PROPOSICIONES DE EUCLIDES: PROBLEMA-DEMOSTRACIÓN DESDE UNA PERSPECTIVA ANTROPOLÓGICA

Rechimont, E.- Ferreyra, N.- Parodi, C.- Andrada, N.- Scarímbolo, M.
Universidad Nacional de La Pampa. Argentina
rechimont@exactas.unlpam.edu.ar – parodic@ing.unlpam.edu.ar

Campo de Investigaciones: Resolución de problemas. Nivel Educativo: Medio y Superior
Metodología de Investigación: Cualitativa

RESUMEN

Se realiza este trabajo en el marco de una investigación acerca de la Resolución de Problemas como herramienta de aprendizaje de la matemática.
Proclo, matemático griego, en su *Comentario al libro primero de los Elementos de Euclides,* dice que a pesar de que Euclides indica la diferencia entre problema y teorema con las palabras “lo que hay que hacer” o “lo que hay que mostrar”, respectivamente, las proposiciones de los Elementos que son problemas contienen demostraciones que fundamentan y justifican su resolución y no son para mostrar la naturaleza de lo que se ha investigado. En este trabajo se analizan desde una perspectiva antropológica dos de las proposiciones de Euclides para determinar la conveniencia o no de su presentación a los alumnos del Profesorado en Matemática.

Marco Teórico

Como docentes del Profesorado en Matemática y Profesorado de EGB 1ro y 2do Ciclos, observamos, en los alumnos de los primeros años de la UNLPam, dificultades en el aprendizaje de algunos temas de matemática y en particular en los procesos de argumentación, justificación o fundamentación de conceptos presentes en la solución de alguna situación-problema. Por otro lado, existen investigaciones que aportan elementos a la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas y la demostración y confirman el bajo nivel de los alumnos en la resolución de problemas y la comprensión y elaboración de demostraciones.
Por ello es de fundamental importancia lograr que los estudiantes se sientan comprometidos en actividades con sentido, que puedan conjeturar y aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas previamente probadas a través de la reflexión crítica y la argumentación. Se cree que la resolución de problemas es la actividad indicada para ello.
Sucesivas reformas curriculares del Sistema Educativo de la Argentina, ponen el énfasis en la Resolución de Problemas.
La Matemática se ha construido como respuesta a preguntas que se han traducido en problemas.
Las propuestas curriculares de matemática para los niveles de EGB y Educación Polimodal de la República Argentina hacen referencia a la Resolución de Problemas como *“la forma privilegiada para la construcción de los conocimientos matemáticos”.*
En cuanto a los Contenidos Básicos para la Educación Polimodal (1997) también están presentes consideraciones acerca de la Resolución de Problemas. En las Expectativas de Logro se manifiesta: *“Al finalizar la Educación Polimodal, los estudiantes estarán en condiciones de: Resolver Problemas seleccionando y/o generando estrategias, juzgar la validez de razonamientos y resultados y utilizar el vocabulario y la notación adecuados en la comunicación de los saberes”.*

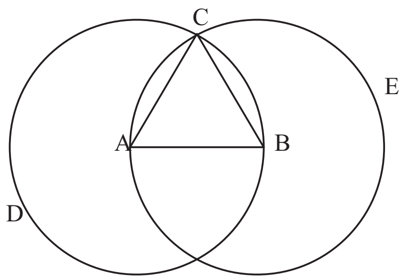
Chevallard, en su Teoría Antropológica de lo Didáctico, considera la actividad matemática como una actividad humana e incorpora las nociones de tarea, técnica, tecnología, teoría. Considera como conceptos fundamentales: los objetos, los sujetos, las instituciones y la relación personal e institucional a un objeto.
Las tareas son consideradas como ciertas acciones con una intención determinada y la institución las reconoce como lo que los sujetos de la institución debieran hacer. La tarea puede ser rutinaria o problemática. Se la considera rutinaria cuando su realización no plantea problemas y problemática cuando su realización implica cierto tipo de dificultades. Cuando una *tarea* resulta rutinaria la persona que debe realizarla posee y domina una determinada forma de hacer que se llama *técnica.*
La ejecución de una determinada tarea supone la puesta en práctica de una determinada técnica que tiene un alcance limitado y es adecuada sólo a un determinado tipo de tarea.
La permanencia de una técnica en una institución supone la existencia de un discurso sobre las técnicas que asegure su justificación y su control, llamado *tecnología*. La tecnología justifica la técnica, pero existe una justificación de esta justificación. Esto es, una tecnología de la tecnología, que es la *teoría* de la técnica.
La respuesta matemática a un conjunto de cuestiones o tareas problemáticas se resume en un conjunto organizado de objetos relacionados entre si que constituyen una *obra matemática.* Está formada por elementos técnicos, tecnológicos y teóricos. Una obra matemática es un conjunto organizado de objetos ligados entre si por diversas interrelaciones.
La actividad matemática presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática o "praxis" que está constituida de tareas y técnicas, y el discurso razonado o "logos" sobre la práctica que consta de tecnologías y teorías. La práctica matemática es inseparable del discurso razonado y su unión en la actividad matemática constituye la *organización o praxeología matemática*.
La praxeología matemática, entonces, consta de un tipo de problemas determinado, una o más técnicas, la tecnología asociada y la teoría correspondiente. La praxeología es una componente de la obra matemática.
En la matemática griega los problemas están asociados a la propuesta de hacer o construir algo y se lo diferencia de otros enunciados matemáticos que son los teoremas.
En los *Elementos* de Euclides, se diferencian claramente los problemas de los teoremas.
Los problemas terminan, en su desarrollo, con la palabra “lo que había que hacer” y los teoremas con “lo que había que demostrar”.
Proclo, matemático griego en su *Comentario al libro primero de los Elementos de Euclides,* pone como ejemplo de problema *“construir un triángulo equilátero sobre una recta dada”* y dice que es un problema porque sobre una recta también se puede construir un triángulo que no sea equilátero.
Los teoremas son así y eso es lo que hay que mostrar. Al respecto dice Proclo *“si pedimos inscribir un ángulo recto en un semicírculo, formulando la petición como problema, la consideraremos extraña a la geometría porque todo ángulo inscripto en un semicírculo es recto”*. En este caso no hay nada que crear ya que toda vez que se dibuje un ángulo inscripto en un semicírculo será recto sin que haya que hacer nada para lograrlo.
Señala Proclo que a pesar que Euclides indica la diferencia entre problema y teorema con las palabras “lo que había que hacer” o “lo que hay que mostrar”, las proposiciones de los Elementos que son problemas contienen demostraciones que sirven para fundamentan y justifican las construcciones del problema y no para mostrar la naturaleza de lo que se ha investigado.

Según Puig, L (1996) "*… que en los problemas de matemática hay que hacer algo con los objetos matemáticos que aparecen en ellos, una construcción con figuras, un cálculo con números, etc, y que el procedimiento con que ese algo finalmente se obtenga ha de probarse mediante una argumentación, cuyas reglas están establecidas por un marco discursivo determinado, propio de una práctica matemática concreta".*

Las Proposiciones de Euclides

Algunas de las proposiciones de Euclides, concebidas como problemas y tal que su resolución contiene una demostración, son analizadas según la Teoría Antropológica de lo Didáctico, con lo cual se pretende mostrar la conveniencia de proponer este tipo de análisis a los alumnos del Profesorado en Matemática, por la riqueza de conceptos matemáticos que pueden exhibirse debido a la necesidad de justificar su uso.
Se transcriben a continuación las Proposiciones 1 y 2 como así también la resolución realizada por Euclides y comentadas por Emanuel S. Cabrera (1949).

Proposición 1: *Sobre una recta finita (segmento) construir un triángulo equilátero.*
[Datos] *Sea AB la recta finita dada.*
[Incógnita] *Se pide construir un triángulo equilátero sobre la línea recta AB.*
[Construcción] *Con centro en A y distancia AB se describe el círculo (circunferencia) BCD* (Postulado III); *y nuevamente, con centro B y distancia BA se describe el círculo ACE* (Postulado III);
y desde el punto C, en que los círculos [circunferencias] se cortan entre sí, se trazan las rectas CA y CB que lo unen a los puntos A y B (Postulado I*).*



Y puesto que el punto A es el centro del círculo CBD, es AC igual a AB [Definición 15].
Por otra parte, desde que el punto B es el centro del círculo CAE, es BC igual a BA (Definición 15).
Pero se ha demostrado, que CA es igual a AB; entonces cada una de las líneas rectas CA, CB son iguales a AB.
Y como cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí, [Axioma 1], *entonces CA es igual a CB.*
Luego las tres líneas rectas CA, AB, BC son iguales entre sí.
Y por lo tanto el triángulo ABC es equilátero; y ha sido construido sobre la línea recta finita dada AB. L.C.Q.H (lo cual queríamos hacer)

Comentarios

Euclides, hace referencia a Postulados III, Postulado I, Definición 15 y Axioma 1 para justificar los procedimientos que considera en la Construcción:
Postulado I: *Desde un punto a otro cualquiera se puede trazar una línea recta.*
Postulado III: *Se puede describir una circunferencia con cualquier centro y con cualquier distancia* [*como radio*].

Definición 15: *Círculo es una figura plana comprendida por una sola línea tal que todas las rectas* [*segmentos*] *conducidas de un punto entre aquellos que están en el interior de la figura son iguales entre sí.*
Axioma 1: *Cosas* [o entes] *iguales a una misma cosa, son iguales entre sí.*

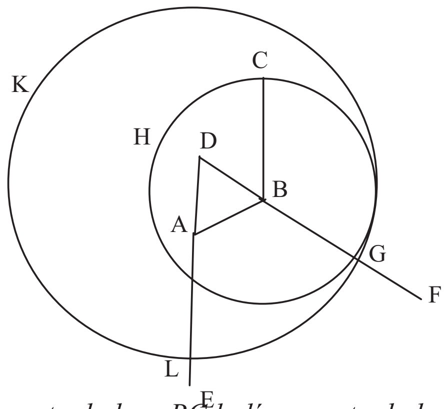
Análisis desde la teoría antropológica

Teniendo en cuenta la Teoría Antropológica de lo Didáctico se distinguen, en la Construcción, las instancias correspondientes a las tareas y técnicas y las tecnologías y teorías asociadas y las relaciones entre ellas como elementos de una organización matemática.
La Proposición 1 propone: C*onstruir un triángulo equilátero sobre la línea recta AB*.
Desde el punto de vista de la Teoría Antropológica se puede considerar que se propone una actividad no resoluble inmediatamente, es decir es una tarea problemática. Se pretende convertir esta tarea problemática en tarea rutinaria, es decir en tarea realizable con éxito. Para ello se ha encontrado una manera de hacer, de poder arribar a la solución de la propuesta. Esta manera de hacer, de construir el triángulo pedido, es la técnica.
La determinación del punto C, tercer vértice del triángulo pedido, como intersección de dos circunferencias es la técnica que permite realizar la tarea de una manera sistemática y segura: *Con centro en A y distancia AB se describe el círculo (circunferencia) BCD* (Postulado III); *y nuevamente, con centro B y distancia BA se describe el círculo ACE* (Postulado III); *y desde el punto C, en que los círculos [circunferencias] se cortan entre sí, se trazan las rectas CA y CB que lo unen a los puntos A y B* (Postulado I).
La técnica asociada a la tarea pone de manifiesto la existencia de un discurso interpretativo y justificado de la misma y de su ámbito de aplicabilidad o validez. Este discurso recibe el nombre de tecnología.
La tecnología asociada a esta técnica y que la justifica, es el Postulado de Continuidad. El Postulado de Continuidad se encuentra implícito en el desarrollo de la construcción, pero no se menciona explícitamente. Según Emanuel Cabrera, este postulado se enunciaría diciendo *"Dos circunferencias iguales en las que el centro de una es un punto de la otra, se cortan en dos puntos solamente"*.
La técnica considerada pone de manifiesto nuevas tareas:

1. *Trazar el segmento AB.*
2. *Trazar las dos circunferencias, cada una de ellas centrada en un extremo del segmento dado.*
3. *Determina la igualdad de l os segmentos lados del triángulo.*

La técnica asociada a tarea 1, es el trazado con regla y compás de un segmento y la tecnología que sustenta a la técnica es el Postulado I*: Desde un punto a otro cualquiera se puede trazar una línea recta*.
La técnica asociada a la tarea 2 es la técnica de los lugares geométricos. Esta técnica está justificada por el Postulado III*: Se puede describir una circunferencia con cualquier centro y con cualquier distancia [como radio]*, con lo que este Postulado se convierte en la tecnología asociada.
Actualmente podemos decir que esta tecnología subyacente, consiste en definir la circunferencia como lugar geométrico de la siguiente manera: *El conjunto de puntos del plano a igual distancia d de un punto A es la circunferencia de centro A y radio d.*
Respecto de la tarea 3, la técnica consiste en considerar los segmentos lados como radios de un círculo, la comparación de dichos segmentos dos a dos. La tecnología que fundamenta este procedimiento se expresa por:

<u>Definición 15</u>: *Círculo es una figura plana comprendida por una sola línea tal que todas las rectas* [*segmentos*] *conducidas de un punto entre aquellos que están en el interior de la figura son iguales entre sí.*
<u>Axioma 1</u>: *Cosas* [o entes] *iguales a una misma cosa, son iguales entre sí.*
La teoría que sustenta esta tecnología es la Geometría Axiomática de Euclides, contenida en la obra Los Elementos.
La obra matemática en este caso se constituye con la proposición, la construcción y la demostración de la igualdad de los lados del triángulo construido, con los postulados, axiomas y definiciones utilizadas para justificar y validar los procedimientos.
Proposición 2: *Por un punto dado (como extremo) llevar* [*construir*] *una línea recta* [segmento] *igual a otra recta* [segmento] *dada.*



[Datos] *Sea A el punto dado, y BC la línea recta dada.*
[Incógnita] *Se pide llevar desde A (como extremo) una línea recta igual a la recta BC.*
[Construcción] *Se une el punto A al punto B por medio de una línea recta AB* (Postulado 1) *y se construye sobre ella el triángulo equilátero DAB* (Proposición 1).
Se prolongan en línea recta *DA y DB en las rectas (semirrectas) AE y BF, respectivamente* (Postulado II); *y con centro B y distancia BC se describe la circunferencia CGH* (Postulado III); *y de nuevo con centro D y distancia DG se describe la circunferencia GKL* (Postulado III).
Entonces, desde que el punto B es el centro de la circunferencia CGH, es BC igual a BG.
Además, puesto que el punto D es el centro de la circunferencia GKL, es DL igual a DG.
Y de estos (segmentos), DA es igual a DB; por lo tanto los (segmentos) remanentes AL y BG son iguales (Axioma 3).
Pero se ha demostrado que BC es igual a BG; por lo tanto cada uno de los (segmentos) AL y BC son iguales a BG.
Y cosas iguales a una misma cosa son iguales entre si (Axioma 1)*; resulta que AL es también igual a BC.*
Luego por el punto dado A se ha llevado la línea recta AL igual a la línea recta dada BC. *L.C.Q.H (lo cual queríamos hacer)*
<u>Comentarios</u>
En esta proposición, Euclides hace referencia a:
<u>Postulado I</u>: *Desde un punto a otro cualquiera se puede trazar una línea recta.*
<u>Postulado II</u>: *Se puede prolongar una línea recta limitada, indefinidamente en línea recta.*
<u>Postulado III</u>: *Se puede describir una circunferencia con cualquier centro y con cualquier distancia* [*como radio*].

Proposición 1: *Sobre una recta finita (segmento) construir un triángulo equilátero.* (Analizada anteriormente).
Axioma 1: *Cosas* [o entes] *iguales a una misma cosa, son iguales entre sí.*
Axioma 3: *Si a iguales se sustraen iguales, los restos son iguales.*

Análisis desde la teoría antropológica

La tarea a realizar en este caso, es: *Por un punto dado llevar una línea recta igual a otra recta dada,* esto es, consiste en construir un segmento igual a otro dado.
La técnica que se pone de manifiesto es la de los lugares geométricos al construir las circunferencias. Y la tecnología asociada está dada por los Postulados, Proposiciones y Axiomas que se mencionan y que justifican en cada caso la manera de hacer.
La tarea primera se divide en subtareas: 1. Trazado de segmento; 2. Construcción de un triángulo equilátero; 3. Determinación de las semirrectas que contienen a un segmento dado; 4. Trazado de circunferencias; 5. Comparación de segmentos
Cada una de estas tareas tiene una técnica asociada y una tecnología subyacente.
Para la tarea 1, la técnica es la construcción con regla del segmento AB y la tecnología que la fundamenta es el Postulado I.
Para la tarea 2, la técnica es la intersección de dos circunferencias y la tecnología asociada es la Proposición 1.
Para la tarea 3, la técnica es el trazado de una semirrecta con regla y la tecnología correspondiente es el Postulado II.
Para la tarea 4, la técnica consiste en considerar los segmentos como radios de un círculo y la comparación de dichos segmentos dos a dos. La tecnología que fundamenta este procedimiento se expresa por los axiomas 1 y 3.
La **teoría** asociada es la Geometría Axiomática de Euclides.

Conclusiones

La enseñanza- aprendizaje de la matemática es una actividad que consiste en reconstruir y activar ciertas organizaciones matemáticas, esto es resolver tareas aplicando determinadas técnicas justificadas por las tecnologías y teorías correspondientes. La enseñanza consiste en propiciar la activación de la organización matemática y dirigir la reconstrucción.
Por ello el análisis de algunas de las Proposiciones de Euclides, desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, pone de manifiesto la riqueza de conceptos matemáticos involucrados en la resolución. Resultaría de interés considerar, con los alumnos de la carrera Profesorado en Matemática, futuros docentes en los niveles educativos EGB y Polimodal estas proposiciones y efectuar su análisis desde la perspectiva que se ha planteado en este trabajo. Ello incorporaría en los alumnos el hábito de efectuar, para los problemas que planteen, un minucioso análisis de los mismos que redundará en beneficio de acrecentar los conocimientos matemáticos y por ende se verán sus efectos en el desarrollo de sus clases en los niveles que le correspondan.

Bibliografía

Bosch, M. (2000). *Un punto de vista antropológico: La evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática.* IV Simposio SEIEM. Huelva. España. URL: http://www.ugr.es/local/seiem/IV_SIMPOSIO.htm

Cabrera, E. (1949). *Los Elementos de Euclides como exponente del "milagro griego"*. Colección Ciencia y Método. Buenos Aires: Librería del Colegio.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El Eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE-HORSORI. Universidad de Barcelona.

Contenidos Básicos para la Educación Polimodal. 1997. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Consejo Federal de Cultura y Educación. República Argentina.
Puig, Luis (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*. Colección MATHEMA. Granada: Editorial COMARES.