LAS ARGUMENTACIONES POR REDUCCIÓN AL ABSURDO COMO CONSTRUCCIÓN SOCIOCULTURAL

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*".
Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires (Argentina) ccrespo@uolsinectis.com.ar
Rosa María Farfán
Cinvestav – IPN. México DF. (México) rfarfan@cinvestav.mx
Campo de investigación: Categoría: Pensamiento lógico; Nivel educativo: Superior
Metodología: mixta.
Palabras clave: socioepistemología, argumentaciones, construcción sociocultural, reducción al absurdo

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación orientada a analizar las características y el papel que desempeñan las demostraciones y argumentaciones matemáticas en el aula. La investigación se ubica en la perspectiva socioepistemológica. Esta etapa de la investigación se centra en las características de las argumentaciones por reducción al absurdo, tratando de comprender a éstas como un recurso de validación de resultados en matemática que se logra a través de una construcción socio-cultural. En particular el carácter cultural se ha focalizado en el aspecto profesional, por lo que la atención se fijó en estudiantes de distintas carreras y formaciones, tratando de determinar las diversas concepciones de argumentaciones de alumnos y los mecanismos de su funcionamiento.

Las argumentaciones por el absurdo

Las demostraciones por reducción al absurdo han sido durante siglos aceptadas y utilizadas dentro de la matemática tanto por investigadores como por docentes. En el aula, también son presentadas en numerosas oportunidades sin una reflexión explícita acerca de su significación y consecuencias. Sin embargo su significación no es sencilla e involucra ideas que no son para nada triviales.

Este tipo de argumentaciones se basa en el siguiente esquema:

> *A partir de un conjunto Γ de premisas, que constituyen las hipótesis, se pretende probar la validez de cierta conclusión T, que en el caso de un teorema se suele denominar tesis. Se agrega como una nueva premisa la negación de la tesis y de esta manera se tiene un nuevo conjunto de premisas Γ'. A partir de Γ' se aplican reglas de inferencia y se llega a una contradicción. De esto se infiere que el nuevo conjunto de premisas es contradictorio o no consistente, por lo que se admite la verdad de la tesis.*

Dicho de otra manera, las demostraciones por contradicción o por reducción al absurdo propiamente dichas, presentan un formato en el que al agregarse la negación de la tesis a las hipótesis, se hace uso simultáneamente de ambas para llegar a que la conjunción de la hipótesis y la negación de la tesis no es posible. Al llegar a un absurdo, o sea a un enunciado falso, se infiere que la conjunción anterior es falsa, pero como la hipótesis ha

sido considerada verdadera en el enunciado del teorema, es necesario que sea la negación de la tesis falsa, y por lo tanto la tesis debe ser verdadera.
Con frecuencia, la realización de una demostración por reducción al absurdo es más sencilla que la demostración directa. Las argumentaciones por el absurdo presentan una alternativa a la demostración directa, aunque a veces no es necesaria su aplicación y el razonamiento puede realizarse de manera directa. En algunos casos, sin embargo no es posible realizar demostraciones directas y es necesario recurrir a argumentaciones por el absurdo para determinar la verdad de un enunciado.

Su aparición en la historia

A partir de las ideas de Parménides, se funda en Elea una escuela en la que sobresalió Zenón. En el siglo V a.C., Zenón utilizó el método de reducción al absurdo en la explicación de sus famosas paradojas. Eudoxo de Cnido que pasó algunos años junto a los discípulos de Platón, fue quien fundamentó la organización deductiva sobre un sistema explícito de axiomas. Otro mérito de Eudoxo fue la introducción del método de exahución. Este método de demostración supone una doble reducción al absurdo: por ejemplo para probar que el área de cierto recinto es A, se demuestra, utilizando polígonos inscritos, que no puede ser menor que A; y utilizando polígonos circunscritos, que no puede ser mayor que A. En los Elementos de Euclides, es posible encontrar varias demostraciones que hacen uso del recurso de reducción al absurdo.
Fermat empleó el método de *descenso infinito, que es* una variante del método de demostración por reducción al absurdo en la que la contradicción consiste en definir una sucesión infinita estrictamente decreciente de números enteros positivos. La aplicación que hizo Fermat de este método tuvo el fin de demostrar algunos teoremas de la teoría de números.
Las bases lógicas de las argumentaciones por reducción al absurdo, descriptas por Aristóteles, se sustentan en dos principios: el principio del tercero excluido y el principio de no contradicción.
En el siglo XX, para los intuicionistas, es posible que el principio del tercero excluido aplicado a razonamientos matemáticos en los que se realiza una argumentación por reducción al absurdo, condujera a una paradoja. El intuicionisno plantea esta duda y trata de darle solución sin postular nada al respecto (Toranzos, 1943). La posición de los intuicionistas de no aceptación del tercero excluido, no fue sin embargo nueva del siglo pasado. Si buscamos antecedentes en culturas que no incluyeron las argumentaciones por el absurdo como ser las culturas china e hindú, resultan notables algunas aserciones filosóficas sobre las cuales es imposible aceptar las argumentaciones por reducción al absurdo como válidas. En China antigua, las ideas filosóficas se basaron en la coexistencia y equilibrio entre el ying y el yang. Todo ser es combinación de estas formas de energía, nada es totalmente ying o totalmente yang. Esto da un sustento simbólico desde el que fue posible construir diferentes modos de oposiciones numéricas y dio también la posibilidad de surgimiento de objetos matemáticos como el cero. La simetría que preside el paradigma chino es radicalmente distinta de la filosofía de la Grecia clásica. Para los griegos no es posible pasar del ser al no ser, no es posible cambiar el género o la naturaleza de un objeto, no existe ningún elemento identificable que esté en el límite del ser y el no ser. De esta manera, en Grecia no apareció el cero. Por otra parte, la India, cuna del cero con todas sus

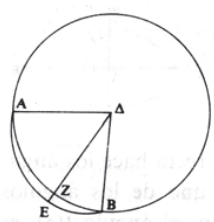
funciones, también se caracterizó por tener ideas filosóficas totalmente distintas a las griegas, en particular en relación con la aceptación del principio del tercero excluido.

Los alumnos ante situaciones relacionadas con las argumentaciones por el absurdo

Con el objetivo de observar y analizar cuáles son las actitudes de alumnos de diversa formación y ante las argumentaciones por el absurdo presentadas en distintos contextos, se diseñó una serie de actividades de diferente tipo.

- **Primera fase de experimentación**

Esta etapa de la experimentación, se orientó a la utilización de las figuras de análisis en las argumentaciones por reducción al absurdo. Ante la hipótesis de que, las figuras de análisis dificultan en oportunidades la comprensión de los razonamientos cuando se utilizan argumentaciones por el absurdo, se diseñó una secuencia que utiliza el texto de la demostración de la proposición 2 del Libro III de los Elementos de Euclides, en la que se solicitó a los alumnos que explicaran la estrategia de argumentación utilizada en este teorema por Euclides y realizaran la construcción correspondiente y explicando el papel y las dificultades de las figuras de análisis en este tipo de demostraciones.
Los destinatarios de esta secuencia fueron los alumnos del último año de la carrera de Profesor de Matemática y Astronomía del Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González” de Buenos Aires, Argentina. Estos alumnos han abordado temáticas como lógica proposicional y de predicados y sistemas formales y el análisis de algunos núcleos temáticos medulares en los fundamentos de la matemática, como ser la axiomática de Euclides y de Hilbert para la geometría, la fundamentación del análisis, las geometrías no euclidianas, las posiciones frente a la crisis de los fundamentos en el siglo XX, entre otras, estando acostumbrados a la realización de análisis metamatemáticos de propiedades y conceptos matemáticos. Esta secuencia no pudo ser experimentada en otras poblaciones de alumnos pues requiere de ciertos procedimientos y habilidades a cuya formación se apunta en la asignatura mencionada, pero no generalmente en otras. Los alumnos que intervinieron fueron 12. Una vez realizada la resolución de la secuencia por escrito, se prosiguió con una entrevista oral para profundizar las ideas vertidas en el trabajo.
Los alumnos que accedieron a responder las preguntas presentadas, todos excepto uno identificaron que se trata de una demostración por reducción al absurdo. Realizaron la explicación de este método de argumentación, justificando correctamente su utilización desde el punto de vista lógico. Al intentar realizar la figura de análisis correspondiente a la demostración presentada por Euclides, dudaron y expresaron primeramente en forma oral las dificultades que esta figura de análisis acarrea. Luego, 10 de los 12 alumnos presentaron figuras de análisis que denotan la inconsistencia de la suposición realizada por Euclides. En la figura de análisis que presenta Euclides (Euclides, 1991) debe notarse que la recta AEB es “curva”, pues para poder realizar el razonamiento por reducción al absurdo, se supone que este segmento es exterior a la circunferencia y por lo tanto no es posible realizar el trazado correspondiente, ya que esta suposición no es consistente con el resto de las hipótesis.



Presentamos a continuación algunas de las figuras de análisis realizadas por los alumnos encuestados e esta etapa que nos parece pueden brindar idea de las distintas dificultades surgidas y de las maneras en las que cada uno solucionó las mismas:

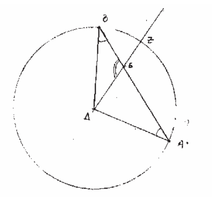


Figura 1

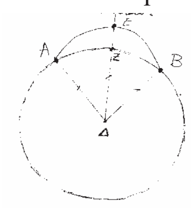


Figura 2

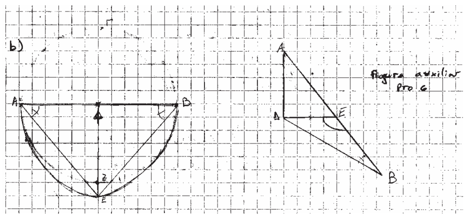


Figura 3

En el caso de la Figura 1 se observa que si bien en el razonamiento se está suponiendo que el punto E es exterior al círculo, en la figura que presenta esta alumna, E es interior. En las explicaciones que realiza, afirma que el punto "*se ve en el interior del círculo, pero está afuera*".

La figura 2, se trata de una construcción muy similar a la presentada por Euclides, en la que se evidencia la necesidad de "curvar la recta" para poder responder a la suposición de la negación de la tesis.

En la figura 3 aparece el punto E en el exterior del círculo, pero además de utilizar una línea curva para representar la recta, se unen los puntos A y E, y B y E con segmentos. Para poder seguir los razonamientos de Euclides, es necesaria además la realización de una figura auxiliar en la que A, E y B están alineados.

En estas entrevistas se puso en evidencia que la totalidad de los encuestados era capaz de identificar tipo de argumentación, tal como lo habían hecho por escrito y de explicar las bases lógicas que sustentan el uso de este tipo de argumentación en matemática. Más de la mitad del grupo se refirieron correctamente al Principio del tercero excluido y al Principio de no contradicción, así como que fueron capaces de identificar la aparición de una proposición contrarrecíproca de la dada en el enunciado a lo largo de la demostración.

- **Segunda fase de experimentación**

La segunda fase de la experimentación se orientó primeramente a determinar si los sujetos que fueron capaces de identificar y explicar la presencia de argumentaciones por reducción al absurdo en un escenario académico, en el análisis de la obra de Euclides, identifican y utilizan correctamente este tipo de argumentaciones ante preguntas y situaciones no académicas. Para ello se sometió al mismo grupo a otra encuesta en esta fase. En esta misma fase de experimentación se compararon los resultados obtenidos en el mismo grupo de alumnos de la primera fase con los de otros dos grupos de alumnos. Uno de ellos provenientes del Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico del segundo año de la carrera de Profesorado en Informática. La formación lógica de estos alumnos, si bien han tenido algunas nociones de lógica, es menor que las del primer grupo considerado. Asimismo la orientación de los mismos es distinta en relación al primer grupo, ya que se encuentran siguiendo una carrera informática. El tercer grupo de alumnos que intervino en esta fase de la experimentación se encuentra terminando sus estudios de nivel medio, cursando el tercer año de nivel polimodal. En este año tienen una asignatura denominada Introducción al Conocimiento Científico, en la que estudian ciertos conceptos básicos de

lógica y sus aplicaciones a las ciencias y a la resolución de situaciones problemáticas que correspondan a juegos de ingenio y aplicaciones de estrategias lógicas de resolución.
El cuestionario que constituyó esta fase de experimentación se basa en la propuesta de estudio experimental mencionada por César Sáenz Castro conocida como "*tarea de las cuatro tarjetas*" (Sáenz Castro, 2002). El texto presentado a los sujetos de la experimentación fue el siguiente:

> Una sociedad secreta está formada por miembros y tiene un reglamento que rige las condiciones muy particulares y estrictas para el ingreso a la misma. Una de las cláusulas de este reglamento dice:
>
> *"Si el nombre de un miembro termina en vocal, su apellido comienza con consonante"*
>
> En una reunión concurren cuatro personas que son miembros de la sociedad y que se presentan de la siguiente manera:
>
> Persona1: "*Mi nombre es Nuria"*
> Persona2: "*Mi nombre es Raquel"*
> Persona3: "*Mi apellido es Pérez"*
> Persona4: "*Mi apellido es Álvarez"*
>
> a) ¿Qué datos necesitaría obligatoriamente preguntar a estas personas, miembros de la sociedad para saber si la cláusula anteriormente citada del reglamento de ingreso se está cumpliendo?
>
> b) Explique cuáles son las ideas lógicas en las que se basa para dar la respuesta anterior.

Los alumnos del Profesorado de Matemática que intervinieron fueron 12 (los llamaremos en adelante, Grupo A); los del Profesorado de Informática, 17 (nos referiremos a ellos como Grupo B); los alumnos que están terminando su escuela media, 17 (constituyen el Grupo C).
Una vez realizada la resolución de la secuencia por escrito, se prosiguió como en la primera fase de la experimentación que hemos descrito anteriormente con entrevistas orales de los participantes que se orientaron a profundizar o aclarar algunas de las ideas que surgieron en las respuestas a este cuestionario.
Las respuestas dadas por los alumnos de cada uno de los grupos son las siguientes:

	Personas 1 y 4		**Personas 1, 3 y 4**		**Personas 1 y 3**		**Personas 1, 2, 3 y4**		**Persona 1**		**No responde**	
Grupo		**%**		**%**		**%**		**%**		**%**		**%**
A	5	41,7	0	0	3	25	3	25	0	0	1	8,3
B	2	11,7	0	0	2	11,7	8	47	4	23,6	1	6
C	0	0	1	6	1	6	15	88	0	0	0	0

Indudablemente algo que llama la atención a primera vista es que menos de la mitad del Grupo A haya dado la respuesta correcta a esta pregunta, a pesar de que anteriormente habían identificada y explicado correctamente la manera indirecta de razonar. Sin embargo en el Grupo B, la cantidad de respuestas correctas es proporcionalmente casi la cuarta parte de las dadas por el Grupo A, mientras que en el Grupo C no se presentó ninguna respuesta correcta. En los Grupos B y C la mayoría decidió que es necesario preguntar todos los datos faltantes. La explicación obtenida para el Grupo B a partir de la entrevista se refiere a la manera de preguntar y tomar decisiones en un programa de computación, en el que "*se evalúa el antecedente y de acuerdo a la verdad o falsedad de éste se dispara o no el consecuente en un if...then*..." Las explicaciones del Grupo C se limitan a indicar a quiénes les pedirán los nombres y a quiénes los apellidos justificando que esos son los datos faltantes. No incorporan en las respuestas fundamentaciones lógicas. En las entrevistas a los alumnos de este grupo, no se ampliaron significativamente las respuestas dadas por escrito, limitándose la mayoría a explicar la necesidad de examinar todos los casos presentados.

Algunos resultados evidenciados por la experimentación realizada

Como resultado de las dos fases de experimentación realizadas, podemos enunciar las siguientes conclusiones que evidencian que la formación profesional influye en el tipo de argumentaciones utilizadas, permitiendo comprenderlas como construcciones socio-culturales:

- ✓ La totalidad de los alumnos estudiantes del último año de profesorado de matemática reconocen la presencia de argumentaciones por reducción al absurdo en un contexto matemático.
- ✓ Al encontrarse con este tipo de demostraciones en un contexto matemático, pueden explicarlas correctamente e incluso indicar cuáles son las características y dificultades que este tipo de argumentaciones presentan
- ✓ Sólo menos de la mitad de los mismos alumnos argumentan por reducción al absurdo en situaciones fuera del contexto matemático.
- ✓ Pocos alumnos con formación informática realizan argumentaciones indirectas para resolver situaciones problemáticas.
- ✓ Los alumnos con formación informática prefieren realizar argumentaciones directas, no indirectas.
- ✓ La forma de razonar de los estudiantes de informática en condicionales está unida a la estructura "if...then...", necesitando evaluar el antecedente antes del consecuente.
- ✓ Ninguno de los alumnos de escuela media pudo argumentar correctamente por el contrarrecíproco.
- ✓ Para la mayoría de los alumnos de nivel medio la única manera de demostrar que una implicación es verdadera es probar todos los casos, lo que muestra que no tienen aún incorporada la idea de demostraciones generales que no impliquen razonar caso por caso.

Referencias bibliográficas

Crespo, C. (2003). *Las demostraciones como contenido matemático*. Presentado en la VII Escuela de Invierno y VII Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Chilpancingo, Guerrero.

Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría sin publicar. CICATA-IPN, México.

Crespo, C.; Ponteville, Ch. (2003). *Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones*. En Díaz, L. (Ed.) Volumen 17. Tomo 1 (pp.39-44).

Crespo, C.; Ponteville, Ch. (2004). *Las funciones de la demostración en el aula de matemática*. Presentado en RELME 18, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Gredos.

Godino, J.; Recio, Á. (2001). *Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática.* En *Enseñanza de las ciencias*, 19 (3) (pp.405-414)

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática.* Barcelona: Gedisa.

Sáenz, C. (2002). *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas*. En Moreno, M. F. y otros (Ed.) *Actas del Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Universidad de Almería. (pp.47-62).

Toranzos, F. (1943). *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática*. Buenos Aires: Espasa Calpe Argentina.