TENSORES Y GENERACIÓN DE GEOMETRÍAS

Isabel Amaya Barrera
Profesora Universidad Distrital
Francisco José de Caldas
Bogotá D.C, Colombia
iamaya@udistrital.edu.co

Carlos Julio Arrieta
Profesor Universidad Distrital
Francisco José de Caldas
Bogotá D.C, Colombia
cjulio@udistrital.edu.co

Resumen

En este escrito se estudia, de manera simple, los tensores para proporcionar la idea de métricas tensoriales que inducen naturalmente las Geométrias de tipo diferenciables tales como: Euclideana, Hiperbólica, Riemanniana, Semi-Riemanniana y Simpléctica entre otras, escogiendo un tensor apropiado para medir (métrica) en cada uno de los tangentes de una superficie regular o de una variedad diferenciable.

1. Introducción

Son muchas las razones que los matemáticos tienen para estudiar los campos tensoriales o simplemente tensores; la versión del Teorema Fundamental del Cálculo sobre variedades de dimensión n incluye tensores alternantes que en su forma elemental se conoce como Regla de *Barrow-Newton* y se sintetiza en la fórmula.

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

De manera un poco mas general, recibe el nombre de teorema de Stokes, y en él los papeles de f y f' están representados por una forma diferencial (o tensor alternante) ω y su diferencial exterior $d\omega$; los papeles del intervalo [a,b] y del par de puntos $\{a, b\}$ son representados por un subconjunto D de una variedad orientada con orientación en el borde, ∂D, inducida por la de D y se resume en la fórmula:

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

Este resultado, además de su interés en el cálculo, proporciona interpretaciones ilustrativas a ciertos conceptos de la física, como, por ejemplo, la divergencia y el rotacional y forma parte de los fundamentos para desarrollar las herramientas mas importantes de la Geometría Diferencial.

También, el estudio de las derivadas de orden superior sobre objetos geométricos se puede realizar con cierta facilidad usando la terminología tensorial.

En este escrito nos limitaremos a estudiar los tensores para presentar algunas geometrías, de forma elemental y de tipo diferenciable, tales como: Euclideana, Hiperbólica, Riemanniana, Semi-Riemanniana y Simpléctica entre otras, escogiendo un tensor apropiado para medir (métrica) en cada uno de los tangentes de una superficie regular o de una variedad diferenciable.

2. Una nota sobre espacio dual

Sea V un espacio vectorial real. Como es usual V^* denotará el espacio vectorial dual de V, esto es, el espacio vectorial formado por todas las transformaciones (o funcionales) lineales $T : V \to \mathbb{R}$. Además si $\overline{e} = \{e_i\}_{i\in I}$ es una base algebraica para V, es decir, cualquier elemento de V es combinación lineal finita de elementos de $\overline{e} = \{e_i\}_{i\in I}$, entonces su base algebraica dual asociada (de V^*) es $\overline{e}^* = \{e^j\}_{j\in J}$ es tal que

$$e^j(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En la teoría de tensores los elementos con superíndices siempre estarán en el dual, por ejemplo

$$v^i \in V^*, \qquad u^j \in U^*$$

Además, obsérvese que si $v \in V, entonces$

$$v = \sum_{i=1}^{n} e^i(v)e_i$$

y para cada $\alpha \in V^*$,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i)e^i.$$

Empleando la convención de la suma, en donde ésta se invoca cuando un índice está repetido inferior y superiormente, estas expresiones se convierten en

$$v = e^i(v)e_i \quad \text{y} \quad \alpha = \alpha(e_i)e^i.$$

Se puede enviar V en $V^{**} = L(V^*, \mathbb{R})$ en donde a cada $v \in V$ se le asocia $v^{**} \in V^{**}$, definido por $v^{**}(\alpha) = \alpha(v)$ para todo $\alpha \in V^*$. En el caso en que V tiene dimensión finita V^{**} y V tienen la misma dimensión, así, la función $V \to V^{**}$ es uno a uno y por lo tanto un isomorfismo. En dimensión infinita, se dice que V es *reflexivo* cuando la función $V \to V^{**}$ es un isomorfismo. Por identificación se tiene que

$$e_j(e^i) = e_j^{**}(e^i) = e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

3. Tensores en espacios vectoriales

Este tema también se puede consultar en [8] página 54. Si $V_1, \cdots, V_n$ son espacios vectoriales sobre un campo K, donde $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, existen muchas funciones

$$t : V_1 \times \cdots \times V_n \to K$$

con características muy especiales y de gran utilidad en la Matemática según el caso. En ésta sección se estudiará el caso cuando t es una función multilineal, esto es, lineal en cada componente.

En particular para $n = 2$, t debe satisfacer:

$$\begin{aligned} t(x_1 + x_2, y) &= t(x_1, y) + t(x_2, y) \\ t(x, y_1 + y_2) &= t(x, y_1) + t(x, y_2) \\ t(cx, y) &= ct(x, y) = t(x, cy) \end{aligned}$$

Para todo x, x_1, x_2 en V_1 y todo y, y_1, y_2 en V_2.

Por comodidad este estudio se presentará sobre $\mathbb{R}$ (es decir cuando $K = \mathbb{R}$). El conjunto de todas las funciones multilineales en $V_1 \times \cdots \times V_n$ forman un espacio vectorial con la suma y el producto por escalares definidas entre funciones como en Cálculo.

Definición 3.1. *Sean $V, V_1, \cdots, V_n$ espacios vectoriales*

(a) Un tensor sobre $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ es una función multilineal

$$t : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}.$$

El espacio vectorial de todos los tensores definidos en $V_1 \times \cdots \times V_n$ se denotan con $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

(b) En particular, sea $T^r_s(V)$ el subespacio vectorial de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ formado por todos los tensores de la forma

$$t : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r\text{-copias}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s\text{-copias}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Los elementos de $T^r_s(V)$ se llaman tensores de tipo $\binom{r}{s}$ sobre V, contravariante de orden r y covariante de orden s.

Definición 3.2 (Producto tensorial).

(a) Sean $V_1, \cdots, V_n$ y $W_1, \cdots, W_m$ espacios vectoriales y los tensores:

$$\begin{aligned} t_1 &: V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R} \\ t_2 &: W_1 \times \cdots \times W_m \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

entonces el producto tensorial $t_1 \otimes t_2$ es la función multilineal dada por

$$t_1 \otimes t_2(v_1, \cdots, v_n, w_1, \cdots, w_m) = t_1(v_1, \cdots, v_n)t_2(w_1, \cdots, w_m)$$

con $v_i \in V_i$, y $w_j \in W_j$.

(b) En particular, si $t_1 \in T^{r_1}_{s_1}(V)$ y $t_2 \in T^{r_2}_{s_2}(V)$, el producto tensorial

$$t_1 \otimes t_2 \in T^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(V)$$

está dado por

$$\begin{aligned} &t_1 \otimes t_2(\beta^1, \cdots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \cdots, \gamma^{r_2}, f_1, \cdots, f_{s_1}, g_1, \cdots, g_{s_2}) \\ &\qquad = t_1(\beta^1, \cdots, \beta^{r_1}, f_1, \cdots, f_{s_1})t_2(\gamma^1, \cdots, \gamma^{r_2}, g_1, \cdots, g_{s_2}) \end{aligned}$$

donde $\beta^j, \gamma^j \in V^*$ y $f_1, g_2 \in V$.

Reemplazando $\mathbb{R}$ por un espacio F se obtiene $T_s^r(V;F)$, el espacio tensorial con valores en F de tipo $\binom{r}{s}$.

Ahora obsérvese que el producto tensorial no es conmutativo y satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3) &= (t_1 \otimes t_2) \otimes t_3, \\ (t_1 + t_2) \otimes t_3 &= t_1 \otimes t_3 + t_2 \otimes t_3, \\ t_1 \otimes (t_2 + t_3) &= t_1 \otimes t_2 + t_1 \otimes t_3, \\ (ct_1) \otimes t_2 &= c(t_1 \otimes t_2) = t_1 \otimes (ct_2) \end{aligned}$$

para todo t_1, t_2, t_3 tensores y $c \in \mathbb{R}^n$. Además,

(a) $T_1^0(V) = V^*$,

(b) $T_0^1(V) = V^{**}$,

(c) $T_2^0(V) = L(V;V^*)$

Por convención se toma $T_0^0(V;F) = F$.

Teorema 3.1. *Sea $\overline{v}^* = \{v^i\}_{i\in I}$ base algebraica para V^* dual de $\overline{v} = \{v_p\}_{p\in P}$ base dual para V y $\overline{w}^* = \{w^j\}_{j\in J}$ base algebraica para W^* dual de $\overline{w} = \{w_q\}_{q\in Q}$ base algebraica para W. Entonces*

$$\left\{v^i \otimes w^j : i \in I \;\; j \in J\right\}$$

es una base algebraica para $V \otimes W$.

Nota. El teorema también afirma que si $\dim V = k$ y $\dim W = s$, via isomorfismo, el conjunto

$$\left\{v_p \otimes w_q : p = 1, \cdots, q \;\; j = 1, \cdots, p\right\}$$

representa una base de $V \otimes W$ ya que espacios vectoriales de igual dimensión finita son isomorfos y $\dim V \otimes W = ks$.

Demostración. Se debe demostrar que los elementos de la forma

$$v^i \otimes w^j$$

de $V \otimes W$ son linealmente independientes y que generan a $V \otimes W$. Entonces, supóngase que

$$t_{ij} v^i \otimes w^j = 0.$$

Aplicando esto a (v_i, w_j) se tiene que $t_{ij} = 0$.

Para terminar, sea $t \in V \otimes W$,

$$t = t_{ij} \;\; (v^i \otimes w^j),$$

luego

$$t_{ij} = t(v_i, w_j),$$

entonces

$$t = t(v_i, w_j)\; v^i \otimes w^j$$

Lo que termina la demostración del teorema. $\square$

Corolario 3.1.1. *Sea V un espacio vectorial, $\{e_i\}_{i\in I}$ una base algebraica para V, $\{e^j\}_{j\in J}$ su base algebraica dual para V^* y $\{e_k^{**}\}_{k\in K}$ base algebraica de V^{**} dual de $\{e^j\}_{j\in J}$. Entonces una base algebraica para $T_s^r(V)$ está dada por*

$$\left\{e_{k_1}^{**}\otimes\cdots\otimes e_{k_r}^{**}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}\right|\left. k_i\in K,\ j_i\in J\right\} \tag{1}$$

El espacio tensorial $T_s^r(V)$ tiene también la siguiente notación importante:

$$V^*\otimes\ldots\otimes V^*\otimes V\otimes\ldots\otimes V \tag{2}$$

donde se presentan r copias de V^* y s copias de V.

Nota

(a) Si $\dim V=n$, entonces la dimensión de $T_s^r(V)$ es n^{r+s}. y cada e_k^{**} se identifica con e_k

(b) El lector que tiene cierto conocimiento de Análisis Funcional puede darse cuenta fácilmente que si V es un espacio de Hilbert, o más general un espacio de Banach reflexivo la base dada en (1) se representa con

$$\left\{e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}\right|\left. k_i\in K,\ j_i\in J\right\} \tag{3}$$

4. Ejemplos

Ejemplo 4.1. Sean

$$e_1=(1,0,\cdots,0),\ e_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,\cdots,0,1)$$

los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $\{e^i,\ 1\le i\le n\}$ base para $(\mathbb{R}^n)^*$ dual a $\{e_1,\cdots,e_n\}$.

Son $\binom{0}{2}$ tensores sobre $\mathbb{R}^n$:

$$t=e^1\otimes e^n,\quad t=e^1\otimes e^2+5e^2\otimes e^n.$$

Un tensor de tipo $\binom{0}{3}$ es

$$t=e^n\otimes e^2\otimes e^3$$

Por último un tensor de tipo $\binom{1}{2}$ es

$$t=2e_1\otimes e^1\otimes e^2+4e_2\otimes e^1\otimes e^1+6e_3\otimes e^2\otimes e^3$$

Ejemplo 4.2.

(a) Si t es un $\binom{0}{2}$ tensor sobre V, entonces t tiene componentes

$$t_{ij}=t(e_i,e_j),$$

es decir, una matriz de tamaño $n\times n$. Esta es la forma usual de asociar una forma bilineal con una matriz. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ la forma bilineal

$$t(x,y)=Ax_1y_1+Bx_1y_2+Cx_2y_1+Dx_2y_2$$

(donde $x=(x_1,x_2)$ y $y=(y_1,y_2)$) está asociada a la matriz

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$$

(b) Si t es un $\binom{0}{2}$ tensor sobre $\mathbb{R}^2$, entonces tiene sentido decir que t es simétrico si

$$t(e_1, e_2) = t(e_2, e_1),$$

lo que equivale a decir que la matriz t_{ij} es simétrica. Un $\binom{0}{2}$ tensor simétrico se puede recuperar de su forma cuadrática $Q(e) = t(e, e)$ por

$$t(e_1, e_2) = \frac{1}{4}\big[Q(e_1 + e_2) - Q(e_1 - e_2)\big]$$

y t tiene como matriz asociada

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix}$$

así $Q(x) = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Dx_2^2$

(c) En general, un $\binom{0}{s}$ tensor simétrico se define con la condición

$$t(v_1, \cdots, v_s) = t(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(s)})$$

para toda permutación σ de $\{1, \cdots, s\}$, y para todos los elementos $v_1, \cdots, v_s \in V$. Se le puede asociar a t un polinomio homogéneo de grado k :

$$P(v) = t(v, \cdots, v)$$

y como en el caso $s = 2$, P y t determina uno al otro. También se puede hacer una definición similar para el caso de $\binom{r}{0}$ tensores. Es claro que un tensor es simétrico si y sólo si todas sus componentes en cualquier base son simétricas.

(d) Un producto interior $\langle\ ,\ \rangle$ sobre V es un $\binom{0}{2}$ tensor y su matriz se escribe generalmente con $g_{ij} = \langle\, e_i, e_j \,\rangle$. Así g_{ij} es simétrico y definido positivo. La matriz inversa se escribe con g^{ij}.

5. Propiedad universal

El siguiente teorema se conoce como Propiedad universal para el producto tensorial.

Teorema 5.1. *Sean V y W espacios vectoriales y $\otimes$ la función multilineal de $V \times W$ en $V \otimes W$ definida por $\otimes(v, w) = v \otimes w$. Entonces para todo U espacio vectorial y $h : V \times W \to U$ una función multilineal, existe una única transformación lineal $\widetilde{h} : V \otimes W \to U$ tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[dr, dashed, "\hat{h}"] & \\
V \times W \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "h"'] & U
\end{tikzcd}$$

conmuta, esto es $\widetilde{h} \circ \otimes = h$

El par $\langle V \otimes W, \otimes \rangle$ *se llama una solución al* Problema Universal Funcional *para funciones bilineales con dominio* $V \times W$.

Demostración. Bajo hipótesis se demostrará la existencia de $\widetilde{h}$ usando el hecho de álgebra lineal que afirma: una transformación lineal se conoce de manera única al conocer su acción sobre una base de su dominio. En efecto, sean $\{e^i\}_{i\in I}$, $\{w^j\}_{j\in J}$, bases algebraicas de V^* y W^* respectivamente, duales de las bases algebraicas $\{e_k\}_{k\in K}$ y $\{w_p\}_{p\in P}$, de V y W respectivamente. Si $h : V \times W \to U$ es una función bilineal, entonces existe una única transformación lineal

$$\widetilde{h} : V \otimes W \to U,$$

tal que $\widetilde{h}(e^i \otimes w^j) = h(e_i, w_j)$.

Con lo que

$$\widetilde{h} \circ \otimes = h$$

Luego, para todo $v = a^k e_k$, $w = b^p w_p$ elementos de V y W respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned} h(v,w) &= h\big(a^k e_k,\ b^p w_p\big) \\ &= a^k b^p\ h(e_k, w_p) \\ &= a^k b^p\ \widetilde{h}(e_k \otimes w_p) \\ &= \widetilde{h}(v \otimes w) \\ &= \widetilde{h} \circ \otimes(v,w) \end{aligned}$$

Así, la función requerida $\widetilde{h}$ existe y está determinada de manera única. $\square$

Corolario 5.1.1. *Sean* V *y* W *espacios vectoriales, la propiedad universal caracteriza el producto tensorial* $V \otimes W$ *salvo isomorfismos, en el siguiente sentido: Si existe un espacio vectorial* T *y una función multilineal* $\theta : V \times W \to T$ *con la propiedad universal, entonces*

$$V \otimes W \approx T$$

Demostración. Como los pares $\langle V \otimes W, \otimes \rangle$ y $\langle V \otimes W, \otimes \rangle$ son soluciones al problema universal para funciones bilineales con dominio $V \times W$, entonces existen funciones únicas $f : V \otimes W \to T$ y $g : T \to V \otimes W$ tales que el par de diagramas

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ V \times W \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "\theta"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "g"] & \\ V \times W \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "\otimes"'] & V \otimes W \end{tikzcd}$$

conmutan,esto es $\theta = f \circ \otimes$, $\otimes = g \circ \theta$.

S demuestra ahora que f es un isomorfismo de $V \otimes W$ sobre T.

(a) Como $\theta = (f \circ g) \circ \theta$, entonces la unicidad de la conmutación del diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "i"] & \\ V \times W \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "\theta"'] & T \end{tikzcd}$$

esto es $\theta = i \circ \theta$, implica que $f \circ g = i$.

(b) Como $\otimes = (g \circ f) \circ \otimes$, entonces la unicidad de la conmutación del diagrama

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[dr, dashed, "i"] & \\ V \times W \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "\otimes"'] & V \otimes W \end{tikzcd}$$

esto es $\otimes = i \circ \otimes$, implica que $g \circ f = i$.

Ahora, (a) y (b) demuestran que f y g son transformaciones lineales biyectivas con $g = f^{-1}$, así $V \otimes W \approx T$. $\square$

6. Superficie regular

Es necesario observar que las representaciones paramétricas diferenciables de clase C^{∞}, como en Cálculo de varias variables, puede solamente cubrir una parte de la superficie que se desea estudiar y resultaría excesivo restringirnos a considerar únicamente representaciones paramétricas que sean inyectivos, por tal efecto, se precisa este concepto en la siguiente definición.

Definición 6.1 (Carta Local). *Sean U y M subconjuntos de $\mathbb{R}^k$, U abierto, $\alpha : U \to M$, se llama una carta local de clase C^{∞} en M si:*

(a) α es de clase C^{∞}

(b) α es un homeomorfismo. Esto es α es inyectiva, continua con inversa continua.

(c) $d\alpha_p$ es $1-1$ en cada punto $p \in U$

$\alpha(U)$ recibe el nombre de vencidad coordenada y (α, U) una parametrización coordenada de dimensión k.

La condición (c), en el caso bidimensional es decir $k = 2$, e inmersas en $\mathbb{R}^3$, es equivalente a que

$$\alpha_u \times \alpha_v \neq 0 \quad \forall (u,v) \in U.$$

Ya que para $\alpha : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $\alpha = (x, y, z)$ la $d\alpha_p$ es $1-1$ equivale a que los vectores columnas de

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{4}$$

son linealmente independientes, equivalentemente, a que el producto vectorial:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \times \frac{\partial \alpha}{\partial v} \neq 0$$

Ejemplo 6.1. *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferncIable en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$, entonces la gráfica de f, es una superficie regular. En efecto, considérese la función. $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$ definida por:*

$$\alpha(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

donde $(u,v) \in U$, la cual es una parametrización coordenada de la gráfica de f. Además su vecindad coordenada cubre cualquier punto de f.

- *La condición (a) de la definición de superficie regular se satisface inmediatamente*
- *La condición (b) no es difícil ya que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$, pues $x = u,\ y = v$.*
- *Finalmente α es $1-1$, ya que si (u,v,z) está en la gráfica de f, entonces (u,v,z), con $z = f(u,v)$, es la única imágen de (u,v) bajo α; y como $\alpha^{-1}(u,v,f(u,v)) = (u,v)$ se tiene que α^{-1} es continua.*

Definición 6.2. *Se dice que un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^k$ es una $k-$superficie regular si cada punto de $p \in M$ admite una carta local de clase C^∞.*

En el caso bidimensional es decir $k = 2$, e inmersas en $\mathbb{R}^3$, una carta local de clase C^∞ se escribe

$$\alpha(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Cambio de parámetro. Es bien conocido que si (x_α, U_α) y (x_β, U_β) son parametrizaciones coordenadas de una $k-$superficie M con $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \phi$, los conjuntos

$$x_\alpha^{-1}(W) \quad \text{y} \quad x_\beta^{-1}(W)$$

son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^k$ y que las funciones $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ son funciones diferenciables (una demostración de esto usa el teorema de la función inversa en varias variables).

De Ahora en adelante, cuando se indique una superficie diferenciable de dimensión k o una $k-$superficie diferenciable M, se escribirá simplemente una superficie diferenciable M^k.

Ahora, se extiende la noción de diferenciabilidad entre superficies.

Dadas dos superficies M_1^n y M_2^m. Una función $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ es diferenciable en $p \in M_1$ si dada una parametrización $y : V \subseteq \mathbb{R}^m \to M_2$ en $\varphi(p)$ existe una parametrización $x : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M_1$ en p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ y la función

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{5}$$

es diferenciable en $x^{-1}(p)$. φ es diferenciable en un abierto de M_1 si es diferenciable en todos los puntos del abierto. Es una aplicación del cambio de parametro que la definición dada no depende de la escogencia de las parametrizaciones.

Si M es una superficie diferenciable, entonces una función diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ se llama una curva diferenciable. Supóngase además que $\alpha(0) = p \in M$, y sea D el conjunto de las funciones de M en $\mathbb{R}$ diferenciables en p. El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es la función $\alpha'(0) : D \to \mathbb{R}$ definida con

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=0}, \qquad f \in D$$

luego, un vector tangente en $p \in M$ es el vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$. El conjunto de los vectores tangentes a M en p será indicado con T_pM.

Si se escoge una parametrización $x : U \to M^k$ en $p = x(0)$, y denotando con

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_0$$

el vector tangente en p a la curva

$$x_i \to x(0, \cdots, x_i, 0, \cdots, 0)$$

entonces es bien conocido que el conjunto T_pM, con las operaciones usuales de funciones, forma un espacio vectorial de dimensión k, y al escoger una parametrización $x : U \to M^k$ se determina una base asociada

$$\Big\{ \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)_0, \cdots, \Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)_0 \Big\}$$

de T_pM. El espacio T_pM recibe el nombre de espacio tangente a M en p.

Campos vectoriales. Un campo vectorial X en una superficie diferenciable M^k es una función que asocia a cada punto $p \in M$ un vector $X(p) \in T_pM$. Al considerar una parametrización $x : U \subseteq \mathbb{R}^k \to M$ es posible escribir

$$X(p) = \sum_{i=1}^{k} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{6}$$

donde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ es una función definida en U y $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ es una base asociada a x, $i = 1, \cdots, k$. Es claro que X es diferenciable si y sólo si las funciones a_i son diferenciables para alguna parametrización (y por lo tanto, para cualquier).

En muchos casos es conveniente usar (6) como un campo vectorial $X : D \to F$ donde D es el conjunto de las funciones diferenciables en M y F el conjunto de las funciones en M, definidas de la siguiente forma

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{k} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \tag{7}$$

7. Hacia las geometrías desde los tensores

Para tal efecto, se observará la primera forma fundamental de una superfice bi-dimensional.

8. Primera Forma Fundamental y generación de geometrías tensoriales

Sea M^k una superficie diferenciable, se restringe el trabajo a una vecindad coordenada (x, U) de M, con lo que se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $x(U) = M$. Así que M será la superficie $x(x_1, x_2)$ con $(x_1, x_2) \in U$; y se considera la curva Γ sobre M definida por la imagen bajo x de

$$x_1 = x(t), \quad x_2 = x_2(t).$$

A lo largo de la curva Γ, x es una función de t, es decir Γ es de la forma

$$x(t) = x(x_1(t), x_2(t)),$$

con t en un intervalo J.

La longitud de arco s está relacionado con el parámetro t por la fórmula

$$s = \int_{t_0}^{t} \|x'(t)\| dt,$$

entonces

$$\begin{aligned}
ds^2 =& \|x'(t)\|^2 = \langle x'(t), x'(t) \rangle \\
=& \left\langle \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}, \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} \right\rangle \\
=& \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2, \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \right\rangle \\
=& g_{11} dx_1 dx_1 + 2g_{12} dx_1 dx_2 + g_{22} dx_2 dx_2,
\end{aligned}$$

donde

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle, \quad g_{12} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle, \quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle.$$

Escribiendo $A^2 = A \cdot A$, se llega a:

$$I = ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2g_{12}\, dx_1 dx_2 + g_{22}\, dx_2^2. \tag{8}$$

I recibe el nombre de primera forma cuadrática fundamental.

Observaciones

- La primera forma cuadrática fundamental se puede escribir

$$I = ds^2 = (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix},$$

  donde

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

  es la matriz asociada a I.

- La primera forma cuadrática fundamental es definida positiva.

  La primera forma cuadrática fundamental es

$$ds^2 = (dx_1 \;\; dx_2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

  donde

$$A = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

  es la matriz de la forma cuadrática.

  Como los puntos de la superficie M son regulares entonces

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle > 0, \qquad g_{22} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle > 0.$$

  Por la identidad de Lagrange

$$\begin{aligned} |A| =& g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \\ =& \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle \\ =& \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \times \frac{\partial}{\partial x_1} \right\|^2 > 0, \end{aligned}$$

  y el criterio de Sylvester asegura que la primera forma cuadrática fundamental I es definida positiva[1].

- ds^2 es invariante bajo un cambio de parámetro.

  Es una aplicación de la regla de la cadena en la forma cuadrática al hacer el cambio de variable. En efecto, Sea M una superficie bidimensional y $r(u, v)$ un sistema de coordenadas locales. Si se realiza el cambio de parámetros $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$, entonces la forma cuadrática fundamental en los parametros $\alpha,\ \beta$ satisface (y para simplificar se denotará por

[1] Ver, por ejemplo, Hernandez E. *Álgebra y Geometría,* Adisson-Wesley. 1994. página 542

un momento $A^2 = \langle A, A\rangle$):

$$\begin{aligned}
ds^2 =&\widetilde{g}_{11}d\alpha^2 + 2\widetilde{g}_{12}d\alpha d\beta + \widetilde{g}_{22}d\beta^2\\
=&\left\langle \frac{\partial r}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial r}{\partial \beta}d\beta, \frac{\partial r}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial r}{\partial \beta}d\beta \right\rangle\\
=&\left\langle \frac{\partial r}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial r}{\partial \beta}d\beta, \frac{\partial r}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial r}{\partial \beta}d\beta \right\rangle\\
=&\left(\Big(\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\Big) d\alpha + \Big(\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \beta}\Big) d\beta \right)^2\\
=&\left(\frac{\partial r}{\partial u}\Big(\frac{\partial u}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta}d\beta\Big) + \frac{\partial r}{\partial v}\Big(\frac{\partial v}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial v}{\partial \beta}d\beta\Big) \right)^2\\
=&\Big(\frac{\partial r}{\partial u}du + \frac{\partial r}{\partial v}dv\Big)^2\\
=&\left\langle \frac{\partial r}{\partial u}du + \frac{\partial r}{\partial v}dv, \frac{\partial r}{\partial u}du + \frac{\partial r}{\partial v}dv \right\rangle = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que ds^2 es invariante bajo cambio de parámetros.

- Por el ejemplo 4.2, (g_{ij}) representa un $\binom{0}{2}-$tensor covariante g, simétrico, definido positivo en el espacio tangente T_pM que varía diferenciablemente, en el sentido: Si $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ es un sistema de coordenadas alrededor del punto p con $x(x_1, x_2) = q \in x(U)$, entonces

$$g_{ij}(x_1, x_2) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle$$

es una función diferenciable.

El análisis anterior proporciona la idea para hacer la siguiente definición. Consultar este tema también en [2], [5], [4], [6] y [7]

Definición 8.1. *Sea M^k una superficie diferenciable de dimensión k, el par (M, g) se dice que es una Geometría*

(a) **Riemanniana:** *si $g = (g_{ij})$ representa un $\binom{0}{2}-$tensor covariante g tales que para todo par de campos vectoriales diferenciables X, Y sobre M se tiene*

(1) *$g(X, Y) = g(Y, X)$, es decir, g es simétrico,*

(2) *$g(X, Y) \geq 0$ y $g(X, X) = 0$ si y sólo si $X = 0$, es decir, g es definido positivo no degenerado en cada espacio tangente T_pM*

(3) *$g(X, Y)$ varía diferenciablemente, en el sentido: Si $x : U \subseteq \mathbb{R}^k \to M$ es un sistema de coordenadas locales alrededor del punto p con $x(x_1, \cdots, x_k) = q \in x(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, entonces*

$$g_{ij}(x_1, \cdots, x_k) = g\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\Big)$$

es una función diferenciable.

(b) **Semi-Riemanniana:** *si* $g = (g_{ij})$ *representa un* $\binom{0}{2}-$*tensor covariante g simétrico, diferenciable tales que si* X, Y *son campos vectoriales diferenciables y* $g(X, Y) = 0$ *para todo* Y*, entonces* $X = 0$*, esto es, g es no-degenerado.*

(c) **Simpléctica** *si* $k = 2n$; $g = (g_{ij})$ *representa un* $\binom{0}{2}-$*tensor covariante g diferenciable, no degenerado tales que si* X, Y *son campos vectoriales diferenciables sobre* M*, entonces* $g(X, Y) = -g(Y, X)$*, es decir, g es anti-simétrico.*

Cuando $\{dx^i\}$ es la base dual de $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ en cada punto de la superficie M^k el tensor métrico g, restringido a una vecindad coordenada (x, U) se representa (fácilmente de verificar) como:

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad \text{o simplemente} \quad g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i\, dx^j$$

9. Ejemplos: tipo Riemannianos

1. *Geometría Euclídea.* En el caso que $M = \mathbb{R}^k$ y

$$g = I_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

esto es, el tensor métrico está dado por

$$g = \sum_{i=1}^{k} dx^i \otimes dx^i.$$

Y por lo tanto, la longitud cuadrada de un vector infinitesimo cuyas componentes son

$$(dx^1, \cdots, dx^i, \cdots, dx^k)$$

es

$$\begin{aligned} ds^2 =& (dx^1, \cdots, dx^k) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^k \end{pmatrix} \\ =& (dx^1)^2 + \cdots + (dx^k)^2 \end{aligned}$$

todo esto, proporciona naturalmente la Geometría Euclídea para $\mathbb{R}^k$. Es decir, la Geometría Euclídea es un caso particular de la Geometría Riemanniana.

2. *Geometría Hiperbólica.* Considerérese el semi-espacio de $\mathbb{R}^k$ dado por

$$\mathbb{H}^k = \{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k; x_k > 0\}$$

en cada uno de los planos tangentes se introduce el tensor métrico representado con

$$g = \frac{1}{x_k^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

esto es, el tensor métrico está dado por

$$g = \frac{1}{x_k^2}\sum_{i=1}^{k} dx^i \otimes dx^i$$

En este caso, la Geometría proporcionada por el par $(\mathbb{H}^k, g)$ es la Geometría Hiperbólica de dimensión k. Las curvas minimizantes (geodésicas) en este modelo son rectas perpendiculares al hiperplano $x_k = 0$, y las semicircunferencias (en $\mathbb{H}^k$) contenidas en los planos perpendiculares al hiperplano $x_k = 0$ y cuyos centros estan en este hiperplano. También la curvatura de $\mathbb{H}^k$ es -1. Ver [2] pág. 162, 163.

3. *Esfera bi-dimensional o Geometría Esférica bi-demensional.* Considérese

$$S^2 = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

y $\alpha(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi)$ sus coordenadas esféricas. Se sabe que (α, U) es una carta local de S^2 si $U = \{(\theta, \phi) : 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi\}$.

Entonces

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta} \right\rangle = \operatorname{sen}^2\phi, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial}{\partial\phi}, \frac{\partial}{\partial\phi} \right\rangle = 1.$$

Así el tensor métrico está dado por

$$g = \operatorname{sen}^2\phi \, d\theta \otimes d\theta + d\phi \otimes d\phi \tag{10}$$

con lo que

$$ds^2 = \operatorname{sen}^2\phi \, d\theta^2 + d\phi^2 \tag{11}$$

proporciona una forma de calcular longitud de curvas sobre la esfera. Esto es, para una curva sobre S^2 que está parametrizada (en coordenadas esféricas) por

$$c(t) = (\cos\theta(t) \operatorname{sen}\phi(t), \operatorname{sen}\theta(t) \operatorname{sen}\phi(t), \cos\phi(t))$$

la longitud infinitesimal es

$$(\operatorname{sen}^2\phi \, \theta'^2 + \phi'^2)^{1/2} dt.$$

Por lo tanto, (S^2, g) donde $g = \operatorname{sen}^2\phi \, d\theta \otimes d\theta + d\phi \otimes d\phi$ se conce con el nombre de Geometría esferica y sus geodésicas son las circunferencias máximas en S^2 y su curvatura es 1, ver [2] pág. 163.

10. Ejemplos: Tipo Semi-Riemannianos y Simplécticos

La idea es muy parecida a los ejemplos anteriores, pero con cierto cuidado,ver [6] capítulo 3, pág 58, también [4] pág. 191. Por tal motivo nos dedicaremos a dar ejemplos de productos tensoriales Semi-Riemannianos y Simplécticos en en espacios vectoriales de dimensión k.

(a) Caso: Semi-Riemanniano. Para cada entero v con $0 \leq v \leq k$, se define en cada espacio tangente $T_p\mathbb{R}^k \approx \mathbb{R}^k$ un tensor métrico dado por

$$g(x_p, y_p) = \langle x_p, y_p \rangle = -\sum_{i=1}^{v} x^i y^i + \sum_{j=v+1}^{k} x^j y^j$$

de indice v. El resultado es un espacio semi-euclideano o bien semi-Riemanniano $\mathbb{R}^k_v$. Para $k \geq 2$, $\mathbb{R}^k_1$ se llama $n-$espacio de Minkowski; si $k = 4$ es el ejemplo mas simple de un espacio-tiempo relativista.

Al fijar la notación

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad 1 \leq i \leq v \\ +1 & \text{para} \quad v+1 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Entonces el tensor métrico de $\mathbb{R}^k_v$ se puede escribir (usando base dual) de la forma

$$g = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i dx^i \otimes dx^i$$

Si M^k es una superficie diferenciable, entonces como en el caso Riemanniano la forma cuadrática q asociada a un sistema de coordenadas locales es

$$q = ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j$$

donde,

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

y su métrica en cada tangente T_pM es

$$g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

(b) Caso: Simpléctico. Considérese $\mathbb{R}^{2n}$, esto es, estamos en el caso $k = 2n$, entonces se introducen las coordenadas $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ y se define un producto interior simpléctico para $\mathbb{R}^{2n}$ por la fórmula

$$g(x, y) = \sum_i x_i y_i' - x_i' y_i$$

donde

$$x = (x_1, \cdots, x_n, x_1', \cdots, x_n'), \qquad y = (y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n').$$

Así el par $(\mathbb{R}^{2n}, g)$, es una Geometría Simpléctica para $\mathbb{R}^{2n}$. Ahora se puede proceder como en el caso Riemanniano y Semi-Riemanniano para obtener métricas canónicas en $k-$superficies diferenciables, ver [3].

Bibliografía

[1] Do Carmo, M., Differential Geometry. Printece - Hall, New Jersy. 1976. *Es un libro prácticamente clásico y está fundamentalmente dirigido a personas que quieran en el futuro, incurcionar en el estudio de la geometría diferencial con cierta profundidad (se hace necesario un buen curso de Cálculo en en* $\mathbb{R}^3$*) y presenta de manera adecuada los temas de geometría diferencial en superficies inmersas en* $\mathbb{R}^3$*, hace un buen aprovechamiento de la geometría intrinsica de las superficies bi-dimensional, además deja claro el problema local y global de las superficies; como temas importantes para entrar a estudiar, con bases sólidas, el área de la* Geometría Diferencial. *Este libro está escrito en 503 páginas y consta de 5 capítulos básicos que, naturalmente, deberián ser estudiados en un primer curso introductorio.*

[2] Do Carmo, M., Geometría Riemanniana. 2ª Edição.Rio de Janeiro. Brasil. 1988. *Este libro, de 299 páginas relativamente cásico, presenta los temas introductorios y básicos de la Geometría Riemanniana, es muy ameno en su lectura, pero de cuidado. La Geometría Riemanniana es buena parte del nucleo básico para estudio de la Geometría diferencial, es comparable con el Análisis Funcional en el estudio del Análisis Matemático Teorico y Aplicado, ver [8].*

[3] Fomenko, A. T., Symplectic Geometry. Moscuw. 1998. *Es un libro de 387 páginas empieza el estudio de la Geometría Simplectica desde los espacios vectoriales reales de dimensión finita con productos interiores simplecticos y entra suavemente en el estudio de la Geometría Simpléctica de Variedades Diferenciables tocando posteriormente los sistemas Hamiltonianos y los métodos efectivos de construcción de sistemas completamente integrables entre otros. De esta forma el autor hace agradable el estudio de la Geometría Simpléctica como una área importante de la Matemática. Ver [8]*

[4] Frankel, T., The Geometry of Physics. Cambrige University. 2001. *Este libro de 666 páginas, muy interesante para profesionales que desean usar los Métodos de la Geometría Diferencial como herramienta para modelar los problemas de la Física Teórica, en particular, hace un gran efuerzo para presentar, de manera adecuada, la combinación entre el Análisis Matemático, la Geometría y la Física. Una lectura de este libro sería muy provechosa si de antemano se estudia [1].*

[5] Gallot-Hullin-Lafontaine, Riemannian Geometry. 2ª ed., Springer. 1990. *Este libro de 284 página de un buen nivel introductorio básico de la Geometría Riemanniana y Análisis Geométrico, tiene como base previa el estudio de los Fundamentos de Variedades Diferenciables y Grupos de Lie, por ejemplo [8].*

[6] O'Neill, B., Semi-Riemannianan Geometry: Aplication to Relativity. University of California. Los Angeles California. Academic Press. 1983. 468 páginas. *Excelente libro de Geometría Semi-Riemanniana (y otros tipos de Geometrías) con aplicaciones especiales a la Teoría de la Relatividad y a la Cosmología, ver [8]*

[7] Spivak, M., A comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish. 1990. *Es una interesante recopilación, 2.785 páginas en 5 volumenes, de estudios en Geometría Diferencial fundamentalmente combinada con Análisis Matemático. Todo especialista en Geometría Diferencial ha estudiado o consultado muchas veces estos cinco volumenes. Se puede estudiar sólo con un buen curso de Cálculo Clásico y Geométrico en* $\mathbb{R}^k$.

[8] Warner F. W., Fundations of Differentiable Manifolds and Lie Grupos. Springer. 1983. *Un excelente libro de 274 páginas para estudiantes que quieran realizar un segundo curso de Geometría Diferencial, sería muy interesante que el primer curso sea de Geometría Diferencial de Superficies como el que se ha comentado en [1]. Posteriormente se puede continuar, con mucha facilidad, a estudiar Geometría Semi-Riemanniana, Riemanniana o bien Simpléctica entre otras y entrarse entonces a una línea específica de la Geometría Diferencial.*