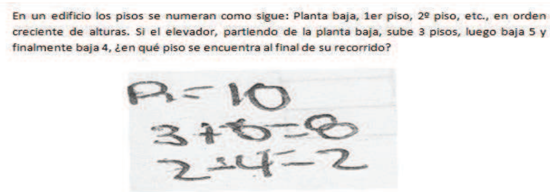

En un edificio los pisos se numeran como sigue: Planta baja, 1er piso, 2º piso, etc., en orden creciente de alturas. Si el elevador, partiendo de la planta baja, sube 3 pisos, luego baja 5 y finalmente baja 4, ¿en qué piso se encuentra al final de su recorrido?

Ilustración 2. Ejemplo modelo continuo

Además se empleó un modelo de enseñanza discreto que consistió en la aplicación de la actividad lúdica denominada "La cucaracha", consistente en avanzar o retroceder casillas (Waldegg, Villaseñor, García, & Montes, 2008, p.15). Este es un juego de mesa en que participan de 2 a 5 jugadores o equipos. Se necesita un dado, un tablero de 10 X 10 (Ilustración 3) con una leyenda de "SALIDA" donde comienza el juego y otra de "META" que indica el fin del mismo; en cada casilla se encuentran factores como x (+ 6), x (– 4), y divisores como: ÷ (+1), ÷ (– 1), etc., acompañados de una etiqueta con un número colocado en el extremo superior izquierdo y una ficha por cada jugador.

SALIDA

1 x (+6)	2 x (+7)	3 x (+5)	4 x (+5)	5 x (+4)	6 ÷ (+1)	7 x (–2)	8 ÷ (–1)	9 x (+3)	10 x (–1)
11 ÷ (–1)	12 x (–2)	13 ÷ (+1)	14 x (–2)	15 x (–1)	16 ÷ (–1)	17 x (+3)	18 x (–2)	19 ÷ (–1)	20 x (–1)
21 ÷ (–1)	22 x (–3)	23 ÷ (–1)	24 x (–3)	25 x (–2)	26 ÷ (–1)	27 ÷ (–1)	28 x (–4)	29 x (+3)	30 x (–2)
31 ÷ (–1)	32 x (–4)	33 x (+6)	34 x (+7)	35 ÷ (–1)	36 x (–2)	37 x (–3)	38 x (–1)	39 x (–4)	40 x (+5)
41 x (–6)	42 x (–4)	43 ÷ (–1)	44 x (+5)	45 x (–4)	46 x (–3)	47 x (–1)	48 ÷ (–1)	49 x (+3)	50 x (–2)
51 x (+6)	52 x (+9)	53 x (–5)	54 x (–3)	55 x (+5)	56 x (–2)	57 x (+8)	58 x (–1)	59 x (–4)	60 x (+7)
61 x (–2)	62 ÷ (–1)	63 x (–4)	64 x (–6)	65 x (–3)	66 x (+7)	67 x (–1)	68 x (+7)	69 x (–5)	70 ÷ (–1)
71 x (–5)	72 x (+8)	73 x (–3)	74 x (–1)	75 x (+4)	76 ÷ (–1)	77 x (–6)	78 x (–4)	79 x (–3)	80 x (–1)
81 x (–4)	82 ÷ (–1)	83 ÷ (–1)	84 x (–5)	85 ÷ (–1)	86 x (+4)	87 x (–4)	88 ÷ (–1)	89 x (–5)	90 x (–2)
91 x (–3)	92 x (–2)	93 x (–3)	94 x (–4)	95 x (+4)	96 ÷ (–1)	97 x (–2)	98 x (–5)	99 x (–3)	100 x (–4)

META

Ilustración 3. Tablero de actividad lúdica

Las instrucciones de la actividad lúdica denominado la cucaracha son:

1. En la primera jugada, cada jugador tira una vez el dado y avanza el número de casillas que indique la tirada.

2. En los siguientes turnos cada jugador tira el dado, al número que obtenga le aplica la operación indicada en la casilla en que se encuentre, y se mueve los lugares que indiquen los resultados obtenidos. Ahí espera nuevamente su turno.

3. Cuando el resultado es positivo, el jugador se mueve en el sentido en el que aumenta la numeración; si es negativo, cambiará el sentido del movimiento y se moverá en el sentido en el que disminuye la numeración.

4. Gana el jugador que primero llegue a la meta; el jugador que regresa a la salida vuelve a empezar el juego.

El objetivo de aplicar los modelos de enseñanza (sintáctico, continuo, discreto) permitió que los estudiantes hicieran uso de los sentidos intermedios de los números negativos: sustractivo, signado, relativo y aislado. Es importante señalar que en el modelo discreto, los números aislados se concentran en la salida, es decir, fuera del tablero y no aparecen en forma escrita.

Resultados

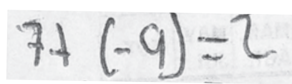
En la tabla que sigue, se realizó un comparativo de las respuestas dadas por los estudiantes en los ejercicios de los modelos de enseñanza empleados.

Modelos / respuestas	Sintáctico	Continuo	Discreto
Correctas	4 (cuatro)	13 (trece)	16 (dieciséis)
Incorrectas	14 (catorce)	6 (seis)	4 (dos)
No contestadas	2 (dos)	1 (una)	0 (cero)

Ilustración 4. Resultados comparativos por modelo de enseñanza

Como se observa en la tabla, en el modelo sintáctico, el 20% de los estudiantes contestaron correctamente los ejercicios que se les plantearon; al analizar las respuestas dadas, se encontró que identificaron los números sustractivo, signado y relativo (TC2), y se manifestaron las TC8 y TC10, al darse respuestas como las siguientes:

Ilustración 5. Ejemplo TC10



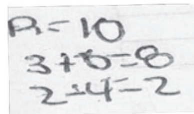
Se omitió signo negativo en respuesta.

Ilustración 5. Ejemplo TC8

Mecanismo inhibitorio.

Siguiendo con el desglose de la tabla comparativa, (Ilustración 4), encontramos que en el modelo continuo, el 65% advirtieron los cuatro sentidos intermedios de los números negativos, sin embargo, algunos de los estudiantes cometen errores relativos a la TC7.

Ilustración 6. Ejemplo TC7



Proceso erróneo de resolución

En el modelo discreto, el 80% solucionaron de forma correcta los ejercicios de este modelo, de acuerdo a la multicitada Ilustración 4, identificaron todos los sentidos y se presentó la TC4 y TC10. Un caso particular fue el de un equipo que se encontraba en la etiqueta 7 con el factor **x (–2)**, al lanzar el dado salió el número 6, que debía multiplicarse por el **x (–2)** señalado en la casilla, el resultado arrojaba **– 12** que debía sumarse al 7 de la casilla en la que se encontraban: **(–12) + 7 = – 5;** por lo que debieron regresar a la "SALIDA" para recomenzar el juego. Este modelo de enseñanza es principalmente oral pues los estudiantes verbalizan sus respuestas. A continuación se ilustra parte de la transcripción donde se presentaron las tendencias mencionadas en este modelo de enseñanza.

	Diálogo	***Observaciones***
J	Salió **6 más 3 nueve**	Se presentó la **TC10**, ya que generó un error sintáctico por la omisión de una operación, al intentar darle sentido a lo que tenía que realizar.
I	Espera un momento… recuerda que al seis que te salió debes aplicarle la operación correspondiente ¿qué acción indica la casilla?	
J	Estaba en 3, y dice: "Por más 5", entonces el seis que me salió por más cinco, **son 30, más 3… 36**, ¿entonces voy al 36?	
I	¿Seguro? 30 más 3 ¿son 36?	Se mostró también la **TC4**, que se refiere a la imposibilidad de realizar operaciones que se podían efectuar momentos antes, en este caso una suma.
J	Ah, no, 33… ¿entonces al 6 que me sale lo multiplico por más 5 y le sumo el tres de la casilla? Creo que ya entendí.	

Ilustración 7. Modelo Discreto

Con estos resultados, podemos concluir que en una combinación de los modelos aplicados, se logró que los alumnos lograran en diferentes medidas la transición de la suma aritmética a la algebraica, pues identificaron los elementos que son necesarios para realizar los diferentes tipos de sumas, lo cual responde a nuestra primera pregunta de investigación: ¿identifican y operan correctamente los elementos necesarios para realizar una suma aritmética?

También logramos identificar las tendencias cognitivas que se presentaron en la transición en cada modelo aplicado, con lo que se dio respuesta a nuestra pregunta: ¿Qué procesos cognitivos se desencadenan para transitar de la suma aritmética a la algebraica?

Referencias bibliográficas

Bruno, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma.* 18, 39-48

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Rojano, T. (2001). *Álgebra.* México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural negative number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171 – 192

Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifs. *Recherches en Didàctique des Mathèmatiques,* 2 (*3*), 303 – 346.

Pérez Esguerra, A. (2012). La transición de la suma aritmética a la suma algebraica en estudiantes de 1° de secundaria. En L. Montejano (Ed). *Congreso Nacional Sociedad Matemática Mexicana 45,* 265. México: Sociedad Matemática Mexicana.

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria. En L. Rico, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. Socas, (Eds), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, (pp. 125-154). Universidad de Barcelona: ICE/HORSORI.

Waldegg, G., Villaseñor, R., García, V., Montes, D., (2008). *Matemáticas 2. En contexto.* México: Esfinge.