

EL TRONCO DE DIPIRÁMIDE REGULAR OCTAGONAL AFÍN RECTA

Luís Enrique Ruíz Hernández

Departamento de Matemáticas

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Duitama, Boyacá, Colombia

leruizh@yahoo.es

Resumen

A partir de tres vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , y bajo otras condiciones, se construye una norma φ sobre \mathbb{R}^3 cuyas esferas de centro G y radio $r > 0$, son troncos de dipirámide regular octagonal afín recta de centro G . También, dado un poliedro \mathfrak{F} de este tipo, se establece que \mathfrak{F} , es también un cuerpo normado, respecto a esa norma φ construida a partir de \mathfrak{F} . La representación unificada de φ permite el estudio riguroso y versátil de la estructura geométrica de \mathfrak{F} , asistida por la noción de homotecia.

Introducción

En la Geometría Sólida hay un gran vacío sobre el estudio formal de los truncamientos de los poliedros convexos más notables. Uno de estos truncamientos es el tronco de dipirámide regular octagonal afín recta, considerado como un sólido macizo y cerrado \mathfrak{F} de centro G (Ver Definiciones 1 y Figura 2).

En este documento se indaga la geometría de \mathfrak{F} considerándolo como una esfera cerrada de centro G respecto a una norma φ sobre \mathbb{R}^3 . En efecto, se concibe φ en términos de tres vectores A, B, C linealmente independientes en \mathbb{R}^3 y un real $a > 1$, presentes en la representación unificada de φ (Lema 2), tal que $S_r[G]$, la esfera de centro G y radio $r > 0$, respecto a la norma φ , es un sólido \mathfrak{F} . (Teorema 1), habiendo previamente obtenido una correlación lineal entre los vértices de la dipirámide regular octagonal (Ver Definición 1, Figura 1 y Lema 1).

También, dado un tronco \mathfrak{F} se construye la norma φ sobre \mathbb{R}^3 , respecto a la cual \mathfrak{F} es una esfera cerrada de centro G , es decir, se establece que \mathfrak{F} es un cuerpo normado (Corolario 1).

Toda la trama matemática, aquí desarrollada, articula nociones de álgebra lineal, topología y análisis convexo, constituyéndose así, en una visión moderna sobre la geometría de \mathfrak{F} , en la cual subyace la noción de homotecia.

Denotaremos con letra mayúscula los puntos de \mathbb{R}^3 , su producto interior usual por un punto \cdot y el producto vectorial mediante una cruz \times

Los lemas 1, 2, el teorema 1 y el Corolario 1, consignados en la presente investigación son originales. Constituyen aportes concebidos y demostrados por el autor.

1. Preliminares geométricos y topológicos

Definición 1. *Se dice que una pirámide es regular si su base es un polígono regular y sus caras laterales son triángulos isósceles.*

Haciendo coincidir las bases de dos pirámides regulares congruentes, obtenemos una dipirámide regular. La base común de las dos pirámides es la base de la dipirámide.

Un tronco de pirámide es la parte de una pirámide comprendida entre la base y una sección paralela a la base. Esta sección es la base superior del tronco, y la base de la pirámide, la base inferior del tronco.

Haciendo coincidir las bases inferiores de dos troncos de pirámides regulares, congruentes, obtenemos una dipirámide regular truncada o tronco de dipirámide regular. La base inferior común de los dos troncos y sus bases superiores, son la base inferior y las bases superiores del tronco de dipirámide regular, respectivamente.

Un tronco de dipirámide regular afín es la imagen de un tronco de dipirámide regular bajo un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 . Análogamente se define polígono regular afín y los otros afines del presente contexto.

En particular, una dipirámide regular afín recta es una dipirámide regular afín tal que la recta a través de sus ápices interseca perpendicularmente a la base en su centro.

A continuación se expresa cada vértice de la base de una dipirámide regular octagonal como una combinación lineal promedio (la suma de cuyos coeficientes es uno) del centro y dos vértices consecutivos de la base.

Lema 1. *Consideremos la dipirámide regular octagonal de centro*

$$G' = \frac{1}{2}(V'_i + V'_{i+4}), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (1)$$

vértices V'_1, \dots, C'_8 y ápices W' , $2G' - W'$, dispuestos como en la Figura 1. Entonces

$$\begin{cases} V'_3 = -V'_1 + \sqrt{2}V'_2 + (2 - \sqrt{2})G', \\ V'_4 = -\sqrt{2}V'_1 + V'_2 + \sqrt{2}G' \\ V'_5 = -V'_1 + 2G', & V'_6 = -V'_2 + 2G', \\ V'_7 = -V'_3 + 2G' \\ V'_8 = \sqrt{2}V'_1 - V'_2 + (2 - \sqrt{2})G' \end{cases} \quad (2)$$

Demostración. Consideremos el octágono regular $(V'_1 - G') \dots (V'_8 - G')$ de centro el origen 0, el trasladado de $V'_1 \dots V'_8$ por $-G'$ (Ver Figura 1). Los vectores $V'_i - G'$, $V'_j - G'$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , por tanto $(V'_i - G') \times (V'_j - G')$ son vectores no nulos y normales al plano (un subespacio de \mathbb{R}^3) del octágono de centro 0, y tienen la misma dirección y sentido, para todo $1 \leq i < j \leq 4$.

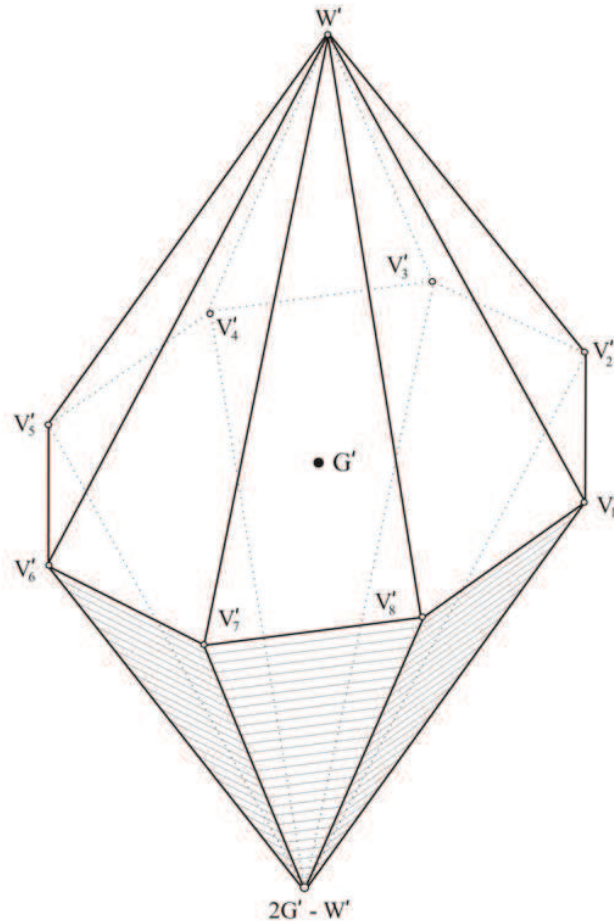
A la luz de estas observaciones y notando que la medida del ángulo $\angle V'_i G' V'_j$ es $\frac{\pi}{4}|i - j|$, $i, j = 1, \dots, 4$, existen escalares s_k y t_k tales que

$$V'_k - G' = s_k(V'_i - G') + t_k(V'_2 - G'), \quad k = 3, 4$$

Multiplicando vectorialmente ambos miembros, sucesivamente, por $V'_2 - G'$ y $V'_1 - G'$, aparece, al tomar seguidamente la norma euclídea,

$$s_k = -\sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}(k - 2) \quad \text{y} \quad t_k = \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}(k - 1), \quad k = 3, 4$$

Figura 1. La dipirámide regular octagonal de ápices W' , $2G' - W'$ y centro $G' = \frac{1}{2} (V'_i + V'_{i+4})$, $i = 1, \dots, 4$



Fuente: El Autor

De aquí se siguen las expresiones para V'_3 y V'_i en (2). Las demás representaciones en (2) se siguen de (1) y $V'_3 V'_4$

Lema 2. Sean, $a > 0$ y $\Lambda_1, \dots, \Lambda_4$, C vectores en \mathbb{R}^3 , tales que Λ_1, Λ_2 y C son linealmente independientes. Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es la función representada por

$$\varphi(X) = \text{máx} \left\{ \sum_{k=1}^4 |\Lambda_k \cdot X| + |C \cdot X|, \quad a |C \cdot X| \right\}, \quad (3)$$

para todo $X \in \mathbb{R}^3$, entonces φ es una norma sobre \mathbb{R}^3 .

Demostración. $\varphi(X) = 0$ es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\Lambda_k \cdot X = 0, \quad k = 1, \dots, 4, \quad C \cdot X = 0$$

Por ser $\det (\Lambda_1 \Lambda_2 C) \neq 0$, el rango de la matriz de los coeficientes es tres, y el sistema tiene como solución única $X = 0$. Las otras dos propiedades $\varphi(\lambda X) = |\lambda| \varphi(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y la desigualdad triangular para φ , son fáciles de demostrar.

2. Una construcción algorítmica del tronco de dipirámide regular octagonal afín recta

Teorema 1. Sean, $a > 1$ y A, B, C, G vectores en \mathbb{R}^3 tales que A, B, C son linealmente independientes, C unitario y

$$A \cdot C = B \cdot C = 0 \quad (4)$$

Hagamos,

$$\begin{cases} \Lambda_k = \frac{1}{2} \{-\sqrt{2}k + (2 - \sqrt{2})|k - 3| + 3\sqrt{2} - 2\}A \\ \quad + \frac{1}{2} \{(2 - \sqrt{2})k + (\sqrt{2} - 2)|k - 2| + 2(1 - \sqrt{2})|k - 3| + 4(\sqrt{2} - 1)\}B, \\ k = 1, \dots, 4 \end{cases} \quad (5)$$

y consideremos para estos puntos $a, \Lambda_1, \dots, \Lambda_4, C$, la norma φ sobre \mathbb{R}^3 representada en (3). Además, si $r > 0$ y

$$\Delta = \det(A, B, C), \quad (6)$$

sean los puntos

$$\begin{cases} V_{k+i} = G - (2 + \sqrt{2})b\Delta(i + 3|i - 8| - 24)c \\ \quad + b \left\{ (1 - 2a)i + (3 - 2a)|i - 8| + 32a - 24 \right\} \Lambda_{5-k} \times C, \\ V_{k+i+4} = 2 \left\{ G - (2 + \sqrt{2})b\Delta(i + 3|i - 8| - 24)C \right\} - V_{k+i}, \\ i = 0, 8, 16 \quad y \quad k = 1, \dots, 4 \end{cases} \quad (7)$$

donde

$$b = \frac{a^{-1}r}{16(2 + \sqrt{2})\Delta} \quad (8)$$

Entonces, $S_r[G]$ la esfera cerrada de centro G y radio r , respecto a la norma φ , es el tronco de dipirámide regular octagonal afín recta, maciza y cerrada, centralmente simétrica en G , de vértices V_1, \dots, V_{24} dados en (7) y dispuestos como se muestra en la Figura 2, con las siguientes propiedades

(i) Si

$$\mathfrak{P}_{\frac{i}{8}} = \text{conv} \{V_{i+1}, \dots, V_{i+8}\} \quad , \quad (9)$$

entonces $\mathfrak{P}_{\frac{i}{8}}$ es una región cerrada octagonal regular afín, de centro

$$\begin{cases} G - (2 + \sqrt{2})b\Delta(i + 3|i - 8| - 24)C \\ \frac{1}{2}(V_{k+i} + V_{k+i+4}) \quad , \quad k = 1, \dots, 4 \end{cases} \quad (10)$$

y plano

$$(X - G) \cdot C = -(2 + \sqrt{2})b\Delta(i + 3|i - 8| - 24) \quad , \quad (11)$$

para todo $i = 0, 8, 16$

(ii) \mathfrak{P}_0 es la base de la dipirámide regular afín de centro G y ápices W y $2G - W$, de la cual procede $S_r[G]$, donde

$$W = G + rC \tag{12}$$

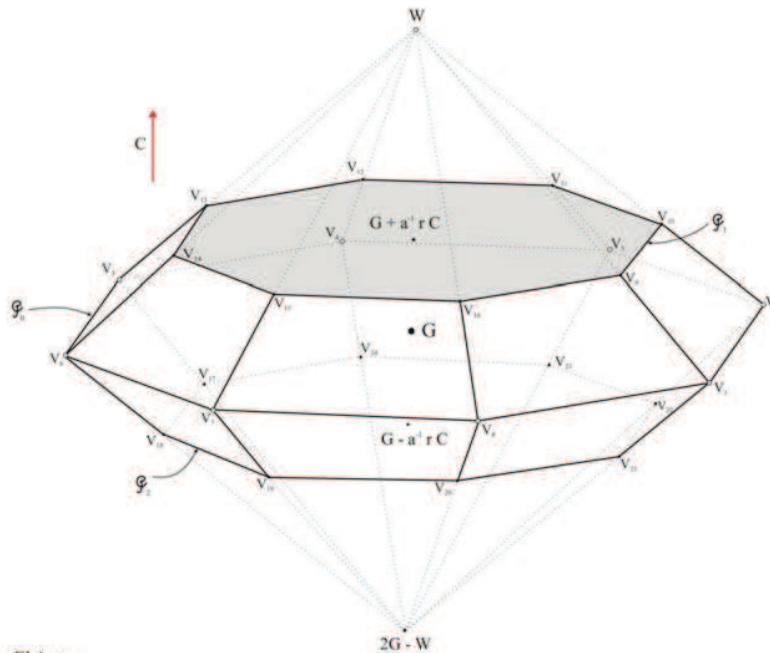
(Ver Figura 2).

(iii) Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la homotecia representada por

$$f(X) = W + \frac{a-1}{a}(X - W) \quad , \tag{13}$$

de centro W y razón $\frac{a-1}{a}$, entonces $f(\mathfrak{P}_0) = \mathfrak{P}_1$, es decir, \mathfrak{P}_0 y \mathfrak{P}_1 son homotéticos, y por ende \mathfrak{P}_0 y \mathfrak{P}_1 son octágonos regulares afines y semejantes, siendo \mathfrak{P}_1 y \mathfrak{P}_2 polígonos congruentes (iv)

Figura 2. $S_r[G]$ es el tronco de dipirámide regular octagonal afín recta de centro G , bases superiores \mathfrak{P}_1 , $\mathfrak{P}_2 = 2G - \mathfrak{P}_1$, y base inferior \mathfrak{P}_0 .



Fuente: El Autor

Las caras laterales de $S_r[G]$ son trapezios tales que

$$\begin{cases} V_1 V_2 V_{10} V_9, & V_2 V_3 V_{11} V_{10}, & V_3 V_4 V_{12} V_{11}, \\ V_4 V_5 V_{13} V_{12}, \end{cases} \tag{14}$$

están en los planos

$$\begin{cases} (X - G) \cdot \left(\sum_{j=1}^{4-k} \Lambda_j - \sum_{i=5-k}^4 \Lambda_i + C \right) = r \quad , \\ k = 1, \dots, 4, \end{cases} \tag{15}$$

respectivamente; las caras

$$\begin{cases} V_5 V_6 V_{14} V_{13}, & V_6 V_7 V_{15} V_{14}, \\ V_7 V_8 V_{16} V_{15}, \end{cases} \quad (16)$$

en los planos

$$\begin{cases} (X - G) \cdot \left(C - \sum_{i=1}^{4-k} \Lambda_i + \sum_{i=5-k}^4 \Lambda_i \right) = r, \\ k = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (17)$$

respectivamente, y la cara $V_8 V_1 V_9 V_{16}$ en el plano

$$(X - G) \cdot \left(C + \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \right) = r \quad (18)$$

Las caras opuestas (y paralelas) respecto a G , de todas estas ocho caras, tienen planos con representaciones de la misma forma anterior, cambiando r por $-r$.

Demostración. De (5), . . . (8), (12) y de las propiedades de los determinantes, y por el hecho de ser C un vector unitario, obtenemos

$$\det(V_1 - G, V_2 - G, W - G) = -256a^2b^2r\Delta \neq 0,$$

es decir, G, V_1, V_2 y W son afinmente independientes en \mathbb{R}^3 , lo mismo que G', V'_1, V'_2, W' en la dipirámide regular octagonal de la Figura 1, de hecho no degenerada.

Por tanto existe un único automorfismo afín $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{cases} g(G') = G & , & g(V'_k), & k = 1, 2, \\ g(W') = W \end{cases} \quad (19)$$

Teniendo presente (5), puede verificarse que los puntos V_3, \dots, V_8 definidos en (7) son combinaciones lineales promedio de G, V_1, V_2 , análogas a las correspondientes en (2). Por tanto, se sigue de (2) y (9) que

$$\begin{cases} g(V'_i) = V_i & , & i = 1, \dots, 8, \\ g(2G' - W') = 2g(G') - g(W') = 2G - W, \end{cases}$$

dado que g preserva tales combinaciones. Se sigue, de acuerdo a las definiciones 1, que $V_1 \dots V_8 W(2G - W)$ es una dipirámide regular afín, de base el octágono regular afín $V_1 \dots V_8$, cuya envolvente convexa es \mathfrak{P}_0 según (9), de centro G y ápices $W, 2G - W$ y vértices dispuestos como se muestra en la Figura 2. Además,

$$(V_1 - G) \times (V_2 - G) = -128a^2b^2r^{-1}\Delta\{W - (2G - W)\},$$

y por esto la dipirámide regular afín es recta (Ver Definición 1). Ahora consideremos a este poliedro como un sólido macizo y cerrado D , esto es,

$$D = \text{conv} \{V_1, \dots, V_8, W, 2G - W\} \quad (20)$$

la envolvente convexa de sus vértices ([1] p. 158 Theorem 17.2; p. 12 Corollary 2.3.1).

Además, tomando $i = 0$ en (7) obtenemos

$$\begin{cases} V - k = G + 16ab \Lambda_{5-k} \times C & , \\ V_{k+4} = 2G - V_k & , \quad k = 1, \dots, 4, \end{cases}$$

por lo cual, según (8), (12) y (13) recibimos,

$$\begin{aligned} f(V_k) &= G + rC + \frac{a-1}{a}(G + 16ab \Lambda_{5-k} \times C - G - rC) \\ &= G + a^{-1}rC + 16(a-1)b\Lambda_{5-k} \times C \\ &= V_{k+8} \end{aligned} \quad (\text{Por (7) con } i = 8),$$

y

$$\begin{aligned} f(V_{k+4}) &= f(2G - V_k) = 2f(G) - f(V_k) \\ &= 2(G + a^{-1}rC) - V_{k+8} = V_{k+12}, \end{aligned}$$

para todo $k = 1, \dots, 4$, dado que f es también un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 y por tanto preserva las combinaciones lineales promedio. Por tanto $f(\mathfrak{P}_0) = \mathfrak{P}_1$, es decir, \mathfrak{P}_0 y \mathfrak{P}_1 son octágonos regulares afines y semejantes. Además \mathfrak{P}_1 y \mathfrak{P}_2 son polígonos congruentes, dado que $\mathfrak{P}_2 = 2G - \mathfrak{P}_1$ según (7). Es fácil verificar que todos los puntos en (7) satisfacen la ecuación (11), y por esto $\mathfrak{P}_{\frac{i}{8}}$ está en ese plano. Además, el centro de $\mathfrak{P}_{\frac{i}{8}}$ es en efecto (10), dado que esta ecuación es equivalente a la segunda ecuación en (7).

De (13) y (7) recibimos las siguientes combinaciones convexas,

$$\begin{aligned} V_{k+8} = f(V_k) &= \frac{a-1}{a}V_k + \frac{1}{a}W & , \quad k = 1, \dots, 8, \\ \frac{a-1}{a}V_k + \frac{1}{a}(2G - W) &= \begin{cases} V_{k+20} & , \quad \text{si } 1 \leq k \leq 4 \\ V_{k+12} & , \quad \text{si } 5 \leq k \leq 8 \end{cases} \end{aligned}$$

según las cuales los vértices de \mathfrak{P}_1 y los de \mathfrak{P}_2 están en el interior relativo de las aristas laterales $\overline{V_k W}$ y $\overline{V - k(2G - W)}$ de la dipirámide \mathbf{D} en (20), respectivamente, para todo $k = 1, \dots, 8$ (Ver Figura 2). Por tanto, la parte de \mathbf{D} comprendida entre los planos paralelos de \mathfrak{P}_1 y \mathfrak{P}_2 es un tronco de dipirámide regular octagonal afín, recta, de vértices V_1, \dots, V_{24} dispuestos como en la Figura 2, centro (según (7)),

$$\begin{cases} G = \frac{1}{2}(V_k + V_{k+4}) = \frac{1}{2}(V_{k+8} + V_{k+12}) - a^{-1}rC \\ = \frac{1}{2}(V_{k+16} + V_{k+20}) + a^{-1}rC & , \quad k = 1, \dots, 4, \end{cases}$$

bases superiores \mathfrak{P}_1 y \mathfrak{P}_2 de centros $G + a^{-1}rC$ y $G - a^{-1}rC$, respectivamente y base inferior \mathfrak{P}_0 de centro G . Hagamos entonces

$$\mathfrak{F} = \text{conv} \{V_1, \dots, V_{24}\}$$

la envolvente convexa de los vértices del tronco. Teniendo presente (4), . . . , (7) y las propiedades de los determinantes, es una mera rutina verificar que las caras trapezoidales de \mathfrak{F} listadas en (14), (16), y la cara $V_8 V_1 V_9 V_{16}$, están en los planos (15), (7) y (18).

Siendo cada X en \mathfrak{F} una combinación convexa de la forma

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=1}^{24} \lambda_j V_j = \sum_{i \in \{0,8,16\}} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{k+i} V_{k+i} + \lambda_{k+i+4} V_{k+i+4}) \\ &= \sum_{i \in \{0,8,16\}} \sum_{k=1}^4 \left\{ (\lambda_{k+i} - \lambda_{k+i+4}) V_{k+i} + 2\lambda_{k+i+4} G - 2\lambda_{k+i+4} (2 + \sqrt{2}) b \Delta(i + 3|i - 8| - 24) C \right\} \\ &\hspace{15em} \text{(Por la segunda ecuación en (7))} \\ &= \sum_{i \in \{0,8,16\}} \sum_{k=1}^4 \left\{ (\lambda_{k+i} - \lambda_{k+i+4}) (V_{k+i} - G) + (\lambda_{k+i} - \lambda_{k+i+4}) G \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda_{k+i+4} G - 2\lambda_{k+i+4} (2 + \sqrt{2}) b \Delta(i + 3|i - 8| - 24) C \right\} \\ &= \sum_{i \in \{0,8,16\}} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{k+i} + \lambda_{k+i+4}) G + \sum_{i \in \{0,8,16\}} \sum_{k=1}^4 \left\{ (\lambda_{k+i} - \lambda_{k+i+4}) (V_{k+i} - G) \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda_{k+i+4} (2 + \sqrt{2}) b \Delta(i + 3|i - 8| - 24) C \right\} \\ &= G + \sum_{i \in \{0,8,16\}} \sum_{k=1}^4 \left\{ (\lambda_{k+i} - \lambda_{k+i+4}) (V_{k+i} - G) - 2\lambda_{k+i+4} (2 + \sqrt{2}) b \Delta(i + 3|i - 8| - 24) C \right\} \\ &= G + \sum_{i \in \{0,8,16\}} \sum_{k=1}^4 \left\{ -(\lambda_{k+i} - \lambda_{k+i+4}) (2 + \sqrt{2}) b \Delta(i + 3|i - 8| - 24) C \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_{k+i} - \lambda_{k+i+4}) b [(1 - 2a)i + (3 - 2a)|i - 8| + 32a - 24] \Lambda_{5-k} \times C \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda_{k+i+4} (2 + \sqrt{2}) b \Delta(i + 3|i - 8| - 24) C \right\} \\ &= G + \sum_{i \in \{0,8,16\}} \sum_{k=1}^4 \left\{ (\lambda_{k+i} + \lambda_{k+i+4}) (2 + \sqrt{2}) b \Delta(i + 3|i - 8| - 24) C \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_{k+i} - \lambda_{k+i+4}) b [(1 - 2a)i + (3 - 2a)|i - 8| + 32a - 24] \Lambda_{5-k} \times C \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{24} = 1 \quad \text{y cada } \lambda_j \geq 0,$$

se desprende, teniendo en mente (4), (5) y (6),

$$\begin{aligned} \Lambda_j \cdot (X - G) &= \sum_{i \in \{0,8,16\}} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{k+i} + \lambda_{k+i+4}) b \{ (1 - 2a)i \\ &\quad + (3 - 2a)|i - 8| + 32a - 24 \} \det(\Lambda_j, \Lambda_{5-k}, C) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= 8b\Delta \left\{ [a(\lambda_1 - \lambda_5) + (a - 1)(\lambda_9 - \lambda_{13}) - (a - 1)(\lambda_{17} - \lambda_{21})] [(\sqrt{2} - 2)j \right. \\ &\quad + 2(1 - \sqrt{2})|j - 2| + (\sqrt{2} - 2)|j - 3| + 6 - \sqrt{2}] + [a(\lambda_2 - \lambda_6) \\ &\quad + (a - 1)(\lambda_{10} - \lambda_{14}) - (a - 1)(\lambda_{18} - \lambda_{22})] [-\sqrt{2}j + (\sqrt{2} - 2)|j - 2| \\ &\quad + 2(1 + \sqrt{2})] + [a(\lambda_3 - \lambda_7) + (a - 1)(\lambda_{11} - \lambda_{15}) \\ &\quad - (a - 1)(\lambda_{19} - \lambda_{23})] [-\sqrt{2}j + (2 - \sqrt{2})|j - 3| + 3\sqrt{2} - 2] \\ &\quad + [a(\lambda_4 - \lambda_8) + (a - 1)(\lambda_{12} - \lambda_{16}) - (a - 1)(\lambda_{20} - \lambda_{24})] [(\sqrt{2} - 2)j \\ &\quad \left. + (2 - \sqrt{2})|j - 2| + 2(\sqrt{2} - 1)|j - 3| + 4 - 4\sqrt{2}] \right\}, \end{aligned} \right. \quad (21)$$

$$(X - G) \cdot C = a^{-1}r \sum_{k=1}^8 (-\lambda_{k+8} - \lambda_{k+16}), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^4 |\Lambda_j \cdot (X - G)| + |(X - G) \cdot C| \leq 8b\Delta \left\{ [a|\lambda_1 - \lambda_5| + (a - 1)|\lambda_9 - \lambda_{13}| \right. \\ &\quad (a - 1)|\lambda_{17} - \lambda_{21}|] \sum_{j=1}^4 \left| (\sqrt{2} - 2)j + 2(1 - \sqrt{2})|j - 2| + (\sqrt{2} - 2)|j - 3| + 6 - \sqrt{2} \right| \\ &\quad + [a|\lambda_2 - \lambda_6| + (a - 1)|\lambda_{10} - \lambda_{14}| + (a - 1)|\lambda_{18} - \lambda_{22}|] \sum_{j=1}^4 \left| -\sqrt{2}j + (\sqrt{2} - 2)|j - 2| \right. \\ &\quad \left. + 2(1 + \sqrt{2}) \right| + [a|\lambda_3 - \lambda_7| + (a - 1)|\lambda_{11} - \lambda_{15}| + (a - 1)|\lambda_{19} - \lambda_{23}|] \sum_{j=1}^4 \left| -\sqrt{2}j \right. \\ &\quad \left. + (2 - \sqrt{2})|j - 3| + 3\sqrt{2} - 2 \right| + [a|\lambda_4 - \lambda_8| + (a - 1)|\lambda_{12} - \lambda_{16}| \\ &\quad + (a - 1)|\lambda_{20} - \lambda_{24}|] \sum_{j=1}^4 \left| (\sqrt{2} - 2)j + (2 - \sqrt{2})|j - 2| + 2(\sqrt{2} - 1)|j - 3| + 4 - 4\sqrt{2} \right| \Big\} \\ &\quad + a^{-1}r \sum_{k=1}^8 (\lambda_{k+8} - \lambda_{k+16}) \\ &= 8b\Delta \left\{ 2(2 + \sqrt{2}) [a|\lambda_1 - \lambda_5| + (a - 1)|\lambda_9 - \lambda_{13}| + (a - 1)|\lambda_{17} - \lambda_{21}|] \right. \\ &\quad + 2(2 + \sqrt{2}) [a|\lambda_2 - \lambda_6| + (a - 1)|\lambda_{10} - \lambda_{14}| + (a - 1)|\lambda_{18} - \lambda_{22}|] \\ &\quad + 2(2 + \sqrt{2}) [a|\lambda_3 - \lambda_7| + (a - 1)|\lambda_{11} - \lambda_{15}| + (a - 1)|\lambda_{19} - \lambda_{23}|] \\ &\quad \left. + 2(2 + \sqrt{2}) [a|\lambda_4 - \lambda_8| + (a - 1)|\lambda_{12} - \lambda_{16}| + (a - 1)|\lambda_{20} - \lambda_{24}|] \right\} + a^{-1}r(\lambda_9 + \dots + \lambda_{24}) \\ &= a^{-1}r \left\{ a|\lambda_1 - \lambda_5| + (a - 1)|\lambda_9 - \lambda_{13}| + (a - 1)|\lambda_{17} - \lambda_{21}| + a|\lambda_2 - \lambda_6| \right. \\ &\quad + (a - 1)|\lambda_{10} - \lambda_{14}| + (a - 1)|\lambda_{18} - \lambda_{22}| + a|\lambda_3 - \lambda_7| + (a - 1)|\lambda_{11} - \lambda_{15}| \\ &\quad + (a - 1)|\lambda_{19} - \lambda_{23}| + a|\lambda_4 - \lambda_8| + (a - 1)|\lambda_{12} - \lambda_{16}| + (a - 1)|\lambda_{20} - \lambda_{24}| \\ &\quad \left. + (\lambda_9 + \dots + \lambda_{24}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq a^{-1}r \left\{ a(\lambda_1 + \cdots + \lambda_8) + (a-1)(\lambda_9 + \cdots + \lambda_{24}) + (\lambda_9 + \cdots + \lambda_{24}) \right\} \\ &= a^{-1}ra(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{24}) = r, \\ &a|(X-G) \cdot C| \leq r(\lambda_9 + \cdots + \lambda_{24}) \leq r, \end{aligned}$$

y por ende, a la luz de (3), $\varphi(X-G) \leq r$, esto es, $\mathfrak{F} \subseteq S_r[G]$ la esfera cerrada de centro G y radio r respecto a la norma φ .

Por ser $\varphi(X-G)$ una función real convexa, propia y cerrada, para todo $X \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$F_r(S_r[G]) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(X-G) = r\}$$

([1] p. 59, Corollary 7.6.1).

Si $X \in \mathfrak{P}_1 = \text{conv} \{V_9, \dots, V_{16}\} \subseteq \mathfrak{F}$ existen $\lambda_9, \dots, \lambda_{16}$ no negativos, $\lambda_9 + \cdots + \lambda_{16} = 1$, tales que

$$X = 0V_1 + \cdots + 0V_8 + \sum_{j=9}^{16} \lambda_j V_j + 0V_{17} + \cdots + 0V_{24},$$

reduciéndose (22) a

$$(X-G) \cdot C = -a^{-1}r(\lambda_9 + \cdots + \lambda_{16}) = -a^{-1}r,$$

o equivalentemente,

$$a(X-G) \cdot C = -r,$$

por lo cual, según (3),

$$\varphi(X-G) = r \quad \text{y} \quad \text{conv} \{V_9, \dots, V_{16}\} \subseteq F_r(S_r[G])$$

Si $X \in \text{conv} \{V_1, V_2, V_{10}, V_9\} \subseteq \mathfrak{F}$ existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{10}, \lambda_9$ no negativos, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{10} + \lambda_9 = 1$, tales que

$$X = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + (0V_3 + \cdots + 0V_8) + \lambda_9 V_9 + \lambda_{10} V_{10} + (0V_{11} + \cdots + 0V_{24}),$$

reduciéndose las expresiones en (21) y (22) a

$$\begin{aligned} \Lambda_j \cdot (X-G) &= 8b\Delta \left\{ [a\lambda_1 + (a-1)\lambda_9] \left[(\sqrt{2}-2)|j-2| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\sqrt{2}-2)|j-3| + 6 - \sqrt{2} \right] + [a\lambda_2 + (a-1)\lambda_{10}] \left[-\sqrt{2}j + (\sqrt{2}-2)|j-2| + 2(1+\sqrt{2}) \right] \right\}, \\ (X-G) \cdot C &= -|(X-G) \cdot C| = -a^{-1}r(\lambda_9 + \lambda_{10}), \end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \cdot (X-G) &= |\Lambda_1 \cdot (X-G)| = 16b\Delta \{a\lambda_1 + (a-1)\lambda_9 + \sqrt{2}[a\lambda_2 + (a-1)\lambda_{10}]\}, \\ \Lambda_2 \cdot (X-G) &= |\Lambda_2 \cdot (X-G)| = 16b\Delta \{\sqrt{2}[a\lambda_1 + (a-1)\lambda_9] + a\lambda_2 + (a-1)\lambda_{10}\}, \\ \Lambda_3 \cdot (X-G) &= |\Lambda_3 \cdot (X-G)| = 16b\Delta \{a\lambda_1 + (a-1)\lambda_9\}, \\ \Lambda_4 \cdot (X-G) &= -|\Lambda_4 \cdot (X-G)| = -16b\Delta \{a\lambda_2 + (a-1)\lambda_{10}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^4 |\Lambda_j \cdot (X - G)| + |(X - G) \cdot C| \\
 &= 16(2 + \sqrt{2})b\Delta\{a\lambda_1 + a\lambda_2 + (a - 1)\lambda_9 + (a - 1)\lambda_{10}\} + a^{-1}r(\lambda_9 + \lambda_{10}) \\
 &= a^{-1}r\{a\lambda_1 + a\lambda_2 + (a - 1)\lambda_9 + (a - 1)\lambda_{10} + \lambda_9 + \lambda_{10}\} \\
 &= r(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_9 + \lambda_{10}) = 1, \\
 & \quad a|(X - G) \cdot C| = r(\lambda_9 + \lambda_{10}) \leq r,
 \end{aligned}$$

por esto, según (3), $\varphi(X - G) = r$ y $\text{conv} \{V_1, V_2, V_{10}, V_9\} \subseteq F_r(S_r[G])$.

Así, utilizando (21) y (22) en general se prueba que \mathfrak{P}_2 y todas las caras trapezoidales de \mathfrak{F} , $V_8V_1V_9V_{16}$ y las listadas en (14), (16), están contenidas en la frontera de $S_r[G]$. Por tanto

$$\mathfrak{F} \subseteq S_r[G] \quad \text{y} \quad F_r(\mathfrak{F}) \subseteq F_r(S_r[G]) \quad (23)$$

Si $X \in S_r[G] \sim \mathfrak{F}$ entonces X es un punto interior de $\mathbb{R}^3 \sim \mathfrak{F}$ por ser \mathfrak{F} cerrado, y el segmento $\overline{GX} \subseteq S_r[G]$ interseca a $F_r(\mathfrak{F})$ en un punto P entre G y X (por ser \mathfrak{F} un poliedro convexo), esto es, $P \in \text{int}(S_r[G])$ ([1] p. 45 Theorem 6.1) y además por (23) $P \in F_r(S_r[G])$ lo cual es imposible. Así que $S_r[G] \subseteq \mathfrak{F}$.

3. El tronco de dipirámide como cuerpo normado

Corolario 1. *Sea \mathfrak{F} un tronco de dipirámide regular octagonal afín recta, maciza y cerrada, de vértices V_1, \dots, V_{24} dispuestos como en la Figura 2, centralmente simétrico en el punto*

$$\begin{cases} G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+4}) \\ = \frac{1}{2}(V_j + V_{j+8}) \\ i = 1, \dots, 4; \quad j = 9, \dots, 16, \end{cases} \quad (24)$$

de base inferior la región cerrada octagonal regular afín $\mathfrak{P}_0 = \text{conv} \{V_1, \dots, V_8\}$ de centro G , y bases superiores las regiones cerradas octagonales regulares afines $\mathfrak{P}_1 = \text{conv} \{V_9, \dots, V_{16}\}$ y $\mathfrak{P}_2 = \text{conv} \{V_{17}, \dots, V_{24}\}$ de centros

$$\begin{cases} G_1 = \frac{1}{2}(V_{i+8} + V_{i+12}) & \text{y} \\ G_2 = 2G - G_1 = \frac{1}{2}(V_{i+16} + V_{i+20}), \\ i = 1, \dots, 4, \end{cases} \quad (25)$$

respectivamente. Si

$$a = \|V_1 - V_2\| \left(\|V_1 - V_2\| - \|V_9 - V_{10}\| \right)^{-1} \quad (26)$$

y
$$\nabla = \det(V_1 - G, V_2 - G, G_1 - G), \quad (27)$$

hagamos

$$W = aG_1 + (1 - a)G \quad (28)$$

y

$$\begin{cases} A &= \frac{a\|G_1 - G\|}{(2 + \sqrt{2})\nabla} (V_4 - G) \times (G_1 - G) , \\ B &= \frac{a\|G_1 - G\|}{(2 + \sqrt{2})\nabla} (V_3 - G) \times (G_1 - G) , \\ C &= \|G_1 - G\|^{-1} (G_1 - G) \end{cases} \quad (29)$$

Entonces,

(i) a y los vectores A, B, C satisfacen todas las hipótesis del Teorema ?? Además, si Λ_k es el vector representado en (5), entonces

$$\begin{cases} \Lambda_k &= \frac{a\|G_1 - G\|}{(2 + \sqrt{2})\nabla} (V_{5-k} - G) \times (G_1 - G) , \\ &k = 1, \dots, 4 \end{cases} \quad (30)$$

(ii) Referente a estos puntos a, C y Λ_k representados en (26), (29) y (30), el tronco de dipirámide \mathfrak{F} es la esfera cerrada de centro G y radio $a\|G_1 - G\|$, respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 definida en (3)

(iii) El tronco \mathfrak{F} proviene de la dipirámide regular afín de base \mathfrak{P}_0 , centro G y ápices W y $2G - W$

Demostración. Siendo de hecho \mathfrak{F} un poliedro no degenerado (la imagen automorfa afín de un tronco de dipirámide regular), entonces automáticamente el determinante ∇ definido en (27) es no nulo y $G_1 - G \neq 0$. Así, teniendo presentes (29) y (2) obtenemos, de acuerdo a las propiedades de los determinantes,

$$\Delta = \det (A, B, C) = \frac{-a^2\|G_1 - G\|^3}{(2 + \sqrt{2})^2\nabla} \neq 0, \quad (31)$$

por lo cual A, B y C son vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 . Además, según (29), C es unitario y satisface (4).

De (5) obtenemos, $\Lambda_1 = A, \Lambda_2 = B, \Lambda_3 = -A + \sqrt{2}B$ y $\Lambda_4 = -\sqrt{2}A + B$,

o bien, según (29),

$$\begin{aligned} \Lambda_3 &= \frac{a\|G_1 - G\|}{(2 + \sqrt{2})\nabla} \{-(V_4 - G) + \sqrt{2}(V_3 - G)\} \times (G_1 - G) \\ &= \frac{a\|G_1 - G\|}{(2 + \sqrt{2})\nabla} \{\sqrt{2}(V_1 - G) - (V_2 - G) - \sqrt{2}(V_1 - G) + 2(V_2 - G)\} \times (G_1 - G) \\ & \hspace{15em} \text{(por (2))} \\ &= \frac{a\|G_1 - G\|}{(2 + \sqrt{2})\nabla} (V_2 - G) \times (G_1 - G). \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que

$$\Lambda_4 = -\sqrt{2}A + B = \frac{a\|G_1 - G\|}{(2 + \sqrt{2})\nabla} (V_1 - G) \times (G_1 - G).$$

Se infiere, que el vector Λ_k definido en (5) tiene la representación (30), para todo $k = 1, \dots, 4$.

De acuerdo a las definiciones 1, las bases \mathfrak{P}_0 y \mathfrak{P}_1 del tronco \mathfrak{F} son octágonos regulares afines semejantes, y por esto sus lados correspondientes son proporcionales, esto es,

$$\frac{\|V_k - V_{k+1}\|}{\|V_{k+8} - V_{k+9}\|} = \frac{\|V_8 - V_1\|}{\|V_{16} - V_9\|}, \quad k = 1, \dots, 7 \quad (32)$$

Sea P el ápice de la dipirámide regular afín recta D , de centro G , de la cual proviene \mathfrak{F} , tal que G_1 (el centro de \mathfrak{P}_1) está entre G (el centro de \mathfrak{P}_0) y P . Entonces el rayo $\overrightarrow{PV_k}$, de punto inicial P , pasa por V_{k+8} , V_{k+8} entre P y V_k , para todo $k = 1, \dots, 8$. Pero entonces existe un escalar λ_k , $0 < \lambda_k < 1$, tal que

$$V_{k+8} = \lambda_k V_k + (1 - \lambda_k)P, \quad (33)$$

o equivalentemente,

$$V_{k+8} - P = \lambda_k (V_k - P),$$

lo que implica

$$\begin{cases} \frac{\|P - V_k\|}{\|P - V_{k+8}\|} = \frac{1}{\lambda_k} > 1, \\ k = 1, \dots, 8 \end{cases} \quad (34)$$

Ahora, los triángulos $PV_k V_{k+1}$ y $PV_{k+8} V_{k+9}$ son semejantes, por esto,

$$\frac{\|V_k - V_{k+1}\|}{\|V_{k+8} - V_{k+9}\|} = \frac{\|P - V_k\|}{\|P - V_{k+8}\|}, \quad k = 1, \dots, 7 \quad (35)$$

De (32), (34) y (35) concluimos

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_k = \frac{\|V_{k+8} - V_{k+9}\|}{\|V_k - V_{k+1}\|} \\ = \frac{\|V_{16} - V_9\|}{\|V_8 - V_1\|} < 1, \quad k = 1, \dots, 7, \end{cases} \quad (36)$$

y por ende, el real λ en (26) está bien definido y

$$A = \frac{1}{1 - \lambda} > 1 \quad (37)$$

Dado que G_1 está entre G y P , existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$G_1 = \alpha G + (1 - \alpha)P, \quad (38)$$

o equivalentemente

$$G_1 - P = \alpha(G - P),$$

lo que implica

$$\|G_1 - P\| = \alpha\|G - P\| \quad (39)$$

Por otro lado los triángulos $P G V_1$ y $P G_1 V_9$ son semejantes, y por tanto

$$\frac{\|P - V_1\|}{\|P - V_9\|} = \frac{\|P - G\|}{\|P - G_1\|} = \frac{1}{\alpha}, \quad (\text{por (39)})$$

De aquí y de (35), (36), (37) se infiere

$$\alpha = \lambda = \frac{a-1}{a} \quad , \quad (40)$$

obteniéndose en (37)

$$P = aG_1 + (1-a)G \quad ,$$

justo el punto W en (28). Por simetría, el otro ápice de la dipirámide D es $2G - W$.

Ya hemos establecido que los puntos a, A, B, C y Λ_k , definidos en (26), (29) y (30), satisfacen todas las hipótesis del Teorema 1, bajo los cuales consideramos la norma φ sobre \mathbb{R}^3 introducida en (3). Advirtiendo que las combinaciones lineales promedio en (2) son válidas para todo octágono regular afín $V'_1 \dots V'_8$ en \mathbb{R}^3 de centro G' , entonces los vértices de \mathfrak{P}_0 (con $V'_k = V_k$ $k = 1, \dots, 8$) y \mathfrak{P}_1 (con $V'_k = V_{k+8}$ $k = 1, \dots, 8$) también satisfacen esas combinaciones lineales. Además, según (8),

$$B = \frac{-(2 + \sqrt{2})\nabla}{16a^2\|G_1 - G\|^2} \quad (41)$$

Así, de acuerdo al Teorema 1, con $r = a\|G_1 - G\|$, la esfera cerrada $S_{a\|G_1 - G\|}[G]$ de centro G y radio $a\|G_1 - G\|$, respecto a la norma φ es un tronco de dipirámide regular octagonal afín recta, maciza y cerrada, centralmente simétrica en G , de vértices V''_1, \dots, V''_{24} dispuestos, análogamente, como en la Figura 2, entonces según (7),

$$\begin{aligned} V''_1 &= G + 16ab\Lambda_4 \times C \\ &= G - \frac{(2 + \sqrt{2})\nabla}{a\|G_1 - G\|^2} \Lambda_4 \times C && \text{(por (41))} \\ &= G - \|G_1 - G\|^{-2} \{ (V_1 - G) \times (G_1 - G) \} \times (G_1 - G) && \text{(por (30) y (29))} \\ &= G - \|G_1 - G\|^{-2} \left\{ [(V_1 - G) \cdot (G_1 - G)](G_1 - G) - \|G_1 - G\|^2 (V_1 - G) \right\} \\ &= G + (V_1 - G) = V_1 \quad , \end{aligned}$$

análogamente $V''_2 = V_2$, teniendo en mente la expresión

$$(V_i - G) \cdot (G_1 - G) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \quad (42)$$

por ser

$$W - G = a(G_1 - G) \quad \text{(Ver (28))}$$

un vector normal al plano de $\mathfrak{P}_0 = \text{conv} \{V_1, \dots, V_8\}$, dado que la dipirámide D (de la cual procede \mathfrak{F}) es recta. Pero entonces, según (2),

$$V''_k = V_k \quad , \quad k = 1, \dots, 8 \quad (43)$$

Igualmente, de (7) recibimos

$$\begin{aligned} V''_{k+8} &= G + 16(2 + \sqrt{2})b\Delta C + 16b(a-1)\Lambda_{5-k} \times C \\ &= G + a^{-1}rC + 16b(a-1)\Lambda_{5-k} \times C && \text{(por (41) y (31))} \\ &= G + (G_1 - G) - \frac{(2 + \sqrt{2})(a-1)\nabla}{a^2\|G_1 - G\|^2} \Lambda_{5-k} \times C && \text{(por (29)),} \end{aligned}$$

esto es, reduciendo a una sola igualdad,

$$\begin{cases} V''_{k+8} = G_1 - \frac{(2 + \sqrt{2})(a - 1)\nabla}{a^2\|G_1 - G\|^2} \Lambda_{5-k} \times C, \\ k = 1, \dots, 4, \end{cases} \quad (44)$$

en particular,

$$\begin{aligned} V''_9 &= G_1 - \frac{a - 1}{\alpha} \|G_1 - G\|^{-2} \{(V_1 - G) \times (G_1 - G)\} \times (G_1 - G) && \text{(por (30) y (29))} \\ &= G_1 - \frac{a - 1}{\alpha} \|G_1 - G\|^{-2} \left\{ [(V_1 - G) \cdot (G_1 - G)](G_1 - G) - \|G_1 - G\|^2(V_1 - G) \right\} \\ &= G_1 + \frac{a - 1}{\alpha} (V_1 - G) && \text{(por (42))} \\ &= a^{-1} \left\{ [\alpha G_1 + (1 - a)G] + (a - 1)V_1 \right\} \\ &= a^{-1} \left\{ W + (a - 1)V_1 \right\} && \text{(por (28))} \\ &= \left(1 - \frac{1}{a}\right)V_1 + \frac{1}{a}W = \alpha V_1 + (1 - a)W && \text{(por (40))} \\ &= V_9 && \text{(por (33), (36) y (40))} \end{aligned}$$

Análogamente, aplicando (44), se demuestra que $V''_{10} = V_{10}$ y por ende, de acuerdo a (2),

$$V''_k = V_k \quad k = 9, \dots, 16$$

De aquí y (43) se infiere que

$$V''_k = V_k \quad k = 1, \dots, 16 \quad (45)$$

También por la simetría de \mathfrak{F} ,

$$\begin{cases} V''_{j+8} = 2G - V''_j = 2G - V_j && \text{(por (45))} \\ = 2G - V_j = V_{j+8} && \text{(por (24)),} \\ j = 9, \dots, 16 \end{cases}$$

De aquí y (45) concluimos que

$$V''_k = V_k \quad k = 1, \dots, 24,$$

es decir, los vértices de $S_{\alpha\|G_1 - G\|}[G]$ son, justamente, V_1, \dots, V_{24} , y por esto, $S_{\alpha\|G_1 - G\|}[G] = \mathfrak{F}$

Bibliografía

- [1] ROCKAFELLAR, Ralph T. *Convex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1972.