

LA CONSERVACIÓN EN EL ESTUDIO DEL ÁREA

Ma. Guadalupe Cabañas Sánchez-Ricardo Cantoral

DME- Cinvestav-IPN. México

gcabanas@cinvestav.mx; rcantor@cinvestav.mx

Campo de investigación: Socioepistemología; Nivel educativo: Medio y Superior

Resumen

Este escrito resume las actividades desarrolladas durante el curso “La conservación en el estudio del área”, en el que mostramos la existencia de una particular relación entre el área y su medición; de la medición con la comparación, y de todas estas con la conservación. Las actividades comprendieron construcciones vinculadas con regiones planas (presentadas como regiones geométricas o analíticas), involucrando a la conservación –como principio, noción, concepto, actividad y/o práctica – en el estudio del área, y de su relación con la integral definida. Actividades que ubicamos en la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa.

Palabras clave: Aproximación socioepistemológica, conservación, comparación, medición, área e integral definida.

Introducción

En el curso “La conservación en el estudio del área”, mostramos una forma particular de estudiar a la integral definida (a partir de la noción de área), en el marco de la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa. Estuvo constituido por cinco actividades que comprendieron construcciones vinculadas al tratamiento de regiones planas (geométricas y analíticas), con el fin de que se percibiera cómo es que el área puede conservarse al realizar transformaciones o bien al determinar relaciones en dichas construcciones. En el diseño de estas actividades se consideró a la conservación como eje rector - como concepto, principio, noción, práctica y actividad – y conceptos asociados como la comparación, medición y cuantificación.

El área en particular es una noción arraigada a la cultura de las sociedades, a la ciencia y a la tecnología, así como a las vicisitudes de la vida diaria de las personas (Cabañas y Cantoral, 2005b, 2005c). El concepto de área se vincula al de cuantificación de una superficie a la que se asocia una unidad de medida y que se expresa como unidad cuadrada. El concepto de medida de área consta del concepto de unidad, el concepto de iteración de unidad, la cantidad de unidades y el cálculo de fórmulas (Piaget, et al., 1970; Kordaki y Potari, 2002). Una particularidad relativa a la medición del área, es que las unidades convencionales (metro cuadrado, centímetro cuadrado, etc.) a diferencia de otras unidades no existen como instrumentos de medición en las tiendas, así como podemos encontrar reglas, cintas graduadas, escuadras en unidades de longitud; pesas para la masa, entre otras. Por lo que el cálculo del área se determina indirectamente, a partir de medidas de longitud y con instrumentos correspondientes a esta magnitud (Cabañas y Cantoral, 2005b).

Por conservación comprendemos a aquella modificación que no produce cambios en un área. Significa que el valor de un área permanece sin cambios mientras su figura puede ser transformada a otra cualitativamente nueva. Puede darse a partir del cambio de posición de una figura sin modificar su forma, al realizar movimientos como la rotación, traslación y reflexión (véase *Figura 1*). También, al modificar una figura partiéndola y reacomodando sus partes, y; mediante transformaciones en representaciones analíticas o geométricas en regiones planas o no planas.



Figura 1. Conservación del área en construcciones ligadas a regiones planas y no planas a partir de transformaciones y/o movimientos

El estudio formal del área se da en el contexto escolar y se vincula a representaciones geométricas y analíticas principalmente. En el sistema educativo mexicano inicia en la enseñanza básica (primaria), mediante actividades que involucran a la medición, comparación, cuantificación y conservación. Previo al proceso de medición, se sitúa a los niños a realizar actividades que les permita

percibir el área por recubrimiento; a percibir atributos medibles, y; a realizar transformaciones sin que el área se altere, a través de la manipulación de materiales no estructurados. Actividades que se desarrollan a lo largo de la escuela primaria. Las relativas a la medición, se refieren a figuras geométricas y se apoyan en el uso de fórmulas. En los niveles de enseñanza medio y superior las actividades cambian; a los estudiantes se les sitúa a trabajar básicamente sobre objetos formales. El estudio del área se vincula con el de integral definida, concepto que suele introducirse mediante explicaciones relacionadas con la medición del área de regiones planas acotadas, a través de la expresión “área bajo la curva”. El procedimiento de medición consiste en dividir la región en regiones más pequeñas, cuyas áreas tengan fórmulas de cálculo conocidas. Se suele dividir al intervalo de integración en subintervalos de igual longitud, sobre los cuales se construyen rectángulos con los que busca cubrir la región ya sea por defecto o por exceso. El valor aproximado del área se obtiene a partir de la suma de las áreas de los rectángulos así construidos. El cálculo del área de estos rectángulos utiliza la fórmula de “base por altura”, por lo que basta contar con los valores de las bases y de las alturas para conocer el valor de las áreas de los rectángulos. Si bien el procedimiento utilizado pudiera parecer simple, el recurso de subdividir la región en rectángulos es introducido artificialmente tanto en los textos escolares como en las explicaciones del profesor, además de que la particular forma de toma al límite plantea dificultades cognitivas. Esto suele hacerse con el propósito de justificar la presentación de la integral definida a través de la noción de área de donde se pasará al tratamiento algorítmico típico de la enseñanza de las integrales (Cabañas y Cantoral, 2005b).

Nuestra tesis es que aunque estemos en el nivel superior y trabajemos con objetos formales, se requiere introducir a esos objetos con actividades previas que tomen en cuenta principios esenciales como la conservación. Aceptamos que la dimensión empírica juega un papel importante en la dimensión conceptual de la enseñanza superior, la comparación y la

medición son antecedentes. Sin embargo, nos preguntamos ¿Cómo recuperar estas prácticas en la enseñanza superior sin regresar a la escuela básica? Consideramos que previo a la presentación didáctica de la integral, se requiere movilizar prácticas como la conservación y conceptos asociados (Cabañas y Cantoral, 2005b, 2005c). Esta tesis se ha venido llevando adelante a través del proyecto de investigación doctoral “La reproducibilidad de situaciones didácticas. La noción de conservación del área en la explicación escolar de la integral”, basados en la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa (Cabañas, 2004). Enfoque en el que se apoya el diseño de las actividades desarrolladas en el curso.

Estudio del área desde la aproximación socioepistemológica

La socioepistemología es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La sociopistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral y Farfán, 2003).

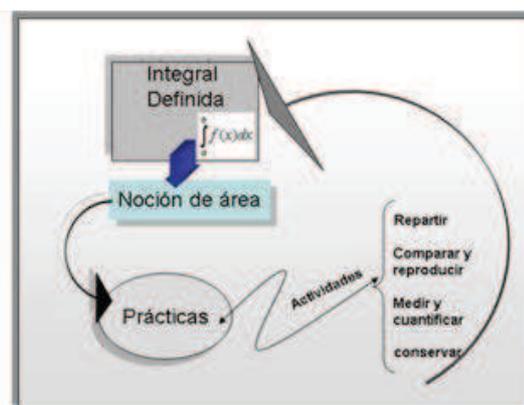


Figura 2. Aproximación socioepistemológica al estudio del área

rediseñando el discurso matemático, al abordar las prácticas, previo a la construcción de conceptos. En este curso se plantearon actividades desde esta aproximación teórica, con el propósito de presentar una visión alternativa a partir del tratamiento de la noción de área al nivel de las actividades asociadas, y que son detectadas en las filiaciones entre enseñanza básica y superior cuando tratan con la integral definida mediante actividades como: repartir, medir y cuantificar, comparar y reproducir, y conservar, que caracterizamos a continuación (véase Figura 2):

- a) *Repartir*. Esta actividad se vincula a situaciones de la vida cotidiana en la que dado un objeto hay que repartirlo equitativamente, ya sea aprovechando regularidades, por estimación o por medición.

- b) *Comparar y reproducir.* Las situaciones tienen que ver con la comparación de dos superficies con el fin de determinar cómo es una respecto de la otra. En otras, se busca obtener una reproducción con forma diferente a la dada inicialmente. Estas actividades pueden realizarse mediante: inclusión, transformaciones, estimación, por medición, o estudiando funciones.
- c) *Medir y cuantificar.* El área suele aparecer en situaciones de medida ya sea para repartir, conservar, comparar o valorar. Este proceso puede realizarse mediante exhaustión, acotación, transformaciones, o relaciones geométricas generales.
- d) *Conservar.* Esta actividad se presenta después de realizar transformaciones, o movimientos en construcciones vinculadas a regiones planas o no planas. En este proceso, los objetos pueden cambiar o mantener su forma sin que el área se altere.

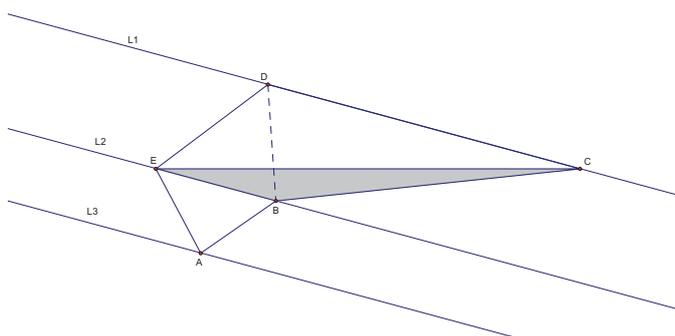
Presentamos a continuación las actividades que fueron realizadas durante el desarrollo del curso.

Las actividades

En las actividades uno y dos se sitió a trabajar con polígonos convexos y no convexos, y en las actividades tres, cuatro y cinco con funciones lineales y no lineales. El propósito es que se percibiera que el área puede conservarse en representaciones analíticas o gráficas ya sea realizando transformaciones o bien al determinar relaciones entre figuras geométricas. Enseguida se describen las actividades:

Actividad 1

En la siguiente figura las rectas L1, L2 y L3 son paralelas.



- a) Determina la relación que existe entre las áreas de los triángulos BDE y BCE. Justifica tu respuesta.

- b) Determina la relación que existe entre las áreas de los cuadriláteros ABDE y ABCE. Justifica tu respuesta.

En esta actividad se pidió determinar las relaciones entre áreas de triángulos con misma base y misma altura.

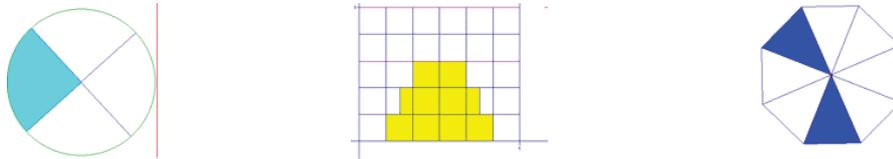
Actividad 2

Construye tres polígonos diferentes. Realiza las transformaciones convenientes sobre las figuras construidas, de tal forma que el área de las figuras resultantes sea igual a las construidas inicialmente. Explica los procedimientos que realizaste en las transformaciones.

En esta actividad se pidió construir polígonos diferentes y comprendieron: la determinación de relaciones entre áreas de triángulos con misma base y misma altura; la transformación de polígonos convexos y no convexos conservando áreas,

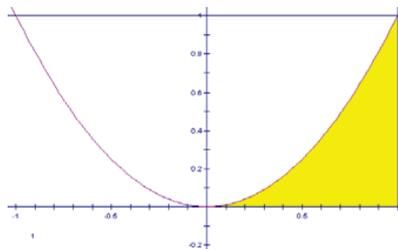
Actividad 3

Bosqueja la gráfica de una función no lineal cuya “área bajo la curva” sea igual al área de la región sombreada de cada una de las siguientes figuras:



Actividad 4

Determina tres funciones diferentes, cuya área bajo las gráficas correspondientes sea igual a la de la región sombreada en la gráfica dada, considerando el mismo dominio de definición.



Actividad 5

Considera las siguientes expresiones $f(x) = 4$, $g(x) = ax$, $h(x) = bx^2$. Encuentra los valores de a y b de manera que la región formada por la gráfica de la función y el eje x sobre el intervalo $[0, 4]$ tenga la misma área. Bosqueja geoméricamente.

Bibliografía

Cabañas, G. (2004). *Un estudio sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas: El papel de la noción de conservación del área en la explicación escolar del concepto de integral*. proyecto doctoral.

Cabañas, G. (2005). La noción de conservación en el estudio del área. En Lezama, J., Sánchez, M. y Molina, G. (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 18*, 457-462. México: Clame.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2005a). Un estudio sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas: El papel de la noción de conservación del área en la explicación escolar del concepto de integral. *Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Uruguay: Clame, p. 60.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2005b). La integral definida. Un enfoque socioepistemológico. En Dolores, C., Martínez, G. (Eds). *La socioepistemología en el aula*. Universidad Autónoma de Guerrero. Fomix del Conacyt – Guerrero (aceptado para su publicación).

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2005c). La conservación en el estudio del área. En Cantoral, R., Covián, O., Lezama, J. y Romo, A. (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. México: Reverté Ediciones-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C. (en prensa).

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, 53 (3), 255 – 270.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson.

Cordero, F. (2002). *Reconstrucción de significados del cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F., Muñoz, G. y Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Kordaki, M. y Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(1) 65 - 100.

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1970). *The child's conception of geometry*. New York; U.S.A.: Basic books, Inc., Publishers.