UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA TEÓRICA PARA EL CONCEPTO ESPACIO VECTORIAL R^2

Miguel Rodríguez Jara, Marcela Parraguez González
Universidad de Playa Ancha Chile
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
mrodriguez@upla.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. Presentamos un diseño teórico de un modelo cognitivo denominado descomposición genética, (DG). En ella se explicitan las construcciones mentales y los mecanismos de abstracción reflexiva que permiten a un estudiante universitario construir el concepto de espacio vectorial R^2 a partir de su cartesiano R^2. El diseño de la DG está sustentado en un análisis histórico epistemológico que comprende los siglos XVII al XX. Resaltan, en el período indicado, la axiomatización y unificación como eventos que imprimen niveles de abstracción y rigor a las construcciones matemáticas. El marco teórico que sustenta esta investigación –la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema)– permite poner en sintonía, los ingredientes cognitivos que se desprenden de dicho análisis, además de proveer elementos para interpretar y organizar los aspectos matemáticos que se pesquisaron.

Palabras clave: eoría APOE, descomposición genética

Abstract. We present a theoretical design of a cognitive model called genetic decomposition (DG), which makes explicit the mental constructions and reflective abstraction mechanisms that allow a college student to construct the concept of vector space R2 from its cartesian R^2. The design of the DG is supported by a historical epistemological analysis that runs from the seventeenth to the twentieth century. Notable from the indicated period, are the axiomatization and unification as events that give levels of abstraction and rigor to mathematical constructs. The theoretical frame work used in this research–APOS Theory (Action, Process, Object, Schema)– allows us to balance cognitive ingredients that emerge from this analysis, as well as provide elements to interpret and organize the mathematical topics that were considered.

Key words: APOS theory, genetic decomposition

Fundamentación del estudio y la pregunta de investigación

Los R^2 espacios vectoriales son de las estructuras algebraicas más utilizadas en todas las ramas de la ciencia. En física e ingeniería se utilizan recurrentemente para modelar el espacio, las funciones periódicas, el conjunto solución de ecuaciones lineales y diferenciales y los polinomios, por citar algunos ejemplos. Por otro lado, dada la riqueza de su estructura algebraica, que incorpora lo algebraico y lo geométrico, los R^2 espacios vectoriales son muy utilizados para ejemplificar cuestiones del álgebra lineal: combinaciones lineales, base, conjunto generador, transformaciones lineales, dual, entre otros. Probablemente quienes los utilizan, en el proceso de enseñanza, no se detienen en su construcción y sólo apelan a él como ente ejemplificador de nociones ligadas al aprendizaje y enseñanza del álgebra lineal, menos aún, en una articulación entre R^2 como espacio vectorial y como plano cartesiano.

Este trabajo se aboca a la construcción cognitiva del R^2 espacio vectorial, atendiendo a algunas experiencias exitosas que consideran su utilización en la enseñanza de los conceptos ligados al álgebra lineal (Harel, 2000), esfuerzo que está en reacción con los antecedentes que reportan investigadores franceses, en relación al obstáculo del formalismo (Robinet, 1986, Dorier, 2000), en estudiantes universitarios de Francia y Marruecos.

A la luz de lo que se ha indicado, declaramos que el propósito de este reporte es atender la diversidad de miradas para el concepto de vector en el $\boldsymbol{R}^2$ espacio vectorial, desde las estructuras algebraicas que subyacen; a veces un punto (Geometría Ordenada), un par ordenado (Plano Cartesiano), otras un segmento dirigido o flecha (Geometría Vectorial), incluso hasta puede llegar a ser una matriz (Espacio Vectorial Isomorfo a $\boldsymbol{R}^2$); cuestión que desorienta a un aprendiz, y hace necesario una mirada unificadora de esos aspectos. Atendiendo al propósito declarado, cabe formular la siguiente pregunta que guiará esta investigación, ¿a través de qué elementos se da la coordinación entre los distintos aspectos asociados al $\boldsymbol{R}^2$ espacio vectorial y el $\boldsymbol{R}^2$ plano cartesiano? y ¿cuál es el rol que desempeñará la geometría para que un aprendiz reconstruya el concepto $\boldsymbol{R}^2$ espacio vectorial, desde su cartesiano?

Antecedentes de la investigación

Diseñar un camino viable para la construcción cognitiva del concepto $\boldsymbol{R}^2$ espacio vectorial, a partir del $\boldsymbol{R}^2$ plano cartesiano, es una tarea que requiere de una mirada histórica epistemológica; por un lado, para indagar en las construcciones matemáticas vinculadas a la estructura de espacio vectorial y, por otro, reparar en los procesos cognitivos que están involucrados en dichas construcciones.

La axiomatización del álgebra lineal, hacia 1930, desde la concepción del concepto espacio vectorial demandó un alto nivel de abstracción (Dorier, 2000; Dorier, *et al*. 2002). Por otro lado, el concepto espacio vectorial, desde un punto de vista epistemológico, más que ayudar a resolver nuevos problemas es visto como un concepto unificador, generalizador y formalizador, al igual que el concepto de límite (Dorier, 2000; Artigue, 2003). En la Figura 1 se indican algunos conceptos y procedimientos que se estructuraron en torno al concepto de espacio vectorial.

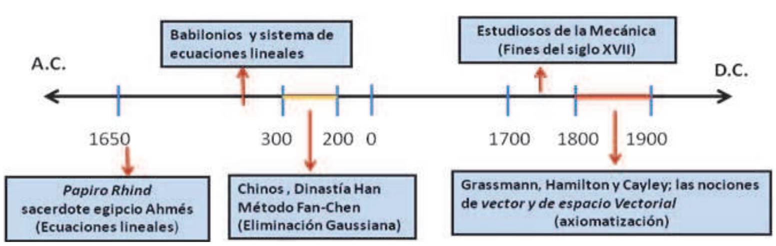

Figura 1, una panorámica histórica de conceptos ligados al álgebra lineal.

En la Figura 2, se muestran dos hechos que están relacionados y dan cuenta, de manera implícita, de la lentitud en la maduración de un concepto en su proceso de formalización, como objeto matemático. El primero dice relación con la dependencia inclusiva, trabajada por Euler, desde la relación de las ecuaciones que están involucradas al resolver un sistema de ecuaciones y el segundo, desde otro concepto asociado al mismo problema, el determinante nulo planteado por Cramer en 1.750. Por otro lado, si bien en la etapa anterior se percibe la dependencia lineal entre las ecuaciones, debe transcurrir más de un siglo, 1875, para que Frobenious la presente como un concepto más general, ya no vinculada sólo a los sistemas de ecuaciones (Dorier, 1995).

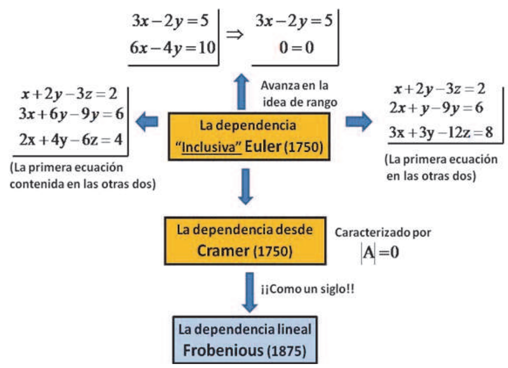

Figura 2: Dos hitos históricos y la evolución de la dependencia lineal desde la resolución de un sistema de ecuaciones.

Ciclo de investigación de APOE

A los tres casos de estudio se les aplicará el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como Descomposición Genética, DG; un diseño de instrumentos, basado en la DG, y aplicación de esos instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Asiala et al., 1996). La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción de las construcciones mentales que realizan los estudiantes; y a partir del análisis de los datos obtenidos, se lo puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos. Una DG propiamente tal es el resultado de la aplicación completa de las tres componentes de ese ciclo, que permite documentarla con los datos empíricos. Descripción de las tres componentes:

Análisis teórico

El análisis teórico consiste en el estudio profundo de los conceptos matemáticos inmersos en el espacio vectorial $\boldsymbol{R}^2$ para determinar las construcciones mentales necesarias en el aprendizaje del teorema, y es mediante una descripción hipotética de las construcciones mentales del aprendiz, esto es, lo que llamamos una Descomposición Genética, que es una modelación epistemológica-cognitiva del concepto en estudio. Hemos de aclarar que tal descomposición no es única, pues depende de los caminos de construcción del concepto y de las construcciones mentales a considerar.

Diseño y aplicación de instrumentos

Una vez definida la descomposición genética teórica es necesario probarla, es decir, tener alguna certeza de la viabilidad del camino señalado en ella. Para esto se diseñan y aplican instrumentos que permitan identificar las construcciones mencionadas en la(s) descomposición(es) genética(s) inicial(es), de modo de reflejar de modo explícito las construcciones mediante las cuales los estudiantes pueden aprehender el concepto espacio vectorial $\boldsymbol{R}^2$.

Se trabajó con una unidad de análisis de 10 estudiantes, atendiendo a los criterios antes mencionados y se diseñaron registros de observación y protocolos de entrevistas semi-estructuradas, previstas por la teoría las cuales se video grabaron.

Análisis y verificación de datos

En esta etapa y a partir de los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos –cuestionarios, entrevistas y registros de observación–. Damos cuenta del inicio del ciclo de investigación, pues valida la DG que se propone luego de ajustar la que se postula inicialmente de acuerdo a los datos empíricos obtenidos. A partir de ella, se puede hacer propuestas didácticas para la enseñanza y aprendizaje del concepto espacio vectorial, pues se posee información clara con respecto a las construcciones mentales y mecanismos mentales que los estudiantes han realizado.

Una descomposición genética para la construcción cognitiva del R2 espacio vectorial desde el R2 plano cartesiano

En el siguiente diagrama, figura 3, se explicitan aquellas construcciones y mecanismos mentales que determinan una modelo cognitivo hipotético o DG sobre la cual un estudiante universitario puede construir cognitivamente el concepto$\boldsymbol{R}^2$espacio vectorial desde su cartesiano $\boldsymbol{R}^2$.

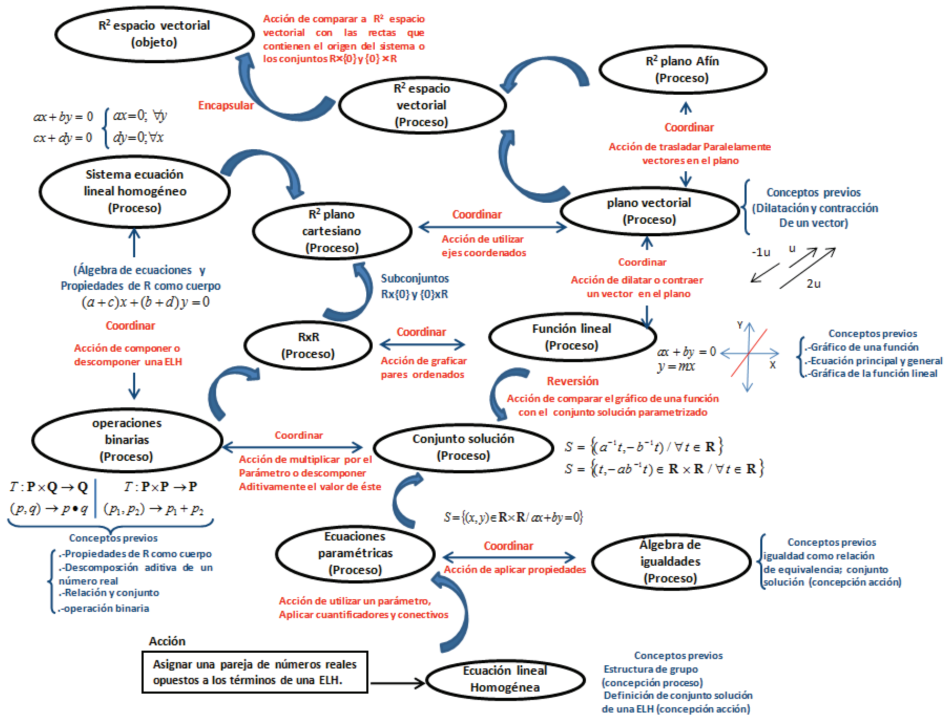

Figura3: Construcciones y mecanismos mentales en la construcción de R2 espacio vectorial.

Atendiendo a los antecedentes descritos anteriormente se ha considerado pertinente utilizar un diseño metodológico de, estudio de caso, en la medida que "…Los estudios de casos son adecuados para un análisis intensivo y profundo de uno o pocos ejemplos de ciertos fenómenos;..." (Goetz y LeCompte, 1988, p. 69).En esta investigación hacemos referencia a estudios de caso "Múltiple" en la medida que: analiza en concreto realidades específicas y singulares, que adquieren su valor como indagaciones intensivas y con profundidad en casos particulares; contrasta realidades específicas de las que pueden extraerse problemas comunes y matizaciones singulares, pero de ninguna manera explicaciones genéricas y definitivas sobre la realidad estudiada.

En búsqueda de evidencias empíricas para la DG

Para ello se aplica un cuestionario con la intensión de documentar las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG, la cual consideró dos momentos. En un primer momento, la aplicación de un cuestionario de 6 preguntas construidas a la luz de la DG; y en un segundo momento la indagación en profundidad, a través de una entrevista, de ciertos aspectos de la DG, que el análisis del cuestionario anterior nos proporcionó. Para ello se ha considerado detallar dos preguntas del cuestionario aplicado a estudiantes de una Universidad del Consejo de Rectores, en Chile (Caso1).

Primer momento: el cuestionario

Análisis a priori del cuestionario

Se ha seleccionado una pregunta del cuestionario, para dar a conocer en este artículo, las que a continuación serán analizadas a la luz de la DG presentada.

Pregunta 1 del cuestionario

1) Dada la Ecuación Lineal Homogénea (ELH) $3x+5y=0$, y su conjunto solución $S=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \,/\, 3x+5y=0\}$, responda las siguientes preguntas:

a) Determine, utilizando el procedimiento de la tabla 1, cinco pares ordenados que pertenezcan al conjunto solución de la ELH.

b) Considerando el procedimiento dado, reescriba el conjunto solución de la ELH.

c) ¿Existirá una ecuación lineal homogénea de dos incógnitas cuyo conjunto solución sea el conjunto vacío? Explique.

d) Considerando los pares ordenados del inciso **a)**, y el conjunto solución de inciso **b)**, ¿qué operaciones binarias se sugieren para el conjunto *S*? Explique.

Análisis a la pregunta:

Esta pregunta tiene por objetivo situarnos en la estructura algebraica que se puede explicitar para el Conjunto Solución ELH, es decir, provisto de dos operaciones binarias, una interna y la otra externa, desde la resolución de una ELH. Además de situarnos en la DG teórica, como se aprecia en la figura 4.

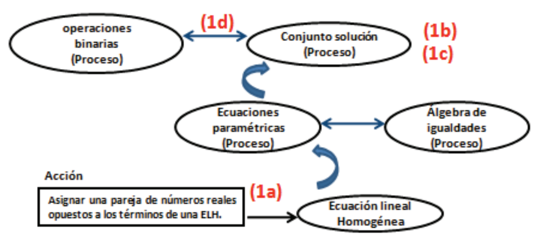

Figura 4: Aspectos de la DG que se consideran desde la pregunta 1

Observaciones sobre el desempeño de los estudiantes y análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, a continuación se presenta una selección del desempeño realizado por 5 estudiantes universitarios a las preguntas antes descritas. Para ello nos referiremos, por ejemplo, al Estudiante 1 como **E1**.

Análisis a posteriori Pregunta 1

Estudiante 3: En la tabla 1, este estudiante reescribe el conjunto solución de la ELH en términos de un parámetro, que anota como "*a*", a la luz del procedimiento indicado; lo que muestra que **E3** generaliza la forma de los pares ordenados que sugiere el procedimiento asignar un par de números reales a los términos de la ELH.

Tabla 1: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1a), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales de conceptos.

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se asocian al argumento observado.</th></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 5:
Ar5E3P1b: Utiliza un parámetro para reescribir el CSELH en términos de dos ecuaciones paramétricas asociadas a la ELH.
Ar6E3P1b: Indica la variación del parámetro en ***R***.</td><td>El **Ar5E3P1b**evidencia que la *acción* asignar un par de números reales, uno inverso aditivo del otro, *se interioriza* en un *proceso*, el CSELH. Donde el uso de un parámetro actúa como un mecanismo de *interiorización*.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b- Sea $x=a$ e $y=-a$
$3x=a$ $5y=-a$
$x=a/3$ $y=-a/5$
$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=a/3 \wedge y=-a/5,\ a\in\mathbb{R}\}$
Figura 5: Respuesta de E3 a la pregunta 1b.</td></tr>
</table>

Por otro lado, destaca la respuesta de **E4** a los apartados 1b y 1d en la tabla 2. Pues reconoce en el conjunto solución un sub-espacio vectorial con las operaciones usuales del ***R*²** espacio vectorial.

Tabla 2: Respuestas del E4 a la pregunta 1 y los apartados 1b y 1d.

<table>
<tr><th>Estudiant e</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se asocian al argumento observado.</th></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 6:
Ar5E4P1b: Determina un vector generador del CSELH.
Ar6E4P1b: Reescribe el conjunto solución de la ELH definiendo la multiplicación de un par ordenado específico por un escalar en ***R***.</td><td>Los **Ar5E4P1b y Ar5E4P1b** dan cuenta que la *acción* multiplicar un vector del CSELH por un escalar cualesquiera en ***R***, evidencia una *concepción proceso* de operación binaria externa y una *concepción proceso* del CSELH.</td></tr>
<tr><td colspan="3">1b) Sea $A=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$, $B=(0,0)$, $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$
$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x,y)=t\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right),\ t\in\mathbb{R}\}$
Figura 6: Respuesta de E4 a la pregunta 1b).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>E4</td><td>Según Figura 7:
Ar9E4P1d: Define, en términos de una función, la multiplicación por escalar.
Ar10E4P1d: Describe el rol de un vector generador en el CSELH.</td><td>Los Ar9E4P1d y Ar10E4P1d muestran que la acción reconocer estructura de espacio vectorial de un subconjunto de R^2, evidencia una concepción objeto de R^2 espacio vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

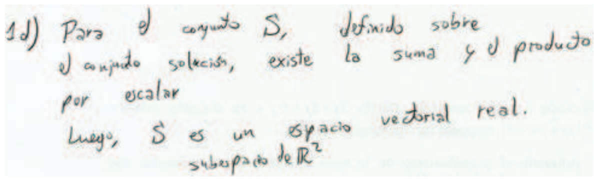

Figura 7: Respuesta de E4 a la pregunta 1b).

</td></tr>
</table>

Conclusiones del comportamiento observables de los estudiantes del Caso 1

Los estudiantes **E1**, **E3**, **E4** y **E5** manifiestan explícitamente, de distintas maneras, la posibilidad de una operación binaria interna o externa, en el conjunto de solución de la ELH, desde esta relación que sugieren los pares que se desprenden del procedimiento dado, e inclusive, lo que manifiesta el **E4**, de manera implícita, al considerar el conjunto solución como el gráfico de una función lineal, figura 8.

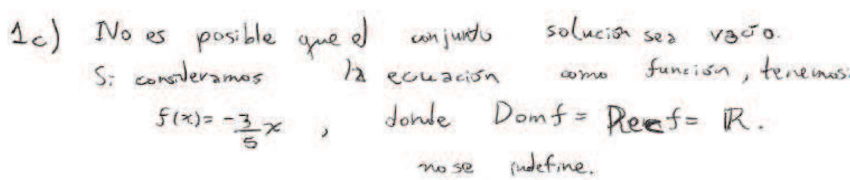

Figura 8: Respuesta al apartado 1c de la pregunta 1 del estudiante E4

En definitiva, se rescata el desempeño del **E4**, el cual manifiesta dominio de distintos aspectos considerados en la DG para la construcción del R^2 espacio vectorial; a saber el R^2plano cartesiano, geometría vectorial y el R^2 espacio vectorial. En términos de APOE, **E4** manifiesta una *concepción objeto* del R^2 espacio vectorial cuando compara el conjunto solución como subconjunto de R^2 con la misma estructura algebraica.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education* 6, 1-32.

Artigue, M. (2003). ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. *10*(2), 117-132.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. En J. L. Dorier (ed.): *On the Teaching of Linear Algebra*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 3-81.

Dorier, J. L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *29(2),* 175-197.

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. *New ICMI Study Series, 7*(3), 255-273.

Harel, G. (2000). Principles of Learning and Teaching Mathematics, With Particular Reference to the Learning and teaching of Linear Algebra:Old and New Observations. En J-L. Dorier (Ed).*On the teaching of Linear Algebra*, (pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. España: Morata.

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une Genèse des Concepts d'Algèbre Linèaire. *Cahier de Didactique des Mathèmatiques*. Francia: 29 IREM de Paris VII.