Introducción a la geometría rigida

Juan Mendoza Díaz
Estudiante Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
sergio_carrillo30@hotmail.com

Carlos Hurtado Amaya
Estudiante Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
carlos.hurtado@usa.edu.co

Resumen

Dado un concepto de espacio euclídeo, esta asociada una topología sobre el espacio, en el presente artículo se estudian los espacios euclideos cuya topología es no arquimediana y se da un teorema que caracteriza dichos espacios

1. ¿Qué es la geometría rígida?

La geometría rígida analítica estudia la geometría en un campo no arquimediano

Figura 2.

en si se basa en considerar espacios vectoriales completos los cuales son llamados espacios de Banach ya que fue Stefan Banach quien los estudio, el estudio de las geometrías en estos espacios difieren a las de los estudiados en los espacios euclidianos sobre los números reales ya que el campo es arquimediano, es decir, se tiene la desigualdad triangular, a diferencias de los espacios no arquimedianos

2. Aplicaciones de la geometría rígida

En el presente diagrama se muestran las relaciones de la geometría rígida con diferentes áreas de las matemáticas

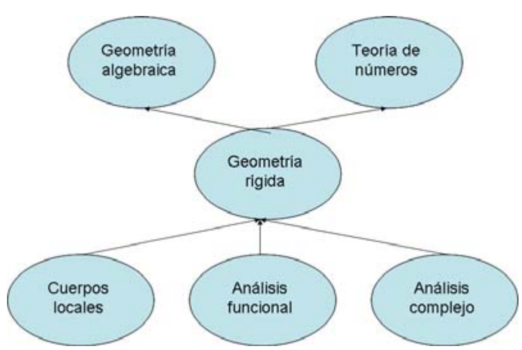

Figura 2

3. Teoría de la valuación

Definición 3.1. Un campo valuado es un campo K, provisto de una *valuación* (o valor absoluto), es decir, una función definida como $|| : K \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que satisface:

1. $|x| \geq 0$ y $|x| = 0$ implica que $x = 0$
2. $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$

si además se tiene que $|\ |$, satisface $|x+y| \leq \text{máx}\{|x|, |y|\}$ la valuación se dice no arquimediana.

La valuación induce una métrica definida por

$$d(x, y) := |x - y|,$$

para todo (x, y) en K^2.

4. Comparación entre la geometría euclidiana y la rígida

Teorema 4.1. En el espacio métrico K^2, todo triángulo es isósceles.

Demostración:
Supongamos que existe un triángulo no isósceles, entonces

$$d(x, y) \neq d(y, z),\ d(y, z) \neq d(x, z)\ d(x, y) \neq d(x, z)$$

si $d(x, y) > d(y, z)$ y $d(x, y) > d(x, z)$, como $d(x, z) \neq d(y, z)$ entonces $d(x, z) > d(y, z)$ o $d(x, z) < d(y, z)$, luego consideremos el caso $d(x, z) > d(y, z)$, por la desigualdad ultramétrica

$$d(x, y) \leq \text{máx}\{d(x, z), d(z, y)\} = d(x, z)$$

así $d(x, y) \leq d(x, z)$ por otro lado, si $d(x, z) < d(y, z)$ vemos que

$$d(x, y) \leq \text{máx}\{d(x, z), d(z, y)\} = d(y, z)$$

así $d(x, y) \leq d(y, z)$. De esta forma $d(x, y) = d(x, z)$ o $d(x, y) = d(y, z)$. $\square$

5. Jerarquía de las estructuras algebraicas

En el siguiente diagrama se muestra las diferentes relaciones entre las estructuras

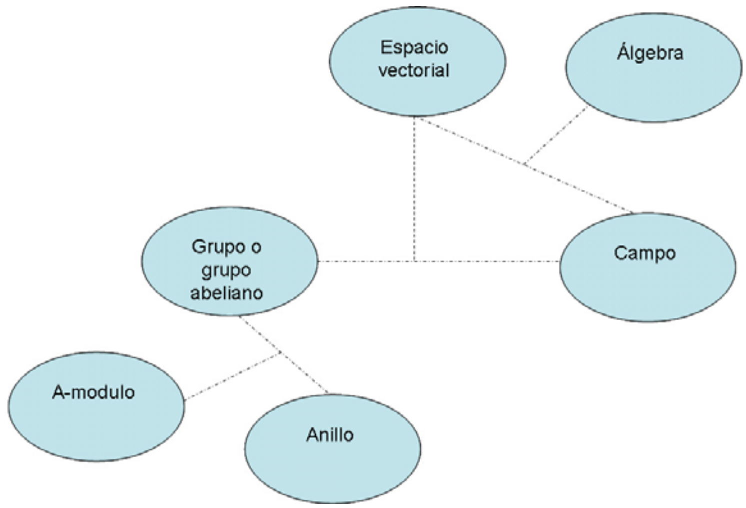

Figura 3.

Las diferentes definiciones de estas estructuras se pueden encontrar en cualquier texto de álgebra abstracta.

6. Espacios de Banach

Definición 6.1. Un espacio vectorial normado sobre K, $(V, +, \cdot, \| \ \|)$ se dice de Banach si es completo, es decir, que toda sucesión de Cauchy converge bajo la métrica inducida por $\| \ \|$

Teorema 6.1 (Banach). Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal sobreyectiva y continua entonces T es abierta.

Corolario 1. Existe $C > 0$, tal que para cada $w \in W$ existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$

$$\|v\| \leq C\|w\|$$

Demostración:
Por el teorema de Banach, existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$\{w \in W : \|w\| < \delta\} \subseteq \{T(v) : v \in V \ \|v\| < 1\}$$

ahora, reemplazando w por $\frac{1}{a^r}w$, donde $a \in K^\times$ y $r \in \mathbb{Z}$ tenemos que si $w \in W$ tal que $\|w\| < \delta|a^r|$, entonces existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$ y $\|v\| < |a^r|$. Escojamos un $a \in K$ tal que $|a| > 1$, tomemos $C = \frac{|a|}{\delta}$, sea $w \in W$. Entonces existe un único $r \in \mathbb{Z}$ tal que

$$C^{-1}|a^r| = \delta|a^{r-1}| < \|w\| \leq \delta|a^r|$$

por el argumento anterior existe un $v \in V$ tal que $T(v) = w$ y

$$\|v\| < |a^r| < C\|w\|. \ \square$$

$\square$

7. Módulos y algebras de Banach

Definición 7.1. Un espacio de Banach A tal que A es un anillo conmutativo y $k \subset A$ y tal que $\|1\| = 1$ y $\|ab\| = \|a\|\|b\|$.

Ejemplo 7.1. Sea $C(K)$ el espacio de Banach de todas las funciones continuas en un espacio compacto de Hausdorff K con la siguiente norma

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

definiendo el producto usual de funciones $(fg)(p) = f(p)g(p)$, hace de $C(K)$ un álgebra de Banach conmutativa, la función constante 1 es elemento identidad.

Definición 7.2. M es un A-módulo con norma $\| \ \|$ tal que M es un espacio de Banach sobre K y $\|am\| = |a|\|m\|$ para todo $a \in A$ y $m \in M$.

8. La recta proyectiva

Definición 8.1. Sea K un campo algebraicamente cerrado provisto de una valuación no arquimediana y consideremos $\mathbb{P} = (K \times K)/\sim$, donde $(x_0, x_1) \sim (y_0, y_1)$ si existe $a \in K^\times$ tal que $y_0 = ax_0$ y $y_1 = ax_1$, luego $\mathbb{P}$ es llamado la recta proyectiva.

Definición 8.2. Una función $\varphi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ es llamada un automorfismo de $\mathbb{P}$ si existe una matriz $A \in GL_2(K)$ tal que $\varphi(x) = A \cdot x$

Definición 8.3. Un subconjunto D de $\mathbb{P}$ es llamado un disco cerrado (resp. abierto) si existe un $a \in K$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$D = \{z \in K : |z - a| \leq [<]\rho\} \text{ o } D = \{z \in K : |z - a| \geq [>]\rho\} \cup \{\infty\}$$

LEma 1. Sea D un disco abierto (resp. cerrado), y sea T un automorfismo de $\mathbb{P}$. entonces $T(D)$ es un disco abierto (resp. cerado).

LEma 2. Sea D_1, D_2 dos discos (abiertos o cerrados, no necsariamente del mismo tipo) tales que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ y $D_1 \cup D_2 \neq \mathbb{P}$ entonces $D_1 \subseteq D_2$ ó $D_2 \subseteq D_1$

Definición 8.4.

- Un subconjunto no vacio de $\mathbb{P}$ es llamado una *afinoide conectada*, si este es una intersección de una cantidad finita de discos cerrados.
- una *afinoide* es la unión de una cantidad finita de afinoides conectadas.

Teorema 8.1. Sea F una afinoide conectada, y sean $F_1, \ldots, F_m$ afinoides conectadas disjuntos, $m \geq 2$. entonces $F \neq \bigsqcup_{i=1}^m F_i$

Teorema 8.2. Sea F_1, F_2 afinoides conectadas, $F_1 \cap F_2 \neq 0$. entonces $F_1 \cap F_2$ y $F_1 \cup F_2$ son afinoides conectadas.

Teorema 8.3. Sea $F \neq \mathbb{P}$ una afinoide, entonces existen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ tales que $F = \bigsqcup_{i=1}^m F_i$, además $F_1, F_2, \ldots, F_m$ están únicamente determinados por F

Demostración:

[esquema] *Existencia.* Escribamos a F como la unión de afinoides conectadas $F_1, \ldots, F_m$. si existe $1 \leq i, j \leq m$ tales que $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, entonces $F_i \cup F_j$ es una afinoide conectada. por el teorema anterior, luego se procede por inducción sobre m.

Unicidad. Supóngase que $F = \bigsqcup_{i=1}^{m} F_i = \bigsqcup_{j=1}^{n} G_j$. donde F_i, G_j son afinoides conectadas, entonces $F_i = \bigsqcup_{j=1}^{n} F_i \cap G_j$. por el teorema anterior cada $f_m \cap G_j$ es vacía o una afinoide conectada. además, existe j tal que $F_m = F_m \cap G_j$, es decir, $F_m \subseteq G_j$, por un argumento similar se muestra que existe i' tal que $G_j \subseteq F$, de este modo $\bigsqcup_{i=1}^{m-1} F_i = \bigsqcup_{j=1}^{n-1} G_j$, haciendo inducción sobre $\min\{m, n\}$ se concluye que $m = n$ y $G_i = F_i$, para $i = 1, \ldots, m$ bajo permutaciones. $\square$

9. Funciones holomorfas

Sea $(K, \| \ \|)$ un campo valuado no arquimediano algebraicamente cerrado, y sea K^o su anillo de valuación y K^{oo} su ideal maximal.

Sea F un subconjunto de $\mathbb{P}$, para una función $f : F \longrightarrow K$ definimos la norma

$$\|f\| = \|f\|_F := \sup_{z \in F}\{|f(z)|\}$$

además, $\| \ \|$ es una semi norma y satisface

- $\|f + g\| \leq \text{máx}\{\|f\|, \|g\|\}$
- $\|cf\| = |c|\|f\|$, para todo $c \in K^\times$.

de aquí en adelante consideraremos una afinoide $F \subset \mathbb{P}$.

Definición 9.1. Una función $f : F \longrightarrow K$ es holomorfa si para cada $\epsilon \in |K^\times|$ existe una función racional $g \in K(z)$ sin polos en F tales que $\|f - g\|_F < \epsilon$.

Definición 9.2.

- $\mathcal{O}(F) :=$ conjunto de de todas las funciones holomorfas.
- $\mathcal{O}^o(F) = \{f \in \mathcal{O}(F) : \|f\| \leq 1\}$;
- $\mathcal{O}^{oo}(F) = \{f \in \mathcal{O}(F) : \|f\| < 1\}$;
- $\overline{\mathcal{O}(F)} = \mathcal{O}^o(F)/\mathcal{O}^{oo}(F)$.

Teorema 9.1.
1. $\mathcal{O}(F)$ es completo.
2. $\mathcal{O}(F)$ es una K-álgebra, $\mathcal{O}^o(F)$ es una K^o-álgebra, $\mathcal{O}^{oo}(F)$ es una de sus ideales. y $\overline{\mathcal{O}(F)}$ es una álgebra sobre $\bar{K} = K^o/k^{oo}$.

$\mathcal{O}(F)_c := \{f \in \mathcal{O} : f(c) = 0\}$, y sea $\mathcal{C}(F)$ el álgebra de funciones K-holomorfas sobre F, además $\mathcal{C}(F) \simeq K$.

Teorema 9.2 (Descomposición de Mittag-Leffler). Sea $D_1, \ldots, D_m$ discos disjuntos. Sea F_i el complemento de D_i y sea $F = \bigcap_{i=1}^m F_i$ y tomemos $c \in F$. Entonces

1. $\mathcal{O}(F) = C(F) \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}(F_i)_c$.
2. Sea $f_o \in \mathcal{C}(F)$ y sea $f_i \in \mathcal{O}(F_i)_c$ para $i = 1, ldots, m$. Entonces $\| \sum_{i=0}^m f_i \|_F = \text{máx} \|f_i\|_{F_i}$, además, existe $z \in F$ tal que $| \sum_{i=0}^m f_i(z)| = \text{máx} \|f_i\|_{F_i}$.

Bibliografía

[1] Frensnel Jean, Van der Put Marius., *Rigid analytic geometry and its applications.* Birkhäuser. Boston, Basel, Berlin 2003.

[2] Haran Dan, *Introduction into rigid analytic geometry.* Notas de Clase, Univeridad de Tel Aviv. 2006

[3] Nicaise Johannes *Formal and rigid geometry: an intuitive introduction, and some applications* arxiv:math.AG/0701532v1, 19 de enero de 2007