

## PREFERENCIA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN EN EL CONCEPTO DE LÍMITE DE FUNCIONES DE ALUMNOS DE PRIMER AÑO DE INGENIERÍA

María Rosa Romiti, Natalia Sgreccia y Marta Caligaris

Universidad Tecnológica Nacional

Universidad Nacional de Rosario

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas

mromiti@arnet.com.ar, sgreccia@fceia.unr.edu.ar, mcaligaris@frsn.utn.edu.ar

Argentina

**Resumen.** Límite de funciones se ubica en la primera unidad de Análisis Matemático I, en la que los alumnos necesitan desenvolverse con distintos registros de representación semiótica y realizar conversiones entre ellos para obtener una mejor comprensión del concepto. No obstante, los docentes de primer año observan la preferencia que los alumnos manifiestan en ciertas actividades de tratamiento de registros en detrimento de otras. Ante esto se analiza la preferencia de los alumnos acerca de los registros de representación semiótica y los motivos de tal inclinación. Consecuentemente se formula una propuesta de enseñanza que contempla los diversos registros en forma equitativa.

**Palabras clave:** límite, registros de representación semiótica

**Abstract.** Limits is part of the first subject in Calculus courses in which students need to handle different registers of semiotic representation and to make conversions between them, to get a better understanding of the concept. However, teachers of a first course of Calculus observe students' preference for activities in determined registers rather than others. Considering this fact, the students' preference for different registers of semiotic representation and the reasons for such trends are analyzed. Consequently, a teaching proposal equally considering the diverse registers is formulated.

**Key words:** limits, registers of semiotic representations

### Introducción

El concepto de límite de funciones es relevante para plantear otros contenidos del Análisis Matemático I, como los del Cálculo Diferencial e Integral, que se apoyan en el mismo para su formalización y comprensión, incluso para otras ciencias, como Física. Dentro de la asignatura Análisis Matemático I, de las carreras de Ingeniería de la Facultad Regional San Nicolás, la unidad que comprende el concepto de límite de funciones es la primera en la que los alumnos se acercan a un contenido en el que necesitan gran manejo simbólico, abstracto y visual, para abordar definiciones, teoremas de la misma unidad y de las siguientes y utilizarlos en distintos registros de representación semiótica, tanto en actividades de tratamiento como de conversiones entre ellos, para obtener una mejor comprensión del concepto.

Sin embargo, los profesores de primer año observan la preferencia y mayor seguridad que los alumnos tienden a demostrar en ciertas actividades de tratamiento de registros de representación semiótica en detrimento de otras. Muchas veces tal preferencia está asociada, a su vez, con las de los docentes, y que plasman en sus propuestas de enseñanza (Hitt, 2003).

Una vez trabajadas las definiciones de límite ordinario y límites laterales, acompañadas de gráficas

mostrando las distintas situaciones que pueden presentarse, es notable la dificultad que a los estudiantes les trae graficar, buscar leyes que verifiquen determinadas condiciones impuestas sobre límite o la inseguridad que les provoca expresar en palabras el resultado de un límite.

Hacer que los alumnos lean y expliquen un texto donde prevalecen los símbolos matemáticos es más difícil y provoca mayor resistencia que solicitar que realicen cálculos de límites, aplicando algunas de las técnicas dadas. A éstos los resuelven por lo general de manera rutinaria sin detenerse a interpretar su resultado o significado.

Ante estas dificultades, y en el marco de la teoría de Duval (1999), se planteó como objetivo analizar la preferencia de los estudiantes acerca de los registros de representación semiótica y los motivos de tal inclinación.

### Marco teórico

Para esta investigación el referente esencial es Duval (1999), con el enfoque basado en los registros de representación semiótica, analizando su incidencia en los procesos de aprendizaje de Análisis Matemático I en la unidad de límite y continuidad de funciones, particularmente en el concepto de límite.

Los Registros de Representación Semiótica (Registros, en lo que sigue) son sistemas semióticos de representación que involucran tres actividades cognitivas. Estos sistemas deben:

- ❖ *Ser identificables*, es decir, constituir una marca o conjunto de marcas que sean reconocibles como una representación externa de alguna cosa en algún sistema determinado: un gráfico, un símbolo, una frase, entre otros.
- ❖ *Permitir su tratamiento*, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo sistema, de acuerdo a sus propias reglas que puedan ofrecer cierto plus de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
- ❖ *Permitir la conversión*, que consiste en transformar las representaciones producidas en un sistema de representación a otro. La coordinación o conversión entre sistemas se refiere a la vinculación de dos representaciones en distinto registro de un mismo objeto.

Los registros presentados para trabajar con los alumnos fueron tres: el gráfico, natural y simbólico.

*Registro gráfico*: contempla representaciones de funciones en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y bocetos informales que prescindan de un sistema de referencia. Está vinculado al concepto de visualización de Zimmermann (1990, citado en Hitt, 2003), quien afirma que conceptualmente el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del

Análisis Matemático que es difícil imaginar un curso exitoso de esta materia que no enfatice los elementos visuales del tema si se tiene la intención de promover un entendimiento conceptual.

*Registro natural:* se lo asocia a la lengua materna, primera lengua que una persona aprende y que se emplea como modo de expresión habitual en los diversos ámbitos de la vida corriente, para realizar descripciones, explicaciones, argumentaciones, deducciones, con el objetivo de comunicarse. Puede emplearse en forma oral o escrita, considerándose esta última en el presente trabajo.

*Registro simbólico:* la Matemática se apoya en un lenguaje simbólico formal, a veces denominado algebraico, que sigue una serie de convenciones propias. Los símbolos pueden considerarse objetos con valor propio y representan un concepto, una operación, una entidad matemática según ciertas reglas.

Los símbolos pueden involucrar una sola letra:  $x$ ,  $y$ , etc. o varias letras y números:

$$\text{sen } x, \log x, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \text{ etc.}$$

A su vez se considera el registro simbólico integrado por dos partes:

❖ *Simbólico de predominio procedimental:* aquel en el que el alumno deba aplicar, para resolver un problema planteado, estrategias sencillas o rutinarias, como ser:

-casos de factoro, por ejemplo calcular  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ .

-resultados de límites conocidos:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , entre otros.

-aplicaciones directas de propiedades relacionadas con el concepto (álgebra de los límites, composiciones de funciones, etc.).

❖ *Simbólico de predominio conceptual:* aquel en donde el alumno necesite conocer y manejar los símbolos matemáticos propios de las definiciones y propiedades de límite. En este tipo de actividades es necesario trabajar con mayor rigurosidad para entender la lógica de las definiciones y propiedades para poder resolverlo, si bien por lo general se aplican procedimientos algebraicos en busca de la solución. Se trata de una instancia en la que se involucra un pensamiento más formal, abstracto y comprensivo que la anterior.

Duval (1999) focaliza su estudio en el desarrollo de las actividades cognitivas que se requieren en el aprendizaje de la Matemática y que comprenden la utilización de sistemas de expresión o representación distintos del lenguaje natural, como ser el lenguaje simbólico o gráfico. Este aprendizaje además constituye un campo privilegiado para el desarrollo de actividades que

involucran la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos.

La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes”, en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza. La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema a otro. Esta operación puede describirse en primer lugar como un “cambio de forma” (Duval, 1999, p.27).

También sostiene el autor que el estudio del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos hallados, en torno al razonamiento, la comprensión de textos y la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, enfrenta tres fenómenos que se relacionan.

El primero es el de diversificación de registros de representación semiótica. Ya Piaget tuvo cuidado en señalar que el lenguaje natural no era el único sistema semiótico al que le correspondía esta función. El lenguaje natural, el simbólico, las figuras geométricas, los gráficos cartesianos o las tablas, no pueden considerarse como un único y mismo registro. Cada sistema es diferente y plantea preguntas específicas sobre el aprendizaje.

El segundo fenómeno es el de la diferenciación entre representante y representado o, al menos, entre forma y contenido de una representación semiótica. Una tal diferenciación no se adquiere de golpe, cualquiera sean el registro de representación y cualquiera sea el estadio de desarrollo.

El tercer fenómeno es el de la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica disponible.

Para los sujetos, una representación puede funcionar verdaderamente como tal, es decir, permitirles el acceso al objeto representado, sólo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto o de una situación y que “espontáneamente” puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo. Cuando estas dos condiciones no se cumplen, la representación y el objeto representado se confunden y no se pueden reconocer dos representaciones diferentes de un mismo objeto (Duval, 1999, pp.30-31).

## Metodología y desarrollo

De acuerdo a la problemática que se aborda y a los objetivos propuestos, se empleó el enfoque cualitativo, ya que se trabajó sobre las particularidades de la realidad, intentando ser lo más fiel en la interpretación de los hechos que se observaron. Refiriéndose a este enfoque, Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2003) afirman “Su propósito consiste en ‘reconstruir’ la realidad, tal y como la observan los actores de un sistema social previamente definido” (p.5). Dicha percepción de la realidad no es invariante, cambia de acuerdo a las observaciones y recolecciones de datos. Entre las metas de este tipo de enfoque se hallan describir, comprender e interpretar los fenómenos a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes.

Bravin y Pievi (2008) sostienen que para el campo educativo, en general, los métodos cualitativos suelen resultar los más apropiados.

Para realizar el trabajo de campo, se centró el estudio en las especialidades de Ingeniería Industrial (18 alumnos) e Ingeniería Electrónica (15 alumnos). Para la experiencia se consideró a aquellos estudiantes que realizaron la totalidad de los trabajos prácticos diseñados y que estaban cursando la asignatura por primera vez. Las edades de los mismos oscilaban entre los 18 y 20 años.

Para preservar el anonimato de los mismos, se los representó mediante un código alfanumérico: N1,..., N15 para los de la especialidad Electrónica y T1,..., T18 para los de Industrial.

Se construyó el objeto de la investigación, que es la preferencia de registros en el contenido límite de funciones así como los motivos de tal inclinación. Se coincide con Bravin et al. (2008) en que el objeto es siempre una construcción, encuadrada, en la medida en que se parte de la elección de una teoría aceptada como buena por la comunidad científica, en el campo disciplinar dentro del cual se trabaja.

Se diseñaron trabajos prácticos especialmente para este objeto. Se utilizó la técnica de recolección de datos de cuestionario abierto autoadministrado para obtener los indicadores concretos (Hernández Sampieri et al., 2003). Se les proporcionó directamente a los respondientes (los alumnos), quienes los contestaron sin intermediarios. Las cuestiones del mismo fueron abiertas y consistieron en consignas en donde se les solicitó alguna actividad a resolver relacionada con el tópico en estudio.

Para complementar la información brindada por los cuestionarios, se aplicó la técnica de observación participante de clases.

### **Instrumentos y resultados**

A continuación se presentan los instrumentos utilizados al aplicar la técnica de cuestionario en la

realización de la experiencia. Los mismos fueron planteados a partir de consignas en donde se les solicitó a los estudiantes resolver actividades. Por tener que elegir los alumnos, al simbólico se lo consideró desde lo procedimental -donde el alumno deba aplicar estrategias sencillas-, por sobre uno “conceptual” -donde se necesita conocer y manejar los símbolos matemáticos propios de las definiciones y propiedades de límite- (Romiti et al., 2012). Tal consideración se debió a que ésta es la forma predominantemente conocida por los estudiantes, al inicio de esta unidad, tanto en el concepto de límite finito para variable finita como en el de límites (finito o infinito) para variable infinita y límite infinito para variable finita.

A continuación se presentan las consignas de los dos trabajos prácticos empleados para la recolección de la información:

Trabajo práctico correspondiente al concepto de límite finito para variable finita

a) Elegir una de las siguientes opciones y realizar lo allí mencionado:

I. Justificar gráficamente el siguiente resultado  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 1$

II. Calcular  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 1$   $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

III. Formular con tus palabras la siguiente expresión:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 1$   $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 1$

b) Explicar brevemente los motivos de la elección anterior.

Trabajo práctico correspondiente al concepto de límites (finito o infinito) para variable infinita y límite infinito para la variable finita

a) Elegir una de las siguientes opciones y realizar lo allí mencionado:

I. Justificar gráficamente que no existe  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$

II. Calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-5}\right)^x$

III. Explicar con tus palabras por qué no existe  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} x$

b) Explicar brevemente los motivos de la elección anterior.

En la Tabla I se detalla la distribución de los alumnos según sus registros de preferencia correspondiente al concepto de límite finito para variable finita.

Tabla 1: Distribución de los alumnos según sus registros de preferencia

REGISTRO	ELECTRÓNICA (15 alumnos)	INDUSTRIAL (18 alumnos)
<b>GRÁFICO</b>	1 alumno	<b>0 alumno</b>
<b>SIMBÓLICO PROCEDIMENTAL</b>	14 alumnos	<b>13 alumnos</b>
<b>NATURAL</b>	<b>0 alumno</b>	<b>3 alumnos</b>

Los resultados fueron contundentes al mostrar que 13 alumnos (de un total de 18) de Industrial y 14 (sobre un total de 15) de Electrónica optaron por el registro simbólico con predominio procedimental. Este hallazgo se condice con la característica que al respecto presenta la propuesta de práctica de la asignatura existente al momento y con la que los estudiantes en cuestión se prepararon, ya que en la misma hay prácticamente un tratamiento exclusivo de dicho tipo de registro.

En cuanto a los motivos de tal inclinación, en ambas especialidades, indicaron que eligieron trabajar con este registro, porque: “me resultó más fácil o sencillo”, “era el más rápido para trabajar”, “lo sabía hacer”, “era el más corto y sabía a qué tenía que llegar”, “era lo último trabajado en la clase”, “era lo que tenía más claro” y “era en el que más confianza me tenía”. Cabe observar que el registro natural fue elegido por pocos alumnos en la especialidad Industrial, argumentando que les resultó el más sencillo, y en Electrónica ningún alumno lo eligió.

En la Tabla 2 se puede ver la distribución de los alumnos correspondiente al concepto de límites (finito o infinito) para variable infinita y límite infinito para la variable finita.

Tabla 2: Distribución de los alumnos según sus registros de preferencia

REGISTRO	ELECTRÓNICA (15 alumnos)	INDUSTRIAL (18 alumnos)
<b>GRÁFICO</b>	9 alumnos	<b>5 alumnos</b>
<b>SIMBÓLICO</b>	2 alumnos	<b>4 alumnos</b>
<b>NATURAL</b>	<b>4 alumnos</b>	<b>6 alumnos</b>

Los datos indican que el registro gráfico fue el que más eligieron los alumnos. En cuanto a los motivos de tal inclinación, los nueve alumnos de la especialidad Electrónica que optaron por este registro argumentaron que: “me resultaba el más fácil para trabajar”, “los límites se ven bien en la gráfica”, “conocía la gráfica”, “me resultaba el más cómodo”, “no me salió el límite y me di cuenta a último momento cómo explicarlo con palabras”, “era una de las opciones del ejercicio” y “me resultó más rápido”.

Los dos alumnos que eligieron trabajar con el registro simbólico sostuvieron que: “no me acordaba el gráfico de la tangente” y “era más rápido”.

Los tres alumnos que eligieron el registro natural sostuvieron que lo hicieron porque: “no me acordaba el gráfico de la tangente”, “quería ponerme a prueba” y “no me acordaba los otros”.

En Ingeniería Industrial, en esta oportunidad, la preferencia por los registros fue bastante equilibrada entre los tres tipos. De los cinco alumnos que eligieron trabajar con el registro gráfico, argumentaron que les resultaba más fácil y conocían la gráfica de la función, ya que se había trabajado en clase.

Los cuatro alumnos que eligieron trabajar con el registro simbólico, sostuvieron que lo hicieron porque no sabían realizar los otros o porque era la mejor opción para realizar.

Refiriéndose a los motivos de su inclinación, los seis alumnos que eligieron el registro natural dijeron: “era lo más seguro para realizar”, “se había dado en clase”, “era lo más fácil” y “era el más cómodo”.

### Conclusiones

Puede notarse que las preferencias de registros de representación por parte de los alumnos fueron cambiando entre un contenido y otro. Uno de los motivos puede encontrarse en que en el transcurso de los trabajos prácticos, los docentes tomaron una serie de decisiones con el objetivo de revertir el resultado inicial, teniendo en cuenta lo planteado por Duval con respecto a la comprensión de un objeto. Incorporaron actividades de tratamientos en los registros natural y gráfico que estaban prácticamente ausentes en la cartilla de la asignatura. Esto les dio más seguridad al momento de elegir por uno u otro.

Otra de las decisiones consistió en analizar en clase, en el momento de la devolución de los trabajos corregidos, las distintas resoluciones y los errores cometidos en los mismos. También se les permitió conservar fotocopias de sus producciones para que cada alumno pudiera analizar su resolución en detalle y con tranquilidad en otro momento y, si lo requerían, realizar consultas puntuales sobre su propia producción en horarios extras a la clase.

Se cree que estos cambios influenciaron al momento de evaluar el segundo contenido, ya que los estudiantes tenían más herramientas, no sólo porque habían realizado trabajos prácticos anteriores, sino porque contaron oportunamente con las devoluciones de los mismos y con actividades extras elaboradas para tal fin.

Consecuentemente con este resultado se formuló una propuesta de enseñanza para la materia que contempla, entre sus actividades de tratamientos y conversiones, los diversos registros de

representación semiótica en forma equitativa y equilibrada, lo suficientemente amplia para que al tener el alumno la obligación de trabajar con los tres registros de representación mencionados, logre manejo y seguridad en los mismos.

### Referencias bibliográficas

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento Metodológico Orientador para la Investigación Educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación e Instituto Nacional de Formación Docente.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación* (3ra. ed.). México DF: McGraw Hill.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 213-223.

Romiti, M.R., Sgreccia, N. y Caligaris, M. (2012). *Propuesta de mejora en el aprendizaje del concepto de límite de una función real*. Ponencia presentada en la X Conferencia Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires, septiembre.