Nuevos puntos y rectas notables de un triángulo

Alberto Rafael Sánchez Rivas
Docente Institución Educativa No. Tres: Santa Catalina de sena Coordinador del Proyecto Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas MEN
Maicao, La Guajira, Colombia
alrasa0420@yahoo.es

Resumen

Se presenta un modelo geométrico para la construcción de un segmento llamado *Escintor*, que divide a un triángulo en dos poligonales de igual perímetro, además se demuestra la existencia de otras rectas notables en un triángulo denominadas Mescintriz y Vescintriz con propiedades similares a las otras rectas ya conocidas; así mismo se muestra como el Mescincentro y el Vescincentro, puntos donde se intersecan las Mescintrices y las Vescintrices respectivamente, están alineados con el Baricentro y el Incentro en una recta que guarda mucha semejanza con la Recta de Euler.

Introducción

En el congreso IBEROCABRI 2006 realizado en Bogotá Colombia escuché la exposición del trabajo de investigación que venían realizando los profesores Eugenio Teherán y Carmen Toscano de la Escuela Normal de Sucre sobre "Exploración de algunos aspectos no convencionales del triángulo con Cabri"con el objetivo de construir un modelo geométrico adecuado y funcional que posibilitara la validación de los conceptos de escintor, mescintor, escintriz, mescintriz, vescintriz y medianiz, este trabajo lo realizaron con un grupo de estudiantes del quinto semestre del programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Sucre, los investigadores limitaron la exploración de éstos conceptos al triángulo equilátero y concluyeron que "la situación presentó varios matices, inicialmente un problema de existencia, luego de unicidad y posteriormente de el de generalización por modelos algebraicos".

El presente estudio es motivado por el reto que nos plantearon los docentes investigadores de la "Exploración de algunos aspectos no convencionales del triángulo con Cabri"al dejar abierta la posibilidad de seguir explorando estos nuevos conceptos, y tiene como objetivo encontrar un modelo geométrico que determine la construcción y propiedades de los escintores en un triángulo.

1. Conceptos claves

Escintor: Es el segmento de recta inscrito en el triángulo que divide el perímetro del mismo en dos partes iguales.

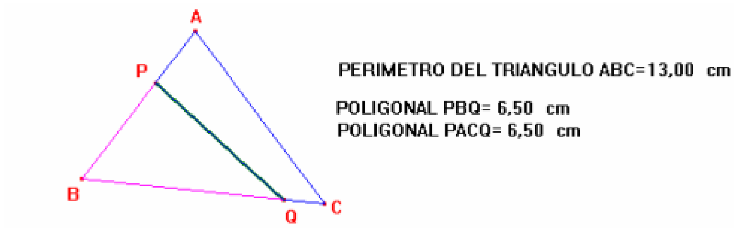
Mescintor: Escintor que parte del punto medio de uno de los lados.

Vescintor: Escintor que parte de uno de los vértices del triángulo.

Escintriz: La recta que divide al triángulo en dos regiones poligonales de igual perímetro.

Mescintriz: Escintriz que pasa por el punto medio de uno de los lados.

Vescintriz: Escintriz que pasa por uno de los vértices del triángulo. Según definición el Escintor de un triangulo ABC es un segmento cuyos extremos pertenecen al triángulo y divide a éste en dos poligonales de igual perímetro tal como lo ilustra la figura:

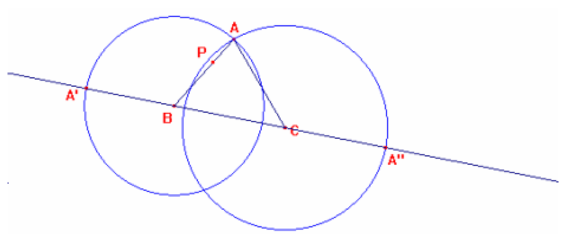


El segmento PQ es un escintor del triángulo ABC.

A continuación se expone un método para construir los escintores de un triángulo (puede usar cabri II ó papel, lápiz, regla y compás) el cual nos garantiza su existencia y aun más, que el número de éstos en un triángulo es infinito, veamos:

2. Construcción de Escintores

1. Construya el triángulo ABC y un punto P sobre uno de sus lados (AB).
2. Trace la recta BC.
3. Construya una circunferencia centrada en B y radio hasta A, determine el punto de intersección de la circunferencia y la recta BC a la izquierda de B y llámelo A'.
4. Construya una circunferencia centrada en C y radio hasta A, determine el punto de intersección de la circunferencia y la recta BC a la derecha de C y llámelo A''.
5. Trace el segmento $A'A''$.



Hasta ahora tenemos que:

$$BA = BA'$$
$$CA = CA''$$
$$Perim.\Delta ABC = BA + CA + BC$$

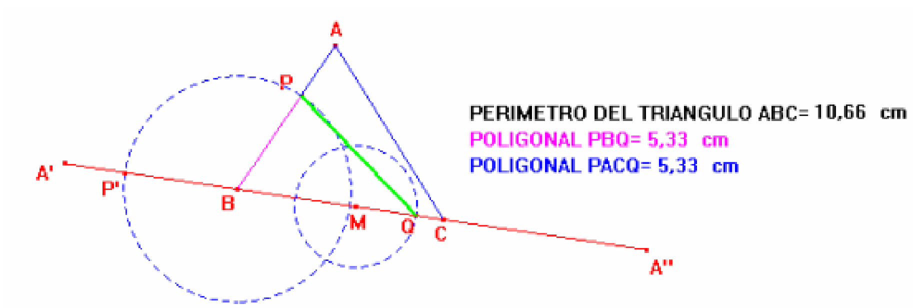
Además que:

$$A'A'' = A\prime B + BC + CA'' = BA + BC + CA = BA + CA + BC = Perim.\Delta ABC$$

Con lo que se ha "segmentizado"el perímetro del triángulo ABC, es decir se ha construido un segmento cuya longitud es igual al perímetro del triángulo.

1. Determine el punto medio M del segmento $A'A''$.
2. Construya una circunferencia con centro en B y radio hasta P, determine el punto de intersección de esta circunferencia y el segmento $A'A''$ entre los puntos A' y B, llámelo P'.
3. Construya una circunferencia con centro en M y radio $A'P'$ y determine la intersección de ésta con el segmento $A'A''$ entre M y A'', llámelo Q,
4. Si $MQ < MC$ trace el segmento PQ y si $MQ > MC$ trace otra circunferencia con centro en C y radio hasta Q determinando el punto de intersección de esta circunferencia y el lado AC del triángulo, llámelo Q' y trace el segmento PQ'.

Este segmento PQ (o PQ') es un escintor ya que la poligonal PBQ (o $PBCQ'$) tiene un perímetro igual a la mitad del perímetro del triángulo ABC y por consiguiente igual a la poligonal $PACQ$, tal como se muestra a continuación.



$$\begin{aligned}
&AP = A'B'\\
&PB = P'B'\\
&AP + PB + BM = A'P' + P'B + BM = \frac{A'A''}{2} = \frac{Perim\Delta ABC}{2}
\end{aligned}$$

Ahora como $A'P' = MQ$, se cumple que:

$$\begin{aligned}
\frac{Perim\Delta ABC}{2} &= A'P' + P'B + BM = MQ + PB + BM = PB + BM + MQ\\
&= PB + BQ = Poligonal\ (PBQ)
\end{aligned}$$

Ya que al ser colineales B, M y Q se verifica que $BM + MQ = BQ$, en conclusión se tiene que:

$$\frac{Perim\Delta ABC}{2} = Poligonal(PBQ) = Poligonal(PACQ)$$

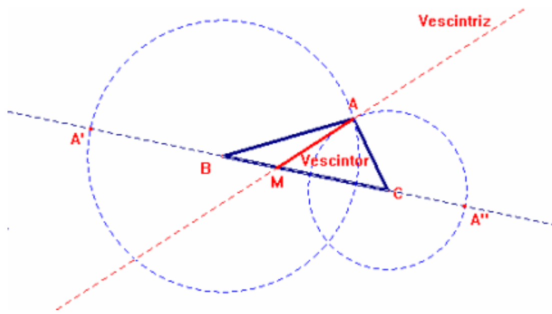
Si en Cabri *arrastramos* los vértices del triángulo observaremos que las propiedades del segmento PQ (o PQ') como escintor se mantienen invariantes, lo cual desde el punto de vista de la geometría dinámica se constituye en un argumento poderoso para validar la construcción y la existencia de los escintores, como también que estos son infinitos, ya que es evidente que para cada punto de un triángulo podemos encontrar en él otro punto tal que el segmento que los une divide al triángulo es dos poligonales de igual perímetro.

3. Vescintor, Vescintriz y Vescincentro

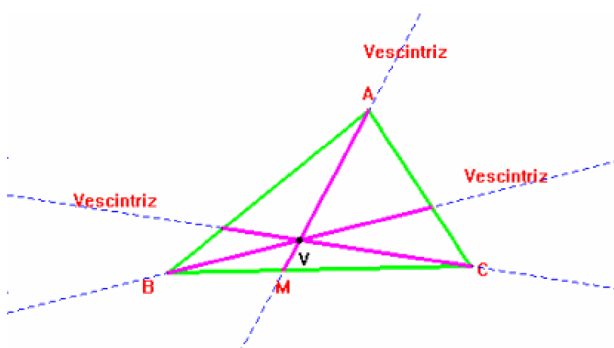
Al Escintor que tiene uno de sus extremos en un vértice del triángulo se le llama *Vescintor*, y a la recta que lo contiene *Vescintriz*.

Para su construcción se sigue un proceso similar que usamos al construir el vescintor pero el punto P será uno de los vértices del triángulo y el punto Q será el punto M sobre el lado opuesto de A.

Observemos esto en la figura.



Evidentemente todo triángulo tendrá tres vescintrices y de hecho tres vescintores que concurren en un punto que llamaremos *vescincentro* V tal como lo muestra la siguiente figura.



4. Mescintor, Mescintriz y Mescincentro

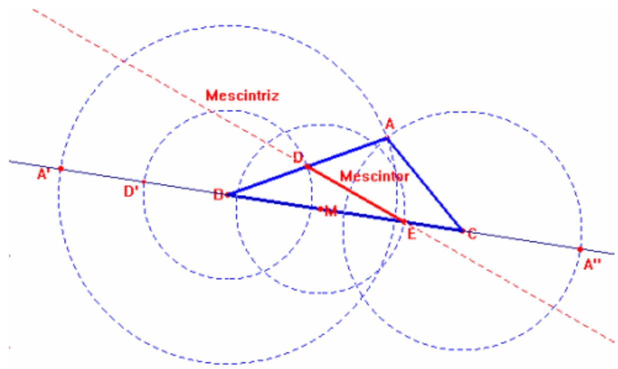
Se conoce como *Mescintor* al escintor que tiene por extremo el punto medio de uno de los lados del triángulo, y a la recta que lo contiene se le llama *Mescintriz*.

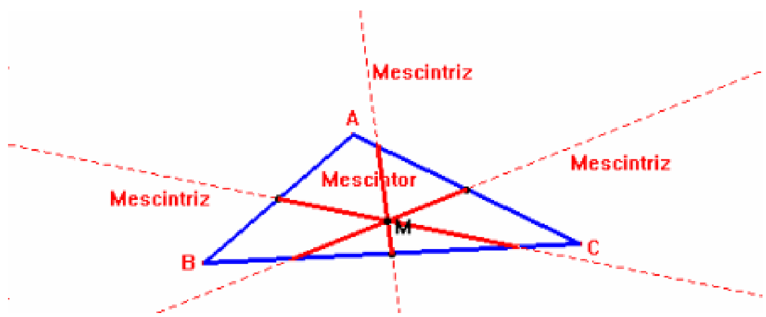
La construcción del Mescintor se hace de forma análoga al que se uso en la construcción de los escintores y vescintores pero partimos del punto medio de uno de los lados del triángulo.

Veámoslo en la siguiente figura:

Un triángulo tendrá tres Mescintores y en consecuencia tres Mescintrices las cuales concurren en un punto al que denominaremos *Mescincentro* M, observemos la figura:

Hasta ahora se ha demostrado la existencia de otros dos puntos notables en un triángulo como lo son el Vescincentro y el Mescincentro, estudiemos ahora que relaciones hay entre éstos y los

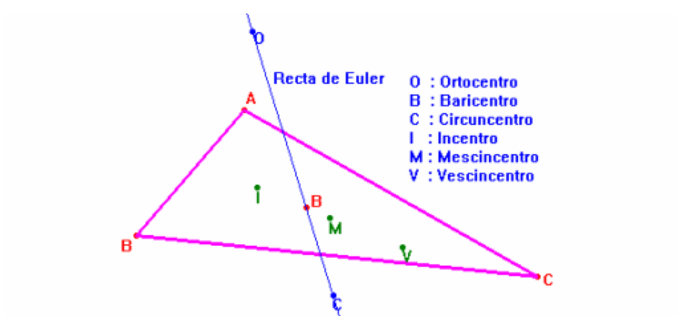




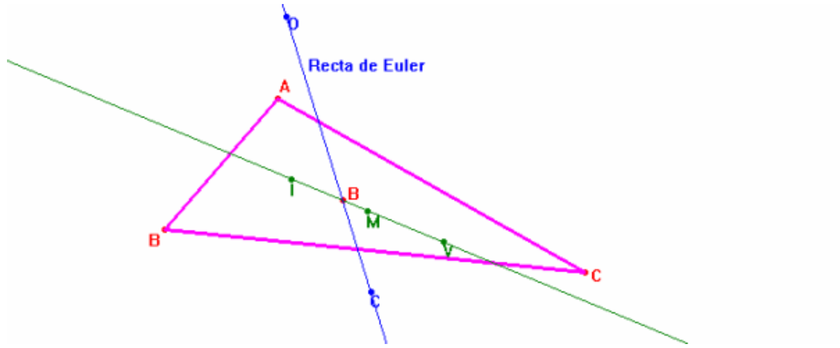
puntos tradicionalmente conocidos como son el Baricentro, Ortocentro, Incentro y Circuncentro.

Leonard Euler encontró hace mucho tiempo que el Baricentro, el Ortocentro y el Circuncentro estaban alineados, y a la recta que los contiene se le llamó ***La Recta De Euler***.

Construyamos estos seis puntos notables en un triángulo ABC:



En la figura anterior se muestra la colinealidad de O, B y C, pero además resulta interesante el que los nuevos puntos notables V y M están alineados con B e I obteniéndose una nueva recta que los contiene y que guarda características semejantes a las de la Recta de Euler, véalo en la siguiente figura:



Probemos que en un triángulo el Baricentro B, Incentro I, Vescincentro V y Mescincentro están alineados y además:

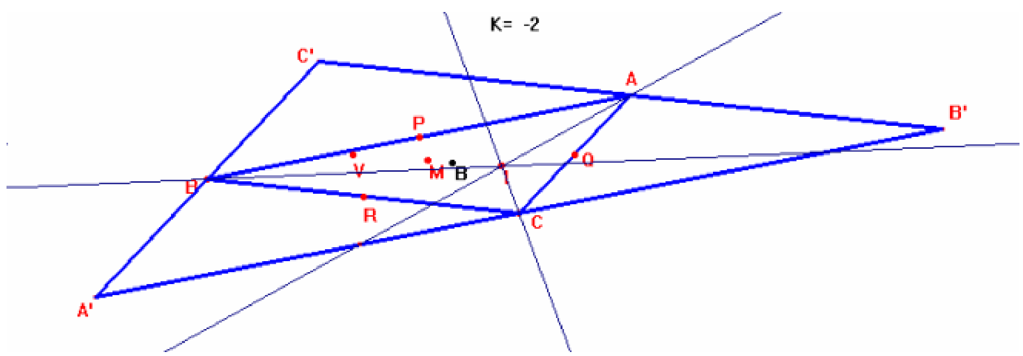
$$BI = -2BM \qquad \text{y} \qquad BV = -2BI$$

Prueba:

Para probar que B, I, M y V están alineados utilizaremos el concepto de Homotecia.

Se llama **homotecia** de centro O y razón k (distinto de cero) a la transformación que hace corresponder a un punto A otro A', alineado con A y O, tal que: $OA' = k \cdot OA$. Si $k > 0$ se llama homotecia directa y si $k < 0$ se llama homotecia inversa.

Consideremos el triángulo ABC en el cual se han construido el Baricentro B, Incentro I, Mescincentro M y Vescincentro V, y apliquemos una homotecia H con centro en B y de factor $k = -2$



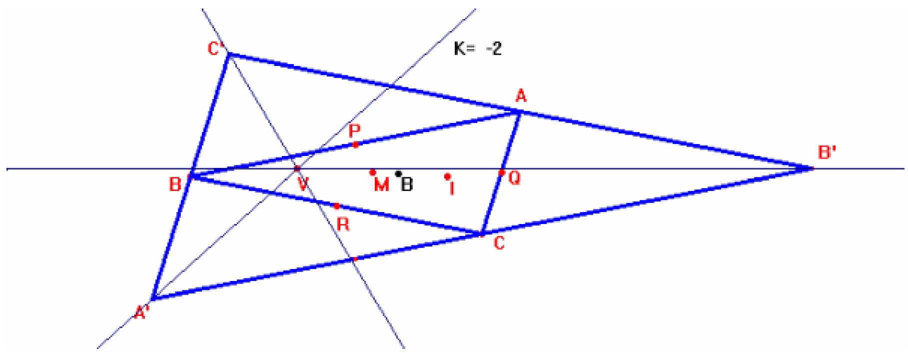
Se obtiene que $H(ABC) = A'B'C'$ en donde $H(A) = A'$, $H(B) = B'$ y $H(C) = C'$

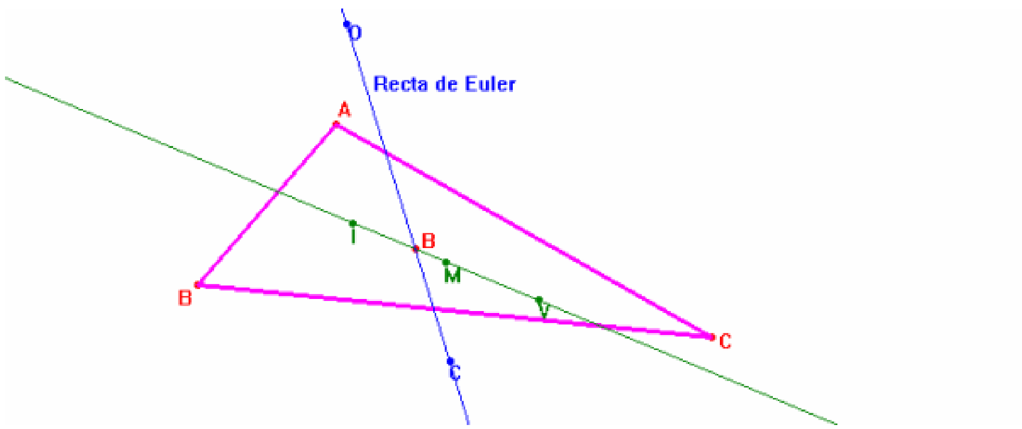
Al trazar las mescintrices del triángulo $A'B'C'$ éstas se cortan en el punto I, es decir que el mescincentro del $A'B'C'$ es el Incentro de ABC con lo que encuentra que:

$H(M) = I$; Por definición de homotecia se tiene que $BI = -2BM$ y por tanto los puntos B, I y M están alineados.

Por otro lado si trazamos las bisectrices de $A'B'C'$ éstas se cortan en el punto V como se muestra en la siguiente figura:

Es decir el Incentro de $A'B'C'$ es el vescincentro de ABC, nuevamente por definición de homotecia se encuentra que $H(I) = V$ luego $BV = -2BI$; por lo tanto los punto B, I y V están alineados, ahora como B e I están alineados con M y con V podemos concluir que los cuatro puntos son colineales.





5. Conclusiones

Hemos llegado a los siguientes resultados en este estudio:

- Se encontró un modelo geométrico para la construcción de las escintrices y escintores de un triángulo.
- Todo triángulo posee tres vescintrices que se intersecan en un mismo punto V (vescincentro).
- Todo triángulo tiene tres mescintrices que se intersecan en un mismo punto M (mescincentro).
- Los puntos notables Baricentro, Incentro, Mescincentro y Vescincentro de un triángulo son colineales, y la recta que los contiene posee características similares a las de la recta de Euler.

Bibliografía

[1] THERAN Eugenio, TOSCANO Carmen, *Exploración de algunos aspectos no convencionales del triángulo con Cabri*, 2006.

[2] “Homotecia” *Microsoft*® *Encarta*® 2006 [DVD]. Microsoft Corporation, 2005.