FRACTALES EN EL GRUPO DE HEINSENBERG

Joaquín Luna Torres
Profesor Universidad de Cartagena
Cartagena, Colombia
jlunator@gmail.com

Iliana Paternina Ortega
Estudiante Universidad de Cartagena
Cartagena, Colombia

Resumen

Se estudian sistemas iterados de funciones en el grupo de Heisenberg, se analiza la dimensión fractal de ciertos subconjuntos de este grupo y se presentan ciertos conjuntos invariantes respecto a dichos sistemas iterados.

Introducción

Los fractales son, quizás, el ejemplo más latente de que nuestro mundo es bastante intrincado e impredecible y nada lineal e ideal como lo pensamos.

El primer ejemplo de fractal fué presentado por *Giuseppe Peano*, matemático italiano en el año de 1980 y recibió el nombre de *curva de peano*; ocurrió un cambio decisivo en su estudio con el descubrimiento de la geometría fractal por el matemático francés *Benoit Mandelbrot* en la década de los setenta, quien utilizó otra idea de dimensión diferente a la usada en el geometría euclídea y dotó a los fractales de una dimensión no entera; característica adicional a su auto-semejanza, la que los vuelve interesantes a la vista de cualquiera, sin ser muy erudito.
John E. Jutchinson, en su artículo *fractal and self-similarity* [2], expone una teoría bastante formal de los que él llama conjuntos estrictamente auto-similares, demostrando que dado $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, un conjunto finito de contracciones, llamado comúnmente sistemas iterados de funciones (SIF), sobre un espacio métrico completo, entonces existe un único conjunto compacto K invariante con respecto a $\mathcal{F}$; cuando el espacio métrico completo es el espacio euclídeo, surgen conjuntos invariantes que son los ejemplos clásicos de fractales.
Para el grupo de Heisenberg, denotado por $\mathbb{H} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, la ley que lo define es una operación que involucra el producto interno usual de $\mathbb{R}^2$, e induce una métrica $d_{\mathbb{H}}$, llamada la métrica de Heisenberg, formando así, el espacio métrico completo de Heisenberg $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$, en el cual se definen ahora los SIF, estos sistemas iterados de funciones sobre el espacio métrico completo $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$, denotados por $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$, serán el objeto de este trabajo con el propósito de estudiar los conjuntos invariantes que ellos generan a partir de los sistemas iterados de funciones clásicos del plano.

Así las cosas, se analizaran los SIF $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ y sus conjuntos invariantes $K_{\mathbb{H}}$.

El trabajo se desarrolla en cuatro partes, en la primera de ellos se encuentra una reseña de los antecedentes básicos acerca del surgimiento de la teoría clásica de fractales, esto como una introducción para el lector a quien el término fractal le suena desconocido. En la segunda, se plantea de manera detallada como el grupo de Heisenberg (específicamente la ley que lo define) hace surgir una teoría muy rica en cuestión de sistemas iterados de funciones $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ y de conjuntos invariantes con propiedades muy interesantes. Dada la característica de que los fractales tienen una dimensión no entera, estos objetos se hacen tan especiales que se clasifican dentro de otra geometría, la geometría fractal, así, se hace necesario reunir la teoría que permita entender y apreciar el concepto de dimensión fractal, disponiéndose para esto de la tercera parte. Por último, como una de las consecuencias más importantes del surgimiento de los SIF sobre $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$, está la aparición de subconjuntos $K_{\mathbb{H}}$ de $\mathbb{H}$, por esto se presenta en la parte final un caso especial de estos, llamado el cuadrado de Heisenberg, denotado por $Q_{\mathbb{H}}$.

1. Fractales.

Con el descubrimiento de una nueva geometría en 1977, debido a la publicación *The Fractal Geometry of Nature* por Benoit Mandelbrot, nace una visión más clara del mundo en el que vivimos. Esta geometría, llamada geometría fractal, nos descubre fenómenos naturales en su forma más extraordinaria dejando al descubierto la naturaleza incierta de lo que nos rodea.

Para muchos, el descubrimiento de la geometría fractal significó el poder retratar tantos objetos que antes eran muy difícil de imaginar en la pantalla de un computador, o quizás, hasta en nuestra mente. Pero así como es de extraordinario el mundo físico que nos rodea es extraordinario el conocimiento del hombre, por el cual hoy día se tiene una idea particular de como clasificar a muchos de esos objetos bajo un nombre bastante preciso, **fractales**; estos entes matemáticos constituyen el pilar del análisis en la geometría fractal.

Los fractales poseen dos características básicas: primero, su autosemejanza, es decir, que tiene la propiedad de ser copias escalizadas de alguna parte de sí mismos probablemente rotadas y trasladadas. Y como segunda característica, los fractales poseen una dimensión no entera, esto significa que ellos son completamente diferentes de las gráficas de líneas y secciones cónicas que se aprenden en un curso elemental de Geometría Euclidiana.
Pero esta definición de dimensión no es aquella que se aprende en un curso de geometría vectorial o topología sujetas a espacios vectoriales y cubrimientos abiertos del espacio respectivamente. Para calcular la dimensión de los entes fractales, Felix Hausdorff en el año 1918 generaliza las ideas de Carathéodory formalizando lo que hoy se conoce como la dimensión Hausdorff.

En esta sección no se da la definición formal de dimensión Hausdorff (ver detalles en la tercera parte de este escito), más bien se presenta una variante de ella conocida como la dimensión por conteo de cajas original—que será suficiente para ilustrar algunos ejemplos de (Box-Couting)— que en la mayoría de los casos coincide con la fractales en el plano y dar una definición de los mismos.

1.1. Dimensión fractal

Definición 1.1. *Sea $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ un conjunto de puntos. Se obtiene una copia escalizada de éste si se opera el conjunto A con un $r \in [0, 1]$, tal que $rA = \{rx\}$. Entonces un conjunto A es autosemejante cuando es la unión de N conjuntos que son congruentes con rA.*

Definición 1.2. *Sea (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. El diámetro de A es:*

$$diam_d(A) := \sup\{d(a, a'), a, a' \in A\}.$$

Se escribirá *diam* en vez de $diam_d$ cuando no haya confusión.

Definición 1.3. *Se llama recubrimiento de un conjunto E en un espacio métrico (X, d) a la colección $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos de X, tales que*

$$E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Definición 1.4. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$ un número real positivo y $N_\delta(A)$ el menor número de subconjuntos de diámetro a lo más δ que cubren a A. Entonces se define D, la dimensión fractal (o caja) como:*

$$D(A) = \lim_{\delta \to 0} \frac{lnN_\delta(A)}{ln1/\delta}$$

Ejemplo 1.5. ***El conjunto de Cantor.***

*Este conjunto se define clásicamente como el resultado de un proceso de sustracción de abiertos sobre el intervalo $[0, 1]$. En efecto, dado el intervalo cerrado $[0, 1]$ se extrae de él la tercera parte central, esto es $(1/3, 2/3)$, lo que deja dos segmentos de recta cada uno de longitud tres veces menor que el inicial, se toman estos dos segmentos y se repite el proceso inicial efectuado a $[0, 1]$: a los intervalos cerrados $[0, 1/3]$ y $[2/3, 1]$ se les extrae sus terceras partes centrales $(1/9, 2/9)$ y $(7/9, 8/9)$. De esta manera se continua indefinidamente para obtener así el **El Conjunto de Cantor** $\mathcal{C}$, formado por todos aquellos puntos que quedan al final de todas las extracciones.*

Anotaciones puntuales e importantes del conjunto de Cantor, $\mathcal{C}$ son:

- *Es no vacío, pues, al final de todas las extracciones quedan por lo menos los puntos extremos de los intervalos.*
- *Es cerrado, ya que $\mathcal{C}$ resulta ser la intersección infinita de cerrados.*
- *Es compacto, pues, es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$.*

Observe que el conjunto de Cantor puede ser descompuesto en dos subconjuntos distintos, estos son, la parte comprendida en el intervalo $[0, 1/3]$ y la parte comprendida en el intervalo $[2/3, 1]$, subconjuntos que resultan ser semejantes al conjunto original $\mathcal{C}$, teniendo como única diferencia que son un tercio más pequeños que el conjunto original $\mathcal{C}$ (es decir, $r = 1/3$ en la definición 1.1, notándose así, la primera característica que identifica un fractal, la autosemejanza.
Para el conjunto de Cantor, según la definición 1.4 $N_\delta(\mathcal{C}) = 2$ y $b\delta = 1/3$, así que:

$$D(\mathcal{C}) = \lim_{\delta \to 0} \frac{ln2}{ln3} \notin \mathbb{Z},$$

donde N_δ es el número de nuevos segmentos en el proceso inicial y δ es el factor de escala de reducción del conjunto inicial, concluyendo que la dimensión del conjunto de Cantor es un número no entero.

Ejemplo 1.6.

La Curva de Koch.

El proceso mediante el cual se genera este conjunto es totalmente inverso a la creación del

conjunto de Cantor, pues en vez de hacer sustracciones, se hacen adiciones. En efecto, se parte de un segmento de recta (de longitud uno por simplicidad) del cual se extrae la tercera parte central reemplazandola por un triángulo equilátero al cual se le suprime la base, este triángulo tiene lados de longitud $1/3$*. Se aplica el mismo proceso con cada segmento de recta presente en las iteraciones; siguiendolo indefinidamente se obtiene una curva de longitud infinita llamada,* ***La Curva de Koch*** *y se denota por* $\mathcal{K}$*.*
Nótese que cada cuarta parte de la curva $\mathcal{K}$ *es una versión reducida de toda la curva, es decir,* $\mathcal{K}$ *es autosemejante, con* $r = 1/3$*, así que:* $N_\delta(\mathcal{K}) = 4$ *y* $\delta = 1/3$*, por tanto:*

$$D(\mathcal{K}) = \lim_{\delta \to 0} \frac{ln4}{ln3} \notin \mathbb{Z}.$$

Definición 1.7. *Dado* $A \subset \mathbb{R}^2$*, se dice que* A *es un fractal si es autosemejante y su dimensión fractal es un número no entero.*

En la construcción de los anteriores fractales, se escogió una figura inicial y aplicando cierto proceso se obtuvo una figura final (frecuentemente el objeto fractal), en esta aplicación resultan involucradas ciertas funciones de reemplazo o sustitución, las cuales se llevan al infinito (se aplican indefinidamente).
Por ejemplo, con el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$, se parte de la figura o conjunto inicial $I = [0, 1]$, al definir

$$\begin{aligned} f_0 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f_0(t) = \frac{t}{3} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f_1(t) = \frac{t+2}{3} \end{aligned}$$

se tiene que:

$$f_0(I) = [0, 1/3] \qquad \text{y} \qquad f_1(I) = [2/3, 1].$$

Iterando el proceso, al final se obtiene:

$$\mathcal{C} = \bigcup (f_i \circ f_j \circ \cdots)(I).$$

Para la curva de Koch, sea $\vec{l}$ un segmento de recta de longitud uno, al definir:

$$\begin{aligned} g_0 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto g_0(x, y) = (\frac{x}{3}, \frac{y}{3}) \\ &= A_0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ donde } \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto g_1(x, y) = (\frac{x - \sqrt{3}y + 2}{6}, \frac{\sqrt{3}x + y}{6}) \\ &= A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ donde } \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 1/6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2 &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto g_2(x,y) = \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{6}+\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}x+y}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \\ &= A_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{bmatrix}, \text{ donde } \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto g_3(x,y) = \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y}{3}\right) \\ &= A_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ donde } \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Iterando estas funciones se obtiene al final:

$$\mathcal{K} = \bigcup (g_i \circ g_j \circ g_k \circ g_l \circ \cdots)(\vec{l}).$$

Las funciones involucradas en estos procesos tienen características comunes y resultan tener una dinámica especial, fue J. Hutchinson [2] en el 1981 el primero en estudiar estos sistemas de funciones, creando los sistemas iterados de funciones y obteniendo una unidad dentro de todo aquel proceso de creación de figuras nuevas tanto en el ámbito matemático como computacional.

Definición 1.8. *Una función $f : X \longrightarrow X$, en el espacio métrico (X,d) es una contracción si existe un número $0 \leq r < 1$, tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq r d(x,y), \quad \forall x, y \in X,$$

r es el factor de contracción.

Definición 1.9. *Una función $S : X \longrightarrow X$ en el espacio métrico (X,d), es una semejanza si*

$$d(S(x), S(y)) = r d(x,y), \quad \forall x, y \in X$$

y algún r fijo.

Definición 1.10. *Un sistema iterado de funciones (SIF) sobre un espacio métrico completo (X,d) es una colección finita*

$$\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$$

de funciones contractivas de (X,d) en sí mismo; cada una con factor de contracción r_i respectivamente. El factor de contracción para $\mathcal{F}$ está definido por

$$r = \max\{r_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Observación 1.11. *Algunos autores usan SIF "Hiperbólico" para distinguir la anterior definición de una mucho más simple, dada como una colección finita de funciones que actúa sobre un conjunto arbitrario.*

Así las cosas, para la construcción del conjunto de Cantor se tiene el sistema iterado de funciones

$$\mathcal{F} = \{f_0, f_1\} \quad \text{sobre el espacio métrico} \quad (\mathbb{R}, d_\mu) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{C} = \bigcup_{f_i \in \mathcal{F}} f_i(\mathcal{C}),$$

en este caso se dice que $\mathcal{C}$ es el invariante del sistema $\mathcal{F}$.
Y para la curva de Koch, dado el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_\mu)$ y las funciones $g_o, g_1, g_2,$ y g_3 definidas antes, se tiene que el SIF para $\mathcal{K}$ es

$$\mathcal{G} = \{g_0, g_1, g_2, g_3\} \quad \text{tal que} \quad \mathcal{K} = \bigcup_{g_i \in \mathcal{K}} g_i(\mathcal{K}).$$

Definición 1.12. *El conjunto invariante para una colección finita de funciones contractivas $\mathcal{F}$ es el único conjunto compacto no vacío $K \subset X$ que es invariante bajo la acción de los elementos de $\mathcal{F}$, esto es:*

$$K = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} (K).$$

John E. Hutchinson en su artículo *fractal and self-similarity*, ver sección 3.1 de [1] , garantiza la existencia de tales conjuntos invariantes. En efecto,

Teorema 1.13. *Dado $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ un conjunto finito de contracciones sobre un espacio métrico completo, entonces existe un único conjunto compacto no vacío K, invariante con respecto a $\mathcal{F}$, es decir que:*

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i(K).$$

1.2. El espacio de los fractales

A partir de un espacio métrico completo (X, d), es posible construir otro espacio métrico completo cuyos puntos sean subconjuntos del primero.

Definición 1.14. *Dado un espacio métrico completo (X, d), el espacio de los fractales es la pareja $(\mathcal{H}(X), d_h)$, donde $\mathcal{H}(X)$ es el conjunto de partes compactas de X diferentes de vacío, y d_h es la distancia Hausdorff definida por:*

$$d_h(A, B) = \text{máx}\{d(A, B), d(B, A)\} \quad \textit{para todo} \quad A, B \in \mathcal{H}(X),$$

con $d(A, B) = \sup_{a \in A}\{\inf_{b \in B}\{d(a, b)\}\}$.

Definición 1.15. *Sea $f : X \longrightarrow X$ una función en el espacio métrico (X, d), se dice que x_0 es un punto fijo de f si*

$$f(x_0) = x_0.$$

De esta manera, dado el espacio métrico de los fractales $(\mathcal{H}(X), d_h)$ es posible hallar en él un comportamiento adecuado para la convergencia de algunas funciones que generan fractales, esto se logra por medio del

Teorema 1.16 (Completez del espacio de los fractales). *Sea (X,d) un espacio métrico completo, entonces $(\mathcal{H}(X),d_h)$ es un espacio métrico completo y además si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{H}(X)$ es una sucesión de cauchy, entonces $A=\lim_{n\to\infty}A_n$ se puede caracterizar como*

$$A=\{x\in X \mid \textit{existe una sucesión de cauchy } \{x_n\}\in A_n \textit{ que converge a } x\}.$$

Para demostraciones al respecto ver [2] y [7].
Los puntos fijos de una función constituyen la base del análisis de los fractales, pues estos surgen de funciones en el espacio de los fractales definido anteriormente. Un teorema bastante conocido en la teoría de los sistemas dinámicos es el teorema del punto fijo (ver [8]) que garantiza la existencia y unicidad de aquellos puntos.

Teorema 1.17 (Teorema del punto fijo). *Sea $f:X\longrightarrow X$ una función contractiva definida sobre un espacio métrico completo (X,d). Entonces f tiene un único punto fijo $x_0\in X$ y, además, para cualquier $x\in X$ la sucesión $\{f^{\circ n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a x_0, esto es, $\lim_{n\to\infty}f^{\circ n}(x)=x_0$ para todo $x\in X$.*

Donde $f^{\circ n}$ denota la composición de f consigo mismo n-veces, es decir,

$$f^{\circ n}=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n-\text{veces}}.$$

Ahora veamos como surgen las funciones contractivas en el espacio métrico de los fractales.

Definición 1.18. *Sea $f:X\longrightarrow X$ una función contractiva con factor de contracción s y (X,d) un espacio métrico completo. Entonces*

$$\tilde{f}:\mathcal{H}(X)\longrightarrow\mathcal{H}(X),\ \textit{definida como } \tilde{f}(A)=\{f(x)\mid x\in A\} \textit{ para todo } A\in\mathcal{H}(X)$$

es una función contractiva en $(\mathcal{H}(X),d_h)$ con factor de contracción s.

Definición 1.19. *Se define el operador*

$$W:\mathcal{H}(X)\longrightarrow\mathcal{H}(X)\quad \textit{como}\quad W(M)=\bigcup_{i=1}^{n}w_i(M),$$

para todo $M\in\mathcal{H}(X)$ y toda colección finita de contracciones $\{w_i\mid i=1,2,\ldots,n\}$ en el espacio de los fractales $\mathcal{H}(X)$, con factor de contracción s_i, respectivamente.

El operador W resulta ser una aplicación contractiva con factor de contracción

$$s=\max\{s_i\mid i=1,2,\ldots,n\}.$$

Debido a la completez del espacio métrico de los fractales $(\mathcal{H}(X),d_h)$ y el teorema del punto fijo, se concluye que W tiene un único punto fijo $A\in\mathcal{H}(X)$ tal que

$$A=W(A)=\bigcup_{i=1}^{n}w_i(A),$$

a este punto fijo se le llama atractor del SIF o fractal determinístico generado por el SIF $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$.
Además, para cualquier $B \in \mathcal{H}(X)$

$$\lim_{n\to\infty} W^{\circ n}(B) = A.$$

Notándose así, que el atractor del SIF resulta ser un conjunto invariante para el conjunto de funciones $\{w_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$, por tanto muchos conjuntos de tipo fractal se pueden obtener como el atractor de un SIF.

2. Los sistemas iterados de funciones en el grupo de Heisenberg.

El estudio del grupo de Heisenberg se motiva en su aparición en el análisis de varias variables complejas y en la mecánica cuántica.

A continuación se consideran los sistemas iterados de funciones en el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}$, específicamente el sistema estará formado por funciones contractivas afines que actúan sobre el grupo de Heisenberg, y que surgen como levantamientos de funciones afines en el plano.

Se considera el grupo de Heisenberg $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^3, *)$ como un grupo homogéneo dotado de la distancia de Heisenberg $d_{\mathbb{H}}$.

Definición 2.1. *Sea $\mathbb{H} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. El par $(\mathbb{H}, *)$, donde $*$ es la operación definida por:*

$$(x,t) * (x',t') = \big(x + x', t + t' + 2\langle x, Jx'\rangle\big)$$

con $J : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $J(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$, y $\langle , \rangle$ el producto interno usual de $\mathbb{R}^2$, se llama el grupo de Heisenberg y se denota por $\mathbb{H}$.

Observación 2.2. *Los elementos neutro e inverso del grupo $\mathbb{H}$ son respectivamente, $0 = (0,0,0)$ y $p^{-1} = -p$, para todo $p \in \mathbb{H}$.*

Definición 2.3. *La función $|\cdot|_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$|(x,t)|_{\mathbb{H}} := (\|x\|^4 + t^2)^{1/4} \tag{2.3.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$, es la norma de Heisenberg.

Definición 2.4. *La función $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$d_{\mathbb{H}}(p,q) := |p^{-1} * q|, \tag{2.4.1}$$

donde $*$ denota la ley del grupo y $|\cdot|_{\mathbb{H}}$ la norma de Heisenberg, es la métrica o distancia de Heisenberg. A $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ se le llama **el espacio métrico de Heisenberg.**

Esta distancia o métrica es homogénea, esto es, $d_{\mathbb{H}}(\delta_r p, \delta_r q) = r d_{\mathbb{H}}(p,q)$ donde $\delta_r : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H},\ r > 0$ es la dilatación de Heisenberg (ver ejemplo 2.18)

Definición 2.5. *La función*

$$\tau_{p_0} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

definida por $\tau_{p_0}(p) = p_0 * p$, con $p_0 \in \mathbb{H}$, se llama traslación a izquierda.

Definición 2.6. *Una transformación afín W en $\mathbb{R}^2$ es una composición de una transformación lineal y una traslación, esto es:*

$$W(x,y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix},$$

donde la transformación lineal está representada por la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *(con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$) y la traslación está representada por el vector (e,f).*

Definición 2.7. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Una función $F : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ se llama un levantamiento de f si:*

$$\pi \circ F = f \circ \pi.$$

Aquí $\pi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, denota la función proyección

$$\pi(x,t) = x.$$

Las transformaciones afines son muy útiles, ya que estas permiten realizar escalamiento en cada eje, rotaciones, reflexiones y traslaciones de imágenes.

Observación 2.8. *Para que una transformación afín sea una función contractiva se requiere que la norma de la matriz asociada a la parte lineal sea menor que uno.*

Para asegurar que el estudio de SIF en el grupo de Heisenberg tiene un contenido no-trivial, es necesario garantizar la existencia de endomorfismos lipschitzianos adecuados en el grupo de Heisenberg.

Definición 2.9. *Una función $f : X \longrightarrow X$ se llama r-lipschiziana, $r > 0$ si*

$$d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x,y) \text{ para todo } x, y \in X. \tag{2.9.1}$$

Además, f es lipschitziana si es r-lipschitziana para algún $r < \infty$. El ínfimo de todos los r tales que (2.9.1) se satisface para todo $x, y \in X$ se llama la constante de Lipschitz de f; y se denota por $LIP(f)$.

Definición 2.10 (Desigualdad de Hadamard). *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$, entonces*

$$detA \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

En el caso de matrices reales, si $A > 0$ (es decir, que para cada i, j, $a_{ij} > 0$), la igualdad vale si y solo si A es diagonal.

Observación 2.11. *Dado $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función r-lipschitziana y diferenciable, la desigualdad de Hadamard implica que*

$$|detDf(x)| \leq r^n, \tag{2.11.1}$$

casi en todas parte, es decir, que satisface (2.11.1) excepto en un conjunto de medida cero.

Definición 2.12. *Un sistema iterado de funciones afines (SIFA) consiste de un sistema de funciones contractivas afines.*

Definición 2.13. *Un sistema iterado horizontal de funciones es una colección de contracciones del grupo de Heisenberg $\mathbb{H}$, con respecto a la métrica de Heisenberg y se denota por $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$.*

Definición 2.14. *Los conjuntos invariantes $K_{\mathbb{H}}$, para sistemas iterados de funciones horizontal $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$, se conocen como fractales horizontales.*

Si una función afín de $\mathbb{R}^3$ es lipschitziana con respecto a $d_{\mathbb{H}}$, entonces esta debe tener una forma especial, de hecho, esta necesariamente aparece como un levantamiento de una función afín de $\mathbb{R}^2$.

Proposición 2.15. *Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función afín de la forma*

$$F(x,t) = (Ax + ta + b, \langle d, x\rangle + ct + \tau)$$

donde A es una matriz real $2\times 2, a, b, d \in \mathbb{R}^2$ y $c, \tau \in \mathbb{R}^2$. Entonces F es lipschitziana con respecto a la distancia de Heisenberg $d_{\mathbb{H}}$, si y solo si las siguientes relaciones se cumplen

$$a = (0,0), \quad d = -2A^T Jb, \quad c = detA. \tag{2.15.1}$$

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que F es lipschitziana, veamos que (2.15.1) se cumple.
En efecto, si F es lipschitziana, Sea $L = LIP(F)$, entonces

$$d_{\mathbb{H}}\big(F(0,0), F(x,t)\big) \leq L d_{\mathbb{H}}\big((0,0)(x,t)\big)$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.
Utilizando (2.3.1) y (2.4.1) resulta:

$$d_{\mathbb{H}}\big((b,\tau), (Ax + t\cdot a + b, \langle d, x\rangle + ct + \tau)\big)$$

$$= \big|(-b, -\tau) * (Ax + t\cdot a + b, \langle d, x\rangle + ct + \tau)\big|_{\mathbb{H}}$$

$$= \left|\Big(Ax + t\cdot a, \langle d, x\rangle + ct + 2\big\langle -b, J(Ax + t\cdot a + b)\big\rangle\Big)\right|_{\mathbb{H}}.$$

Ahora bien,

$$\langle x, Jy\rangle = -\langle Jx, y\rangle.$$

En efecto, si $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$

$$\begin{aligned}\langle x, Jy\rangle &= \big\langle (x_1, x_2), (-y_2, y_1)\big\rangle \\ &= -x_1y_2 + x_2y_1 \\ &= -\big(y_1(-x_2) + (x_1)y_2\big) \\ &= -\big\langle (-x_2, x_1), (y_1, y_2)\big\rangle \\ &= -\langle Jx, y\rangle,\end{aligned}$$

y $\langle x, Jx\rangle = 0$, puesto que

$$\big\langle (x_1, x_2), (-x_2, x_1)\big\rangle = -x_1x_2 + x_2x_1 = 0.$$

Luego

$$d_{\mathbb{H}}\big((b,\tau), (Ax + t\cdot a + b, \langle d, x\rangle + ct + \tau)\big) =$$

$$\begin{aligned}
&= \big|(-b,-\tau) * (Ax + t\cdot a + b, \langle d, x\rangle + ct + \tau)\big|_{\mathbb{H}}\\
&= \Big|\Big(Ax + t\cdot a, \langle d, x\rangle + ct + 2\Big\langle -b, J(Ax + t\cdot a + b)\Big\rangle\Big)\Big|_{\mathbb{H}}\\
&= \Big|\Big(Ax + t\cdot a, \langle d, x\rangle + ct + 2\langle Jb, b\rangle + 2\langle Jb, Ax + t\cdot a\rangle\Big)\Big|_{\mathbb{H}}\\
&= \Big|\Big(Ax + t\cdot a, \langle d, x\rangle + ct + 2\langle Jb, Ax + t\cdot a\rangle\Big)\Big|_{\mathbb{H}}\\
&= \Big[\|Ax + t\cdot a\|^4 + \big(\langle d, x\rangle + ct + 2\langle Jb, Ax + t\cdot a\rangle\big)^2\Big]^{1/4}.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|Ax + t\cdot a\|^4 + \big(\langle d, x\rangle + ct + 2\langle Jb, Ax + t\cdot a\rangle\big)^2 \le L^4\big(\|x\|^4 + t^2\big)$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

Ahora, para $x = 0$, se tiene que:

$$\|t\cdot a\|^4 + \big(ct + 2\langle Jb, t\cdot a\rangle\big)^2 \le L^4 \cdot t^2 \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así que, $a = (0,0)$, pues $t\cdot a = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, para $t = 0$, se tiene que:

$$\|Ax\|^4 + \big(\langle d, x\rangle + 2\langle Jb, Ax\rangle\big)^2 \le L^4 \cdot \|x\|^4 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^{\nvDash}$$

así,

$$\begin{aligned}
\big(\langle d, x\rangle + 2\langle Jb, Ax\rangle\big)^2 &\le L^4\|x\|^4 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^2\\
\big|\langle d, x\rangle + 2\langle Jb, Ax\rangle\big| &\le L^2\|x\|^2, \quad \text{de donde}\\
\big|\langle d, x\rangle + 2\langle A^*Jb, x\rangle\big| &\le L^2\|x\|^2
\end{aligned}$$

pero como $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, entonces $A^* = \overline{A^T} = A^T$, luego

$$\begin{aligned}
\big|\langle d, x\rangle + 2\langle A^TJb, x\rangle\big| &\le L^2\|x\|^2 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^2\\
\big|\langle d + 2A^TJb, x\rangle\big| &\le L^2\|x\|^2
\end{aligned}$$

de manera que

$$\langle d + 2A^TJb, x\rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Concluyendo que:

$$d = -2A^T Jb.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\big\langle Ax_1, JA(x_2 - x_1)\big\rangle &= -\big\langle JAx_1, A(x_2 - x_1)\big\rangle \\ &= -\langle JAx_1, Ax_2 - Ax_1\rangle \\ &= -\langle JAx_1, Ax_2\rangle + \langle JAx_1, Ax_1\rangle\end{aligned}$$

es decir, que:

$$\big\langle Ax_1, JA(x_2 - x_1)\big\rangle = \langle Ax_1, JAx_2\rangle. \tag{2.15.2}$$

Ahora, tomando la matriz A como $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y los vectores x_1, x_2 como $x_1 = (x_{11}, x_{12})$ y $x_2 = (x_{21}, x_{22})$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\langle Ax_1, JAx_2\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}, J\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}\right\rangle \\ &= \big\langle (ax_{11} + bx_{12}, cx_{11} + dx_{12}), J(ax_{21} + bx_{22}, cx_{21} + dx_{22})\big\rangle \\ &= \langle (ax_{11} + bx_{12}, cx_{11} + dx_{12}), (-cx_{21} - dx_{22}, ax_{21} + bx_{22})\rangle \\ &= -ax_{11}cx_{21} - adx_{11}x_{22} - bcx_{12}x_{21} - bdx_{12}x_{22} \\ &\quad + cax_{11}x_{21} + bcx_{11}x_{22} + dax_{12}x_{21} + dbx_{12}x_{22} \\ &= (ad - bc)x_{12}x_{21} - x_{11}x_{22}(ad - bc) \\ &= detA(x_{12}x_{21} - x_{11}x_{22}) \\ &= detA\big\langle (x_{11}, x_{12}), (-x_{22}, x_{21})\big\rangle \\ &= detA\langle x_1, Jx_2\rangle\end{aligned}$$

es decir, que:

$$\langle Ax_1, JAx_2\rangle = detA\langle x_1, Jx_2\rangle. \tag{2.15.3}$$

Concluyendo de (2.15.2) y (2.15.3) que:

$$\big\langle Ax_1, JA(x_2 - x_1)\big\rangle = \langle Ax_1, JAx_2\rangle = detA\langle x_1, Jx_2\rangle.$$

Entonces, usando estas últimas identidades, las relaciones encontradas antes y la condición de Lipschitz sobre F para los puntos (x_1, t_1) y (x_2, t_2), se tiene:

$$\Big|\big(A(x_2 - x_1), c(t_2 - t_1) - 2detA\langle x_1, Jx_2\rangle\big)\Big|_{\mathbb{H}} \le L\Big[\|x_2 - x_1\|^4 + \big(t_2 - t_1 - 2\langle x_1, Jx_2\rangle\big)^2\Big]^{1/4}$$

entonces,

$$\|A(x_2 - x_1)\|^4 + \big(c(t_2 - t_1) - 2detA\langle x_1, Jx_2\rangle\big)^2 \le L^4\Big[\|x_2 - x_1\|^4 + \big(t_2 - t_1 - 2\langle x_1, Jx_2\rangle\big)^2\Big]$$

de donde,

$$\big(c(t_2 - t_1) - 2detA\langle x_1, Jx_2\rangle\big)^2 \le L^4\Big[\|x_2 - x_1\|^4 + \big(t_2 - t_1 - 2\langle x_1, Jx_2\rangle\big)^2\Big].$$

Escogiendo $t_2 - t_1 = 2\langle x_1, Jx_2\rangle$, donde $x_1 \neq 0$ y $x_2 = x_1 + s \cdot Jx_1$, para cualquier $s \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\big(2c\langle x_1, Jx_2\rangle - 2detA\langle x_1, Jx_2\rangle\big)^2 \leq L^4\big(\|x_2 - x_1\|^4\big) \tag{2.15.4}$$

pero

$$\begin{aligned}\langle x_1, Jx_2\rangle &= -\langle Jx_1, x_2\rangle\\ &= -\langle Jx_1, x_1 + s\cdot Jx_1\rangle\\ &= -\langle Jx_1, x_1\rangle - \langle Jx_1, s\cdot Jx_1\rangle\\ &= -s\langle Jx_1, Jx_1\rangle\\ &= -s\|Jx_1\|^2.\end{aligned}$$

Entonces (2.15.4) se convierte en

$$\begin{aligned}4\big(\langle x_1, Jx_2\rangle\big)^2(c - detA)^2 &\leq L^4\|s\cdot Jx_1\|^4, \text{ luego}\\ 4\big(-s\|Jx_1\|^2\big)^2(c - detA)^2 &\leq L^4|s|^4\|Jx_1\|^4, \text{ así las cosas}\\ 4(c - detA)^2 &\leq L^4|s|^2 \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Dado que s es arbitrario, se obtiene que $c = detA$.

$\Leftarrow$) Supongamos que las condiciones (2.15.1) se satisfacen, veamos que F es lipschitziana, es decir, que F es r-lipschitziana para algún $r < \infty$. En efecto, como

$$F(x,t); = (Ax + t\cdot a + b, \langle d, x\rangle + ct + \tau),$$

así, que para todo $(x,t), (y,s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$
$d_{\mathbb{H}}\big(F(x,t), F(y,s)\big)$

$$\leq d_{\mathbb{H}}\Big[\big(Ax + b, -2\langle Jb, Ax\rangle + detA\ t + \tau\big), \big(Ay + b, -2\langle Jb, Ay\rangle + detA\ s + \tau\big)\Big]$$

$$= \big|(Ay - Ax, detA(s-t) - 2\langle Jb, Ay\rangle + 2\langle Jb, Ax\rangle) - 2\langle Ax + b, J(Ay + b)\rangle\big|_{\mathbb{H}}$$

$$= \Big[\|A(y-x)\|^4 + \big(detA(s-t) - 2\langle Jb, Ay\rangle + 2\langle Jb, Ax\rangle + 2\langle JAx, Ay\rangle + \langle JAx, b\rangle + 2\langle Jb, Ay\rangle + 2\langle Jb, b\rangle\big)^2\Big]^{1/4}$$

$$= \Big[\|A(y-x)\|^4 + \big(detA(s-t) - 2detA\langle x, Jy\rangle\big)^2\Big]^{1/4}.$$

Entonces,

$$d_{\mathbb{H}}^{1/4}\big(F(x,t), F(y,s)\big) = \|A(y-x)\|^4 + \big(detA(s-t) - 2detA\langle x, Jy\rangle\big)^2.$$

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|A\| \leq M$, además, para la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = Ax + b$ se tiene que para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^2, d\big(f(x), f(y)\big) = d(Ax + b, Ay + b) = \big|A(x-y)\big| \leq M|y - x| = Md(x,y)$, es decir,

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq Md(x,y), \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

con lo que la función f es lipschitziana, luego aplicando la desigualdad (2.11.1) a la función $f(x) = Ax + b$ se encuentra que:

$$|detA| \leq M^2, \text{esto es, } (detA)^2 \leq M^4.$$

Así las cosas,

$$\left[d_{\mathbb{H}}\Big(F(x,t), F(y,s)\Big)\right]^{1/4} \leq M^4\|x-y\|^4 + M^4\big(s - t - 2\langle x, Jy\rangle\big)^2$$

$$= M^4\Big(\|x-y\|^4 + \big(s - t - 2\langle x, Jy\rangle\big)^2\Big)$$

obteniéndose:

$$d_{\mathbb{H}}\big(F(x,t), F(y,s)\big) = Md\big((x,t),(y,s)\big) \quad \text{para todo} \quad (x,t),(y,s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

concluyendo que F es lipschitziana. ■

Ahora bien, para cualquier función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lipschitziana, muchas funciones diferentes $F : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ sirven como levantamientos de f. Sin embargo, si se adiciona que F sea lipschitziana con respecto a $d_{\mathbb{H}}$, entonces F queda determinada en forma única por las formulas:

$$F(x,t) := \big(f(x), \lambda t + h_0(x)\big) \tag{2.15.5}$$

$$\nabla h_0 = 2(\lambda \cdot J - Df^* \cdot Jf) \tag{2.15.6}$$

casi en todas partes.
Ademas, tales levantamientos existen si y solo si $detDf$ es constante casi en todas partes, tales levantamientos no son únicos, de hecho, cualquier dos levantamientos de una función en $\mathbb{R}^2$ difieren solamente por adición de una constante.
El siguiente teorema comprueba este hecho.
Sea $c = (2 + \sqrt{3h})^{1/4} \approx 1{,}3899\ldots$

Teorema 2.16 (Existencia y unicidad de levantamientos lipschitzianos horizontales). *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ r-lipschitziana con $detDf \equiv \lambda$ casi en todas partes. Entonces existe un levantamiento cr-lipschitziano $F : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$.*
Si $\tilde{F}$ es otro levantamiento lipschitziano de f, entonces $\tilde{F}(x,t) = F(x, t+\tau)$ para algún $\tau \in \mathbb{R}$.
Recíprocamente, si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es lipschitziana con levantamiento lipschitziano, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $detDf \equiv \lambda$ casi en todas partes.

Demostración. $\Leftarrow$)Asuma que f es una función de Lipschitz de $\mathbb{R}^2$ con levantamiento lipschitziano F en $\mathbb{H}$. Por el teorema de Rademacher, f es diferenciable casi en todas partes. El teorema de diferenciabilidad de Pansu [9] implica que F es p-diferenciable en casi todo punto p_0

de $\mathbb{H}$. Por definición, esto significa que existe un homomorfismo homogéneo $D_P F(p_0) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ tal que

$$\delta_{1/\epsilon} \circ \tau^{-1}_{F(p_0)} \circ F \circ \tau_{p_0} \circ \delta_\epsilon \tag{2.16.1}$$

converge localmente y uniformemente a $D_P F(p_0)$ cuando $\epsilon \to 0$. El p-diferencial de F en p_0 es el homomorfismo de grupo $D_P F(p_0)$.

Escoja un punto $p_0 = (x_0, t_0) \in \mathbb{H}$ tal que f es diferenciable en x_0 y F es Pansu-diferenciable en p_0 como también en $(x_0, -t_0)$ (esta ultima restricción es solamente un detalle técnico que se usara en (2.16.3). Casi todo punto p_0 es de este tipo.

El objetivo, es hallar el p-diferencial $D_P F$ en p_0. La proyección π conmuta por todo (2.16.1), de donde

$$\pi \circ D_P F(p_0) = Df(x_0) \circ \pi. \tag{2.16.2}$$

Dado que $D_P F(p_0)$ es un homomorfismo de grupo, y en particular un endomorfismo lipschitziano de $\mathbb{H}$, se tiene, por la proposición (2.15),

$$\begin{gathered} D_P F(p_0)(e_j, 0) = (\partial x_j f(x_0), 0) \quad j = 1, 2, \\ \text{y } D_P F(p_0)(0, 1) = (0, \mu), \text{ donde } \mu = detDf(x_0). \end{gathered}$$

Así,

$$D_P F(p_0) = \begin{pmatrix} Df(x_0) & 0 \\ 0 & detDfx_o \end{pmatrix}.$$

Dado que F es un levantamiento de f, se puede escribir $F(x,t) = \big(f(x), h(x,t)\big)$. Para hallar una formula para $h : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, se usa la t-coordenada de $D_P F$ en (2.16.1) para obtener

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-2} \Bigg(& h(x_0 + \epsilon x, t_0 + 2\epsilon \langle x_0, Jx \rangle + \epsilon^2 t) \\ -h(x_0, t_0) - 2\big\langle f(x_0), Jf(x_0 + \epsilon x)\big\rangle \Bigg) & = detDf(x_0) \cdot t \end{aligned} \tag{2.16.3}$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{H}$. Tomando $x = 0$, se halla que

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(h(x_0, t_0)\big) \cdot t = detDf(x_0) \cdot t$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, y por tanto

$$h(x_0, t_0) = detDf(x_0) \cdot t_0 + h_0(x_0) \tag{2.16.4}$$

para algún $h_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Note que (2.16.4) se cumple para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ y *a priori* solamente para casi todo $x_0 \in \mathbb{R}^2$. La función h_0 es también *a priori* solamente definida casi en todas partes.

Sin embargo, dado que h es una función continua se obtiene de (2.16.4) que h_0 y así $\lambda(x_0) := detDf(x_0)$, son ambas continuas en casi todo x_0. Además, estas funciones tienen extensiones continuas tales que (2.16.4) se cumple en todas partes. En lo que sigue se trabaja con estas extensiones continuas de h_0 y λ y bajo la afirmación de que (2.16.4) se cumple en todas partes. Ahora, sea $t = 0$ en (2.16.3), se baja un factor de ϵ en el denominador y se usa (2.16.4) para obtener:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{h_0(x_0+\epsilon x)-h_0(x_0)+t_0\big(\lambda(x_0+\epsilon x)-\lambda(x_0)\big)}{\epsilon}+2\langle x_0, Jx\rangle\lambda(x_0+\epsilon x)\right)$$
$$= 2\big\langle f(x_0), J(Df(x_0)x)\big\rangle.$$

Usando la igualdad de arriba una vez con t_0 y otra con $-t_0$ y sumando, se deduce que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{h_0(x_0+\epsilon x)-h_0(x_0)}{\epsilon} &= 2\big\langle f(x_0), J(Df(x_0)x)\big\rangle - 2\langle x_0, Jx\rangle\cdot\lambda(x_0)\\ &= 2\big(\lambda(x_0)\langle Jx_0, x\rangle - \langle Df(x_0)^*\cdot Jf(x_0), x\rangle\big).\end{aligned}$$

Así, se muestra que $\Delta h_0(x_0)$ existe y satisface

$$\nabla h_0(x_0) = 2\big(\lambda(x_0)J(x_0) - Df(x_0^*\cdot Jf(x_0))\big) \tag{2.16.5}$$

para casi todo x_0.
Se mostrara ahora que $detDf$ es casi en todas partes una constante. Para esto se recuerda (2.16.3) y se usa la formula explícita para h de (2.16.4) para obtener

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-2}\Bigg((\lambda(x_0+\epsilon x)-\lambda(x_0))(t_0+2\epsilon\langle x_0, Jx\rangle)+h_0(x_0+\epsilon x)-h_0(x_0)$$
$$+2\epsilon\lambda(x_0)\langle x_0, Jx\rangle - 2\langle f(x_0), Jf(x_0+\epsilon x)\rangle\Bigg)=0$$

de donde se obtiene, bajando un factor de ϵ en el denominador,

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\lambda(x_0+\epsilon x)-\lambda(x_0)}{\epsilon}t_0 &= 2\langle f(x_0), J(Df(x_0)x)\rangle - 2\lambda(x_0)\langle x_0, Jx\rangle - \nabla h_0(x_0)x\\ &= 0\end{aligned}$$

para todo $x\in\mathbb{R}^2$. Por tanto, de (2.16.5), $\lambda(x_0) = detDf(x_0)\equiv\lambda$ para casi todo $x\in\mathbb{R}^2$.
Usando la continuidad de λ se ve que λ es constante.
$\Rightarrow$) Ahora, solo basta probar que siempre existe un levantamiento lipschitziano tal que $detDf\equiv\lambda$.
Asuma que f es r-lipschitziana, la desigualdad (2.11.1) nos da que $|\lambda|\le r^2$.
Colóquese

$$F(x,t) = \big(f(x), \lambda t + h_0(x)\big),$$

donde h_0 está dado(salvo una constante aditiva) por (2.16.5).
Se requiere que F sea cr-lipschitziana en la métrica $d_{\mathbb{H}}$, donde $c = (2+\sqrt{3})^{1/4}$.
Para ver esto se calcula directamente

$$d_{\mathbb{H}}\big(F(x,t), F(y,s)\big)^4 = |f(y)-f(x)|^4 + |\lambda(s-t)+h_0(y)-h_0(x)-2\langle f(x), Jf(y)\rangle|^2.$$

La parte difícil de la prueba será estimar el segundo término del lado derecho en la anterior ecuación. Por tanto sea

$$A := \lambda(s-t)+h_0(y)-h_0(x)-2\langle f(x), Jf(y)\rangle.$$

Estimando la expresión de arriba se hace uso de (2.16.5) que se cumple casi en todas partes. Para hacer los cálculos formalmente correctos se imponen algunas restricciones iniciales en los puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$. Se fija primero $x \in \mathbb{R}^2$ y un valor ρ. Dado que (2.16.5) se cumple casi en todas partes se cumple que para y en un conjunto $\mathcal{L}^1$-medible completamente sobre la circunferencia $\partial B(x,\rho)$, (2.16.5) se cumple en los puntos

$$x_0 = \xi(t) = \frac{y-x}{|y-x|}t + x$$

para $\mathcal{L}^1$.

En lo que sigue se trabaja con los puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$.
Se hace $f = (u, v)$. Dado que h_0 es pre-escrita por su gradiente, es natural escribir

$$\begin{aligned} h_0(y) - h_0(x) &= \int_0^{|y-x|} \big\langle \nabla h_0(\xi(t,\xi'(t)) \big\rangle dt \\ &= 2\int_0^{|y-x|} \langle v(\xi)\nabla u(\xi) - u(\xi)\nabla v(\xi), \xi' \rangle dt + 2\lambda \int_0^{|y-x|} \langle J(\xi), \xi' \rangle dt \\ &= 2\int_0^{|y-x|} \langle v(\xi)\nabla u(\xi) - u(\xi)\nabla v(\xi), \xi' \rangle dt - 2\lambda \langle x, Jy \rangle. \end{aligned}$$

Similarmente, se escribe

$$\begin{aligned} \big\langle f(x), J(f(y)) \big\rangle &= \big\langle f(x), J(f(y) - f(x)) \big\rangle \\ &= \int_0^{|y-x|} \langle v(x)\nabla u(\xi) - u(x)\nabla v(\xi), \xi' \rangle dt. \end{aligned}$$

Combinando los dos cálculos anteriores, se halla

$$\begin{aligned} A^2 = \Bigg| &\lambda(s - t - 2\langle x, Jy \rangle) \\ &+ 2\int_0^{|y-x|} \big\langle (v(\xi) - v(x))\nabla u(\xi) - (u(\xi) - u(x))\nabla v(\xi), \xi' \big\rangle dt \Bigg|^2. \end{aligned} \tag{2.16.6}$$

A continuación, sean p y q los exponentes conjugados, es decir, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ cuyos valores exactos se escogen después. Usando la estimación $(x+y)^2 \leq px^2 + qy^2$, $x, y \geq 0$, y $|\lambda| \leq r^2$ junto con la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que:

$$\begin{aligned} A^2 &\leq pr^4(s - t - 2\langle x, Jy \rangle)^2 \\ &\quad + 4q\bigg(\int_0^{|y-x|} |f(x) - f(\xi)| \sqrt{|\nabla u(\xi)|^2 + |\nabla v(\xi)|^2} dt \bigg)^2 \\ &\leq pr^4(s - t - 2\langle x, Jy \rangle)^2 + 2qr^4|y-x|^4 \end{aligned} \tag{2.16.7}$$

dado que f es r-lipschitziana, y por tanto $|\nabla v(\xi)|, |\nabla u(\xi)| \leq r^2$.
Poniendo todo junto, se obtiene

$$d_{\mathbb{H}}\big(F(x,t), F(y,s)\big)^4 \leq (2+\sqrt{3}) r^4 d_{\mathbb{H}}((x,t),(y,s)\big)^4.$$

Dado que la estimación uniforme anterior se cumple para un conjunto denso de $(x,t), (y,s)$, esto se, se cumple en todas partes, por continuidad. ■

Observación 2.17. *La proposición (2.15) junto con el teorema anterior, muestran que toda función afín lipschitziana con respecto a la distancia de Heisenberg surge como un levantamiento de funciones afines del plano. En efecto, toda función afín de Lipschitz $F : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, surge como un levantamiento de una función afín $f(x) = Ax + b$ y está dada por*

$$F(x,t) = \tilde{A}_b \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} + \tilde{b},$$

donde

$$\tilde{A}_b = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -2(Jb)^T A & detA \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix},$$

y τ es una constante real.
Explícitamente $F(x,t) = \big(f(x), detA \cdot t - 2\langle Ax, Jb\rangle\big) + \tau$.
Verificandose (2.16.7) con $h_0(y) = -2\langle Ay, Jb\rangle + \tau$. En efecto:

$$\begin{aligned} \big|h_0(y) - h_0(x) - 2\langle f(x), Jf(y)\rangle + 2\lambda\langle x, Jy\rangle\big| &= \big|-2\langle Ay, Jb\rangle + \tau + 2\langle Ax, Jb\rangle \\ -\tau - 2\langle Ax + b, J(Ay + b)\rangle + 2detA\langle x, Jy\rangle\big| & \\ &= \big|-2\langle Ay, Jb\rangle + 2\langle Ax, Jb\rangle \\ +2\langle JAx, b\rangle + 2\langle Jb, Ay\rangle + detA\langle x, Jy\rangle\big| = 0. & \end{aligned}$$

Para así deducir que la constante de Lipschitz de F como endomorfismo de $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ es igual a la constante de Lipschitz de f como endomorfismo de $(\mathbb{R}^2, d_E)$.

Ejemplo 2.18. *Escoja $A = rI$, $r > 0$ (donde I denota la matriz idéntica 2×2) y $b = 0$. Entonces para $f(x) = Ax = rI$, el levantamiento correspondiente a $\tau = 0$ está dado por*

$$\begin{aligned} F(x,t) &= (Ax + b, -2\langle Ax, Jb\rangle + \tau detA + \tau) \\ &= (A, \tau detA) \\ &= (rx, \tau r^2) \end{aligned}$$

esto es, $F(x,t) = (rx, \tau r^2)$, llamada ***la dilatación de Heisenberg****.*

Ejemplo 2.19. *Escoja $A = I$ y $b \in \mathbb{R}^2$ cualquiera. Entonces para $f(x) = Ax + b = x + b$, el levantamiento correspondiente, para $\tau \in \mathbb{R}$ cualquiera está dado por:*

$$\begin{aligned} F(x,t) &= (Ax + b, -2\langle Jb, Ax\rangle + tdetA + \tau) \\ &= (x + b, -2\langle Jb, x\rangle + t + \tau) \\ &= (x + b, t + \tau + 2\langle b, Jx\rangle). \end{aligned}$$

Por la definición de la ley $*$ del grupo de Heisenberg resulta que:

$$F(x,t) = (b + x, t + \tau + 2\langle b, Jx\rangle) = (b,\tau) * (x,t),$$

esto es,

$$F(x,t) = (b,\tau) * (x,t)$$

que resulta ser ***la traslación a izquierda de Heisenberg****.*

Proposición 2.20. *Sean* $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *funciones de Lipschitz con*

$$detDf_i \equiv \lambda_i$$

casi en todas partes, $i = 1, 2$*. Para cada* $i = 1, 2$*, sea* F_i *un levantamiento lipschitziano de* f_i*. Entonces* $F_1 \circ F_2$ *es un levantamiento lipschitziano de* $f_1 \circ f_2$*.*

Demostración. Sea $\pi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función proyección, entonces

$$\begin{aligned}
\pi \circ (F_1 \circ F_2) &= \pi(F_1(F_2)) \\
&= (\pi \circ F_1) \circ F_2 \\
&= (f_1 \circ \pi) \circ F_2 \\
&= (f_1 \circ (\pi \circ F_2)) \\
&= f_1 \circ (f_2 \circ \pi) \\
&= (f_1 \circ f_2) \circ \pi.
\end{aligned}$$

Concluyendo que

$$\pi \circ (F_1 \circ F_2) = (f_1 \circ f_2) \circ \pi,$$

en consecuencia, $F_1 \circ F_2$ es un levantamiento de $f_1 \circ f_2$. Ahora veamos que $F_1 \circ F_2$ es de Lipschitz. En efecto, F_1 y F_2 son de Lipschitz, así que:

$$d_{\mathbb{H}}\big(F_1(x,t), F_1(y,s)\big) \leq r_1 d_{\mathbb{H}}\big((x,t),(y,s)\big)$$

y

$$d_{\mathbb{H}}\big(F_2(x,t), F_2(y,s)\big) \leq r_2 d_{\mathbb{H}}\big((x,t),(y,s)\big)$$

para algún $r_1, r_2 > 0$ y todo $(x,t),(y,s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Por tanto

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{H}}\big((F_1 \circ F_2)(x,t), (F_1 \circ F_2)(y,s)\big) &= d_{\mathbb{H}}\big(F_1(F_2(x,t)), F_1(F_2(y,s))\big) \\
&\leq r_1 d_{\mathbb{H}}\big(F_2(x,t), F_2(y,s)\big) \\
&\leq r_1 r_2 d_{\mathbb{H}}\big((x,t),(y,s)\big),
\end{aligned}$$

entonces para $r_1 r_2 = r_3 > 0$, se encuentra que

$$d_{\mathbb{H}}\big((F_1 \circ F_2)(x,t), (F_1 \circ F_2)(y,s)\big) \leq r_3 d_{\mathbb{H}}\big((x,t),(y,s)\big)$$

para algún $r_3 > 0$ y todo $(x,t),(y,s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.
Luego, $F_1 \circ F_2$ resulta ser un levantamiento de Lipschitz de $f_1 \circ f_2$. ∎

Teorema 2.21 (Existencia de SIF horizontales). *Sea* $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_M\}$ *un SIF sobre* $\mathbb{R}^2$*, donde cada* f_i *es* r_i*-lipschitziana para algún* $r_i < 1/c$ *y satisface* $detDf_i \equiv \lambda_i$*.*
Para cada i *sea* F_i *un levantamiento de* f_i *en* $\mathbb{H}$*.*
Entonces $\mathcal{F}_{\mathbb{H}} = \{F_1, F_2, \ldots, F_M\}$ *es un sistema iterado de funciones sobre* $\mathbb{H}$*. Se denota por* K *y* $K_{\mathbb{H}}$ *los conjuntos invariantes de* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ *respectivamente, de tal manera que:*

$$\pi(K_{\mathbb{H}}) = K \tag{2.21.1}$$

Demostración. Por el teorema (2.16) se tiene que los F_i son funciones cr_i-lipschitzianas para cada i, así las cosas, para $Lip(F_i) = L_i$ se tiene que $L_i \leq cr_i$ para algún $r_i < 1/c$, luego $L_i \leq cr_i < c(\frac{1}{c}) = 1$, esto es, $L_i < 1$ para cada i.
De manera que $Lip(F_i) < 1$ para cada i, obteniéndose así que cada F_i es una contracción de $\mathbb{H}$, entonces $\mathcal{F}_{\mathbb{H}} = \{F_1, F_2, \ldots, F_M\}$ es un SIF sobre $\mathbb{H}$.
Sea K y $K_{\mathbb{H}}$ los conjuntos invariantes para $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ respectivamente, como la función proyección π es continua, y $K_{\mathbb{H}}$ es un conjunto compacto, entonces $\pi(K_{\mathbb{H}})$ es un conjunto compacto no vació de $\mathbb{R}^2$, además

$$\begin{aligned}
\pi(K_{\mathbb{H}}) &= \pi\Big(\bigcup_{i=1}^{M} F_i(K_{\mathbb{H}})\Big) \\
&= \bigcup_{i=1}^{M} (\pi \circ F_i)(K_{\mathbb{H}}) \\
&= \bigcup_{i=1}^{M} (f_i \circ \pi)(K_{\mathbb{H}}) \\
&= \bigcup_{i=1}^{M} f_i(\pi(K_{\mathbb{H}})),
\end{aligned}$$

así,

$$\pi(K_{\mathbb{H}}) = \bigcup_{i=1}^{M} f_i(\pi(K_{\mathbb{H}})),$$

de donde resulta que $\pi(K_{\mathbb{H}})$ es un conjunto invariante para el SIF dado por $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_M\}$, pero el conjunto invariante para este SIF es único, por tanto $\pi(K_{\mathbb{H}}) = K$. ∎

Definición 2.22. *Al conjunto invariante $K_{\mathbb{H}}$, se le llama un levantamiento horizontal de K.*

Observación 2.23.

1. *Cuando las funciones f_i $\mathcal{F}$ resultan ser contracciones afines del plano, la condición $r_i < 1/c$ se puede debilitar a $r_i < 1$, ya que en este caso las funciones $F_i \in \mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ tiene constante de Lipschitz igual a las funciones f_i (ver nota 2.17), y así para $Lip(F_i) = L_i$, se tiene que $L_i \leq r_i < 1$,concluyendo que $Lip(F_i) < 1$.*

2. *Dado que los levantamientos horizontales en $\mathbb{H}$ de funciones lipschitzianas no son únicos, se sigue que los levantamientos horizontales de conjuntos invariantes no son únicos. En realidad, dado un SIF $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_M\}$ sobre $\mathbb{R}^2$ con conjunto invariante K, el espacio asociado a todos los SIF $\mathcal{F}_{\mathbb{H}} = \{F_1, F_2, \ldots, F_M\}$ que surgen como levantamientos (y por tanto todo levantamiento horizontal $K_{\mathbb{H}}$ de K)está parametrizado de manera natural por un espacio Euclidiano M-dimensional, a saber, las t-coordenadas de los puntos fijos de las funciones que surgen como levantamientos.*

Definición 2.24. *El levantamiento horizontal principal de un SIF $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{R}^2$ se define como el SIF $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ sobre $\mathbb{H}$ para el que todos los puntos fijos de las funciones que surgen como levantamientos tienen t-coordenada cero.*

3. Dimensión.

El matemático alemán Felix Hausdorff, a principios del siglo XX, hace un análisis de dimensión, considerando en primera instancia que los objetos a los cuales se les va a calcular su tamaño se subdividan en copias exactas de sí mismos, para construir una dimensión de auto-semejanza D de un objeto, como el número que satisface la ecuación $Nr^D = 1$, pero como no todos los objetos mantienen esta propiedad de estar subdivididos en copias exactas de sí mismos, Hausdorff más adelante define lo que hoy se conoce como la dimensión Hausdorff, y con ella resuelve el problema de estimar el tamaño de los objetos fractales.

Definición 3.1. *Sea r un factor de escala cualquiera en el que se ha subdividido un objeto A en N copias de sí mismo, entonces la dimensión de auto-semejanza D, es el número que satisface:*

$$Nr^D = 1.$$

Definición 3.2. *Sea $O(n)$ el grupo ortogonal de matrices de orden $n \times n$. El grupo ortogonal especial esta dado por:*

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid detA = 1\}$$

Definición 3.3. *Sea $SO(n)$ el grupo ortogonal especial de matrices de orden $n \times n$. El grupo conforme esta dado por:*

$$CO_+(n) = \{A \in \mathcal{M}^{n\times n} : A = \rho R, \ donde \ \rho \in \mathbb{R}_+ \ y \ R \in SO(n)\}$$

Definición 3.4. *Sea $\mathcal{A}$ una colección finita de elementos en el grupo conforme $CO_+(n)$, la dimensión de semejanza de $\mathcal{A}$, es el único valor s que satisface:*

$$\sum_{A\in\mathcal{A}} \|A\|^s = 1,$$

donde $\|\cdot\|$ denota el operador norma.

Definición 3.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. Para $\alpha \geq 0$ se denota $\mathcal{H}_d^\alpha$ como la medida α-dimensional Hausdorff sobre X, definida por:*

$$\mathcal{H}_d^\alpha(A) := \lim_{\delta\to 0} \inf \sum_n diam(A_n)^\alpha,$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los cubrimientos contables de A por subconjuntos $A_1, A_2, \ldots$ que satisfacen $diamA_n < \delta$.

Definición 3.6. *La dimension Hausdorff de $A \subset X$ es*

$$\begin{aligned} dim_d(A) &:= \inf\{\alpha : \mathcal{H}_d^\alpha = 0\} \\ &:= \sup\{\alpha : \mathcal{H}_d^\alpha = \infty\}. \end{aligned}$$

Se escribirá $\mathcal{H}_E^\alpha$ y dim_E, respectivamente, para la medida y dimension Hausdorff en los espacios $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$; y $\mathcal{H}_{\mathbb{H}}^\alpha$ y $dim_{\mathbb{H}}$ para los elementos correspondientes de $\mathbb{H}$.

Teorema 3.7. *Dada $N : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una norma cualquiera, entonces existen*

$$A, B \in \mathbb{R}^+ \quad \textit{tal que} \quad A\|x\| \leq N(x) \leq B\|x\| \tag{3.7.1}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma usual en $\mathbb{R}^3$

Demostración. Consideremos $N(x) = \|x\|_M = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$, es claro que

$$(\text{máx}\,|x_i|)^2 \leq \sum_{k=1}^{3} x_k^2 \leq 3(\text{máx}\,|x_i|)^2 \quad \text{con} \quad i = 1, 2, 3.$$

así que

$$\text{máx}\,|x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{3}\,\text{máx}\,|x_i|$$

es decir, $\|x\|_M \leq \|x\| \leq \sqrt{3}\,\|x\|_M$ de donde

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\|x\| \leq \|x\|_M \leq \|x\|.$$

Por otro lado, dada $N : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, una norma cualquiera, esta es continua.
En efecto

$$N(x) = N\Big(\sum_{k=1}^{3} x_k e_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{3} |x_k| N(e_k)$$

donde $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ es la base usual de $\mathbb{R}^3$.
Si $\text{máx}\{N(e_1), N(e_2), N(e_3)\} = M$, entonces

$$N(x) \leq M \sum_{k=1}^{3} |x_k| \leq 3M\|x\|_M \leq 3M\|x\|.$$

Por la desigualdad triangular $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq 3M\|x-y\|$, luego para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\epsilon}{3M}$ tal que $\|x-y\| < \delta$ implica

$$|N(x) - N(y)| \leq 3M\|x-y\| < 3M\delta = \epsilon.$$

Lo que permite concluir que $N : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, por tanto alcanza un máximo B y un mí nimo A en el conjunto cerrado y acotado

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}.$$

Para $x \in \mathbb{R}^3$, si $x = 0$ se tiene (3.7.1).
Si $\|x\| = \alpha \neq 0$, entonces

$$N(x) = \alpha N(\alpha^{-1}x), \text{ pero como } \quad \|\alpha^{-1}x\| = 1, \ \alpha^{-1}x \in S^3$$

luego se tiene que

$$A \leq N(\alpha^{-1}x) \leq B \quad \text{y así} \quad A \leq \alpha^{-1}N(x) \leq B \quad \text{ó} \quad A\alpha \leq N(x) \leq B\alpha.$$

Por tanto, (3.7.1) se satisface. ∎

El lema a continuación es una herramienta para la demostración de la proposición 3.10 que da propiedades de continuidad absoluta entre las medidas Hausdorff con respecto a las distancias d_E y $d_{\mathbb{H}}$.

Lema 3.8. *Sea A un subconjunto acotado de $(\mathbb{R}^3, d_E)$ y sea $b \geq 1$ una cota para A con respecto a d_E. Entonces existe una constante positiva $c = c(b)$ tal que para $p, p' \in A$ se tiene:*

$$\frac{1}{c} d_E(p, p') \leq d_{\mathbb{H}}(p, p') \leq c(d_E(p, p'))^{1/2}.$$

Demostración. Tomemos $b = k$ y definamos el conjunto

$$\tilde{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = k\}$$

si $\|x\| = \alpha$, entonces por hipotesis $\|x\| = \alpha < k$ lo que implica que

$$\frac{1}{k}\|x\| = \frac{\alpha}{k} = \beta, \text{ esto es, } \|x\| = \beta k.$$

Es claro que $\frac{1}{\alpha}\|x\| = 1$, entonces $\frac{k}{\alpha}\|x\| = k$ y así $\frac{k}{\alpha}x \in \tilde{S}^3$. Luego, usando el teorema anterior con $\tilde{A}$ el mínimo de $N(x)$ en $\tilde{S}^3$ y $\tilde{B}$ el máximo de $N(x)$ en $\tilde{S}^3$ se tiene:

$$\tilde{A} \leq N\left(\frac{k}{\alpha}x\right) \leq \tilde{B} \quad \text{o} \quad k^{-1}\alpha\tilde{A} \leq N(x) \leq k^{-1}\alpha\tilde{B}$$

esto es, $k^{-1}\tilde{A}\|x\| \leq N(x) \leq k^{-1}\tilde{B}\|x\|$ lo que implica que:

$$\frac{\tilde{A}}{b}\|x\| \leq \|x\|_{\mathbb{H}}$$

Concluyendo para $c = \frac{b}{\tilde{A}}$ que

$$\frac{1}{c}\|x\| \leq \|x\|_{\mathbb{H}},$$

Por tanto se satisface

$$\frac{1}{c} d_E(p, p') \leq d_{\mathbb{H}}(p, p'), \tag{3.8.1}$$

par todo $p, p' \in A$.

Por otro lado, por hipotesis se pude asegurar que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq b^2$$

así que:

$$\begin{aligned}
(x_1^2 + x_2^2) &\leq b^2 - x_3^2 \\
(x_1^2 + x_2^2)^2 &\leq (b^2 - x_3^2)^2 \\
(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_3^2 &\leq (b^2 - x_3^2)^2 + x_3^2 \\
&\leq b^4 + x_3^2 \\
&\leq b^4 x_3^2 + b^4 x_2^2 + b^4 x_1^2 = b^4(x_3^2 + x_2^2 + x_1^2)
\end{aligned}$$

de manera que

$$((x_1^2 + x_2^2)^2 + x_3^2)^{1/4} \leq b(x_3^2 + x_2^2 + x_1^2)^{1/4}$$

es decir,

$$\|x\|_{\mathbb{H}} \leq b\|x\|^{1/2}.$$

Satisfaciendose

$$d_{\mathbb{H}}(p, p') \leq c(d_E(p, p'))^{1/2}. \tag{3.8.2}$$

con $c = c(b) = b$ y para todo $p, p' \in A$
Así las cosas, de (3.8.1) y (3.8.2) se concluye el lema. ■

Proposición 3.9. *1. Sea $(X_i, d_i)(i = 1, 2)$ dos espacios métricos y sea*

$$f : (X_1, d_1) \longrightarrow (X_2, d_2)$$

una función r-lipschitziana continua, esto es,

$$d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq d_1(x, y) \ \forall x, y \in X_1.$$

Entonces $\mathcal{H}^{\alpha}_{d_2}(f(A)) \leq L^{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}_{d_1}(A)$.

2. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Denote por d_Y la métrica sobre Y inducida por d. Entonces

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{d}(A) = \mathcal{H}^{\alpha}_{d_Y}(A) \text{ para todo } A \subseteq Y.$$

3. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $d_t(x, y) := (d(x, y))^t$ para $x, y \in X$ y $t \in (0, 1)$. Entonces d_t es una distancia sobre X y

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{d}(A) = \mathcal{H}^{\alpha/t}_{d_t}(A) \text{ para todo } A \subseteq X,\ t \in (0, 1).$$

Para demostraciones al respecto ver [3] y [12].

Proposición 3.10. *Las medidas Hausdorff satisfacen las siguientes propiedades de continuidad absoluta:*

1. $\mathcal{H}^{\alpha}_{\mathbb{H}} \ll \mathcal{H}^{\alpha/2}_{E}$

2. $\mathcal{H}^{\alpha}_{E} \ll \mathcal{H}^{\alpha}_{\mathbb{H}}$

Demostración. 1. Suponga que $\mathcal{H}^{\alpha/2}_{E}(A) = 0$ y denote por

$$\sqrt{d}_E : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty)$$

la distancia $\sqrt{d}_E(p, p') := (d_E(p, p'))^{1/2}$ si $p, p' \in \mathbb{R}^3$. Entonces por la proposición anterior (3) con $t = 1/2$ también se tiene que

$$0 = \mathcal{H}^{\alpha/2}_{E}(A) = \mathcal{H}^{\alpha}_{\sqrt{d}_E}(A). \tag{3.10.1}$$

Sea $A_n := A \cap B_E(0,n)$. Aplicando el lema 3.8 con $A = A_n$ existe una constante c_n que depende solo de n, tal que para todo $p, p' \in A_n$ se tiene

$$\frac{1}{c_n} d_E(p,p') \leq d_{\mathbb{H}}(p,p') \leq c_n \sqrt{d_E(p,p')}. \tag{3.10.2}$$

Sea $d_{\mathbb{H}}^{(n)}$ y $\sqrt{d_E^{(n)}}$ las restricciones de las distancias $d_{\mathbb{H}}$ y $\sqrt{d_E}$ a A_n. Por la desigualdad de la derecha en (3.10.2) y la proposición anterior (1) con $X_1 = X_2 = A_n, f = id, d_1 = \sqrt{d_E^{(n)}}, d_2 = d_{\mathbb{H}}^{(n)}$ y $L = c_n$, se tiene que

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{d_{\mathbb{H}}^{(n)}}(A_n) \leq c_n^{\alpha} \mathcal{H}^{\alpha}_{\sqrt{d_E^{(n)}}}(A_n).$$

Por otro lado, de la proposición anterior (2)

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\mathbb{H}}(A_n) = \mathcal{H}^{\alpha}_{d_{\mathbb{H}}^{(n)}}(A_n)$$

y

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\sqrt{d_E^{(n)}}}(A_n) = \mathcal{H}^{\alpha}_{\sqrt{d_E}}(A_n).$$

Por tanto

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\mathbb{H}}(A_n) = \mathcal{H}^{\alpha}_{d_{\mathbb{H}}^{(n)}}(A_n) \leq c_n^{\alpha} \mathcal{H}^{\alpha}_{\sqrt{d_E^{(n)}}}(A_n) = \mathcal{H}^{\alpha}_{\sqrt{d_E}}(A_n)$$

así, por (3.10.1) $\mathcal{H}^{\alpha}_{\sqrt{d_E}}(A_n) = 0$, con lo que $\mathcal{H}^{\alpha}_{\mathbb{H}}(A_n) \leq 0$, entonces tomando limite cuando $n \to \infty$ se tiene que $\mathcal{H}^{\alpha}_{\mathbb{H}}(A_n) = 0$.

2. Suponga que $\mathcal{H}^{\alpha}_{\mathbb{H}}(A_n) = 0$ de la desigualdad de la parte izquierda de (3.10.2) con $A_n = A \cap B_E(0,n)$ se tiene que

$$\frac{1}{c_n} d_E(p,p') \leq d_{\mathbb{H}}(p,p')$$

entonces

$$d_E(p,p') \leq c_n d_{\mathbb{H}}(p,p'),$$

aplicando la proposición anterior (1) con $L = c_n, d_1 = d_{\mathbb{H}}, d_2 = d_E, f = id$ y $A_n = X_1 = X_2$ se obtiene que

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{E}(A_n) \leq c_n^{\alpha} \mathcal{H}^{\alpha}_{d_{\mathbb{H}}}(A_n)$$

por tanto $\mathcal{H}^{\alpha}_{E}(A_n) \leq 0$, tomando limite cuando $n \to \infty$ se concluye que $\mathcal{H}^{\alpha}_{E}(A_n) = 0$

■

Dada la relación anterior de continuidad absoluta:

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{E} \ll \mathcal{H}^{\alpha}_{\mathbb{H}}$$

para la medida Hausdorff α-dimensional, para cualquier $\alpha \geq 0$, se puede concluir que

$$dim_E A \leq dim_{\mathbb{H}} A$$

para cualquier subconjunto A de $\mathbb{H}$. Como se mencionó en la primera parte, un conjunto es auto-semejante, de manera no formal, si se descompone en partes que son semejantes al conjunto inicial. A continuación se da la definición de fractal auto-semejante en un sentido más estricto.

Definición 3.11. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama fractal auto-semejante si es el atractor de una colección $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ de semejanzas y sus partes semejantes no se traslapan una a una, esto es:*

1. $A = S(A) = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(A)$
2. *Para cierto s, es $\mathcal{H}^s(A) > 0$ y $\mathcal{H}^s(s_i(A) \cap s_j(A)) = \emptyset$ si $i \neq j$*

La primera condición de la anterior definición es aquella que se entiende como que el objeto es la union de N copias escalizadas de sí mismos, y la segunda condición es un detalle más técnico que se entiende como que la medida de las intersecciones $(s_i(A) \cap s_j(A))$, si las hay, sean despreciadas con respecto a la medida del conjunto A. Esta ultima condición se verifica si la intersección de cualquiera $s_i(A)$ son vacías, luego (2) puede ser sustituida por la condición del conjunto abierto, definida como sigue.

Definición 3.12. *Un SIF $\mathcal{F}$ sobre un espacio métrico completo X satisface la condición del conjunto abierto, si existe un subconjunto abierto y acotado $O \subset X$ tal que*

1. $f(O) \subset O$ *para todo* $f \in \mathcal{F}$ *y*
2. $f(O) \cap g(O) = \emptyset$ *para todo* $f, g \in \mathcal{F}, f \neq g$.

La importancia de esta definición para el cálculo de las dimensiones Hausdorff de conjuntos auto-semejantes deriva del siguiente resultado que fue probado por Moran [11] en 1946 y redescubierto por Hutchinson [2] en 1981.

Proposición 3.13. *Sea $\mathcal{F}$ un SIF auto-semejante en $\mathbb{R}^n$ que satisface la condición del conjunto abierto. Sea K el conjunto invariante para $\mathcal{F}$. Sea $\mathcal{A}$ la colección de matrices conformes que surgen como partes lineales de los elementos de $\mathcal{F}$ (contada la multiplicidad).*
Entonces la dimensión Hausdorff de K es igual a la dimensión de semejanza de $\mathcal{A}$. Además,

$$0 < \mathcal{H}_E^s(K) < \infty.$$

Ejemplo 3.14. *El SIF $\mathcal{F} = \{f_0, f_1\}$ del conjunto de Cantor satisface la condición del conjunto abierto con $O = (0,1)$ en la definición 3.12, además, el conjunto $\mathcal{A}$ de matrices conforme está dada por*

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}, \ \textit{con } A_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \end{pmatrix} \ \textit{y } A_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \end{pmatrix}.$$

Entonces, por la proposición inmediatamente anterior la dimensión Hausdorff de $\mathcal{C}$, es el único s tal que:

$$\|A_1\|^s + \|A_2\|^s = 1, \ \textit{esto es } (1/3)^s + (1/3)^s = 1$$

de manera que

$$s = \frac{\ln(1/2)}{\ln(1/3)} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Por tanto

$$dim\mathcal{C} \approx 0,6309.$$

La siguiente proposición extiende los resultados de Moran-Hutchinson a escenarios del grupo de Heisenberg.

Proposición 3.15. *Sea $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ un SIF auto-semejante en $\mathbb{H}$ que satisface la condición del conjunto abierto. Asuma que $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ es un levantamiento de $\mathcal{F}$, y sea $\mathcal{A}$ la colección de matrices conformes que surgen cono partes lineales de los elementos de $\mathcal{F}$ (contando la multiplicidad). Entonces la dimensión Heisenberg de $K_{\mathbb{H}}$ es igual a la dimensión de semejanza de $\mathcal{A}$.*

Para una prueba de este teorema puede verse [6], en el cual se utilizan algunos resultados de [13].

A continuación se enuncia una proposición que garantiza que la condición del conjunto abierto que satisface un SIF $\mathcal{F}$, la adquieren también sus levantamientos.

Proposición 3.16. *Sea $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_N\}$ un SIF sobre $\mathbb{R}^2$ y*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{H}} = \{F_1, F_2, \ldots, F_N\}$$

un levantamiento horizontal de $\mathcal{F}$ a $\mathbb{H}$. Si $\mathcal{F}$ satisface la condición del conjunto abierto, entonces $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ satisface la condición del conjunto abierto.

Demostración. Dado (2.15.5), cada levantamiento $F_j \in \mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ puede ser escrito en la forma

$$F_j(x,t) = (f_j(x), \lambda_j t + h_j(x)),$$

donde h_j satisface la ecuación $\nabla h_j = 2(\lambda_j J - Df_j^* \cdot Jf_j)$. Sea O un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$ que verifica la condición del conjunto abierto para $\mathcal{F}$. Entonces $K \subset \overline{O}$, para K el conjunto invariante del SIF $\mathcal{F}$.
Escoja $R > 0$ tan grande que $O \subset B(0,R)$, $\text{máx}\{|f_1(O)|, \ldots, |f_N|\} \leq R$ y $\text{máx}\{|h_1(O)|, \ldots, |h_N(O)|\} \leq R^2$, y sea

$$L := \frac{5R^2}{1 - r_{\text{máx}}^2}.$$

se mostrará que el conjunto abierto $U := O \times (-L, L)$ verifica la condición del conjunto abierto para $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$. En efecto, los conjuntos $F_j(U)$ son disjuntos dos a dos dado que los correspondientes $f_j(O)$ lo son. Para completar la prueba es suficiente mostrar que $F_j(U) \subset U$ para cada j, para esto basta mostrar que

$$|\lambda_j t + h_j(x)| < L$$

para todo $(x,t) \in U$. Aplicando el teorema 2.16, específicamente (2.16.7), se tiene que:

$$|h_j(x) - h_j(0) - 2\langle f_j(0), Jf_j(x)\rangle| \leq \sqrt{2 + \sqrt{3}}\, r_j^2 |x|^2$$

y así,

$$|h_j(x)| < |h_j(0)| + 2|f_j(0)| \cdot |f_j(x)| + 2r_j^2 |x|^2 \leq 5R^2.$$

Dado que $|\lambda_j| \leq r_j^2 \leq r_{\text{máx}}^2$,

$$|\lambda_j t + h_j(x)| < r_{\text{máx}}^2 L + 5R^2 = L.$$

■

Así las cosas, se establece el siguiente corolario de la proposición 3.15.

Corolario 3.17. *Sea $\mathcal{F}$ un SIF auto-semejante en el plano que satisface la condición del conjunto abierto y sea $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ un levantamiento de $\mathcal{F}$ en el grupo de Heisenberg. Entonces*

$$dim_E K = dim_E K_{\mathbb{H}} = dim_{\mathbb{H}} K_{\mathbb{H}} = s,$$

donde s denota la dimensión de semejanza para la familia asociada de matrices conformes. Además,

$$0 < \mathcal{H}_E^s(K) \leq \mathcal{H}_E^s(K_{\mathbb{H}}) \quad y$$
$$\mathcal{H}_{\mathbb{H}}^s(K_{\mathbb{H}}) < \infty.$$

4. Conjuntos invariantes.

4.1. El cuadrado de Heisenberg

Existe una pregunta de cómo entender la relación entre las medidas Hausdorff $\mathcal{H}_E^\alpha$ y $\mathcal{H}_{\mathbb{H}}^\beta$ sobre $\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ asociadas con las métricas Heisenberg y Euclidianas.
Una versión de esta cuestión fue probada por Gromov [14], problema enunciado así:
Problema de Gromov: Para $\alpha \in [0,3]$ fijo, ¿cuáles son los posibles valores de $\beta = dim_{\mathbb{H}} S$ cuando $S \subset \mathbb{H}$ es cualquiera?, con $dim_E S = \alpha$.
Este problema es fundamental para comprender propiedades de las medidas Hausdorff con respecto a la métrica de Heisenberg. Este cuestiona o pregunta que conjuntos son "más cercanamente euclidianos "(β es más pequeño para α fijo) y cuales son "más cercanamente menos no-euclidianos "(β es más grande para α fijo).
Recientemente una respuesta casi completa para el problema de Gromov fue obtenida por Balogh–Rickly–Serra-Cassano [5]. A continuación se formula una versión levemente diferente del enunciado original en [5].

Teorema 4.1. *(Balogh–Rickly–Serra-Cassano [5], teoremas 1.1 y 1.2).*
Sea $S \subset \mathbb{H}$ con $dim_E S = \alpha \in [0,3]$ y $dim_{\mathbb{H}} S = \beta \in [0,4]$.
Entonces

$$\max\{\alpha, 2\alpha - 2\} := \beta_-(\alpha) \leq \beta \leq \beta_+(\alpha) := \min\{2\alpha, \alpha + 1\}. \tag{4.1.1}$$

Además,

1. *Para cada $\alpha \in [0,3]$ existe un conjunto $S^\alpha \subset \mathbb{H}$ con $\mathcal{H}_E^\alpha(S^\alpha) < \infty$ y $\mathcal{H}_{\mathbb{H}}^{\beta_+(\alpha)}(S^\alpha) > 0$,*
2. *Para cada $\alpha \in [0,2) \cup \{3\}$ existe un conjunto $S_\alpha \subset \mathbb{H}$ con $\mathcal{H}_E^\alpha(S_\alpha) > 0$ y $\mathcal{H}_{\mathbb{H}}^{\beta_-(\alpha)}(S_\alpha) = \mathcal{H}_{\mathbb{H}}^\alpha(S_\alpha) < \infty$ y*
3. *Para cada $\alpha \in [2,3)$ y cada $\delta \in (0,1)$ existe un conjunto $S_{\alpha,\delta} \subset \mathbb{H}$ con $\mathcal{H}_E^{\alpha-\delta}(S_{\alpha,\delta}) > 0$ y $\mathcal{H}_{\mathbb{H}}^{\beta_-(\alpha)}(S_{\alpha,\delta}) = \mathcal{H}_{\mathbb{H}}^{2\alpha-2}(S_{\alpha,\delta}) < \infty$.*

Las técnicas usadas en la prueba del teorema 1.1 de [5] están basadas sobre unos cubrimientos de bolas de Heisenberg por bolas pequeñas Euclidianas y viceversa. Esta herramienta de cubrimientos mutuos había sido ya propuesta por Gromov en [12]. La prueba del teorema 1.2 de [5] cuenta con algunos argumentos más delicados involucrando recientes resultados del tamaño de conjuntos de tipo-Cantor y característicos de superficies regulares en los espacios métricos $(\mathbb{R}^3, d_{\mathbb{H}})$y $(\mathbb{R}^3, d_E)$.

Sin embargo, estas técnicas no son suficientes para obtener ejemplos que muestren la presición en la cota inferior en (4.1.1) en el caso $2 \leq \alpha < 3$. En particular en [5] no hay ejemplos de conjuntos S con la propiedad de que

$$dim_E S = dim_{\mathbb{H}} S = 2.$$

Como una consecuencia de muchos de los resultados en el artículo *Hausdorff dimensions of self-similar and self-affine fractals in the Heisenberg group*, es que tales ejemplos pueden ser hallados y así completar el problema de Gromov, de manera más precisa

Teorema 4.2. *Para cada $\alpha \in [0,3]$ existen subconjuntos $S_\alpha \subset \mathbb{H}$ con*

$$\mathcal{H}_E^{\alpha}(S_\alpha) > 0 \quad y \quad \mathcal{H}_{\mathbb{H}}^{\beta_-(\alpha)}(S_\alpha) < \infty, \ donde$$

$\beta_-(\alpha) = \text{máx}\{\alpha, 2\alpha - 2\}$.

Observación 4.3. *los ejemplos relevantes para los casos $0 \leq \alpha < 2$ y $\alpha = 3$ del teorema 4.2 son dados previamente por Balogh–Rickly–Serra-Cassano [5]; ver teorema 4.1.*
En el presente capítulo la idea principal es analizar la obtención del ejemplo para $\alpha = 2$ en el que se cumple $dim_E S = dim_{\mathbb{H}} S = 2$ y el caso faltante para $2 < \alpha < 3$ será planteado al final del capítulo.

El caso de especial interés es aquel cuando $\alpha = \beta_-(\alpha) = 2$.
El ejemplo que figura en este caso es un conjunto auto-semejante $Q_{\mathbb{H}} \subset \mathbb{H}$ que se conoce como el cuadrado de Heisenberg, este conjunto se obtiene como un conjunto invariante para cualquier levantamiento horizontal de sistema iterado de funciones

$$\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\} \tag{4.3.1}$$

donde

$$f_0(x) = \tfrac{1}{2}(x), f_1(x) = \tfrac{1}{2}(x + e_1), f_2(x) = \tfrac{1}{2}(x + e_2)$$

$$f_3(x) = \tfrac{1}{2}(x + e_1 + e_2),$$

con e_1, e_2 los vectores base de $\mathbb{R}^2$.
En efecto, cada $f_i \in \mathcal{F}$ es r_i-lipschitziana con $r_i = 1/2$ para todo $0 \leq i \leq 3$. Para $c = (2+\sqrt{3})^{1/4} \approx 1{,}3899\ldots$ se tiene que $r_i < 1/c$, además, por la nota 2.11 aplicada a $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se tiene que:

$$|detDf_i(x)| \leq (1/4) \tag{4.3.2}$$

casi en todas partes, pero

$$Df_i(x) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

entonces $\big(Df_i\big)$ es diagonal, de manera que la igualdad en (4.3.2) se cumple obteniendo:

$$detDf_i \equiv 1/4$$

casi en todas partes.
Entonces por el teorema 2.16 existen los levantamientos cr_i-lipschitzianos $F_i : (\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}}) \longrightarrow (\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ de cada f_i, levantamientos dados por

$$F_i(x,t) = (f_i(x), detA_i \cdot t - 2\langle A_i x, Jb_i\rangle + \tau)$$

para cualquier $\tau \in \mathbb{R}$, y $f_i(x) = A_i x + b_i$, donde

$$\begin{aligned}
f_0(x) = A_0x + b_0 &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x. \\
f_1(x) = A_1x + b_1 &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x + e_1). \\
f_2(x) = A_2x + b_2 &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x + e_2). \\
f_3(x) = A_3x + b_3 &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x + e_1 + e_2).
\end{aligned}$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned}
F_0(x_1, x_2, t) &= (\frac{1}{2}x, \frac{1}{4}t + \tau_0) = (\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{4}t + \tau_0) \\
F_1(x_1, x_2, t) &= (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e_1, \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}x_2 + \tau_1) = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}x_2 + \tau_1) \\
F_2(x_1, x_2, t) &= (\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}, \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}x_1 + \tau_2) \\
F_3(x_1, x_2, t) &= (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}, \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \tau_3)
\end{aligned}$$

donde $\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathbb{R}^4$. Entonces por el teorema 2.21

$$\mathcal{F}_{\mathbb{H}} = \{F_0, F_1, F_2, F_3\}$$

es un sistema iterado de funciones sobre $\mathbb{H}$ y

$$\pi(K_{\mathbb{H}}) = K.$$

para K y $K_{\mathbb{H}}$ los conjuntos invariantes para los SIF $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ respectivamente.
Para el SIF $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$, el conjunto invariante Kes un cuadrado unitario cerrado $Q = [0,1] \times [0,1]$ subconjunto del plano.
De hecho,

$$f_0(Q) = [0, 1/2] \times [0, 1/2] \quad f_1(Q) = [1/2, 1] \times [0, 1/2]$$
$$f_2(Q) = [0, 1/2] \times [1/2, 1] \quad f_3(Q) = [1/2, 1] \times [1/2, 1].$$

Para concluir que

$$Q = f_0(Q) \cup f_1(Q) \cup f_2(Q) \cup f_3(Q) = \bigcup_{i=0}^{3} f_i(Q)$$

Por otro lado, como existe la función proyección continua 1-lipschtziana
$\pi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\pi(Q_{\mathbb{H}}) = Q$$

entonces por la proposición 3.9 se tiene que

$$\mathcal{H}_E^{\alpha}(\pi(Q_{\mathbb{H}})) \leq (1)^{\alpha}\mathcal{H}_E(Q_{\alpha})$$

para cualquier α, por tanto

$$\mathcal{H}_E^2(Q) \leq \mathcal{H}_E^2(Q_{\mathbb{H}}),$$

pero como $\mathcal{H}_E^2(Q) = 1$, entonces

$$0 < 1 = \mathcal{H}_E^2(Q) \leq \mathcal{H}_E^2(Q_{\mathbb{H}})$$

también $\mathcal{H}_{\mathbb{H}}^2(Q_{\mathbb{H}}) < \infty$.
Además, el SIF (4.3.1) satisface la condición del conjunto abierto, concluyendo por el corolario 3.17 que

$$dim_E Q = dim_E Q_{\mathbb{H}} = dim_{\mathbb{H}} Q_{\mathbb{H}} = 2 = s.$$

Por tanto

Teorema 4.4. *Sea $\mathcal{F}$ el SIF (4.3.1) y sea $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ cualquier levantamiento horizontal de $\mathcal{F}$. Denote por $Q = [0,1] \times [0,1]$ y $Q_{\mathbb{H}}$ los conjuntos invariantes para $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$, respectivamente.*
Entonces,

$$dim_{\mathbb{H}} Q_{\mathbb{H}} = dim_E Q_{\mathbb{H}} = dim_E Q = 2.$$

Además,

$$0 < 1 = \mathcal{H}_E^2(Q) \leq \mathcal{H}_E^2(Q_{\mathbb{H}}) \quad y \quad \mathcal{H}_{\mathbb{H}}^2(Q_{\mathbb{H}}) < \infty.$$

4.2. Comparación de las dimensiones Euclidianas y Heisenberg

En esta sección se discute la aplicación del teorema 4.4 a el problema de Gromov. En particular, se prueba el teorema 4.2, cuyo enunciado recordamos a continuación.

Teorema 4.5. *Para cada $\alpha \in [0,3]$ existen subconjuntos $S_{\alpha} \subset \mathbb{H}$ con*

$$\mathcal{H}_E^{\alpha}(S_{\alpha}) > 0 \quad y \quad \mathcal{H}_{\mathbb{H}}^{\text{máx}\{\alpha, 2\alpha-2\}}(S_{\alpha}) < \infty.$$

Recordamos nuevamente que los ejemplos relevantes para los casos $0 \leq \alpha < 2$ y $\alpha = 3$ del teorema 4.5 son dados por Balogh–Rickly–Serra-Cassano [5].
La prueba que a continuación se presenta hace uso de diferentes hechos no mostrados en el transcurso del trabajo, es más, en ella se presentan referencias diferentes al articulo trabajado [6], esta prueba no es mas que una ilustracion para los interesados, por tanto no cuenta con detalles precisos.

Demostración. Por el teorema 4.4, cada levantamiento horizontal $Q_{\mathbb{H}}$ del cuadrado unitario sirve como el ejemplo deseado S_2 en el teorema 4.5 en el caso $\alpha = 2$. En donde $\mathcal{H}_{\mathbb{H}}^2(S_2) < \infty$ mientras que $\mathcal{H}_E^2(S_2) \geq \mathcal{H}_E^2(Q) = 1$.
Para tratar el caso $2 < \alpha < 3$, se construyen ciertos conjuntos tipo-producto sobre $Q_{\mathbb{H}}$. Sea

$p = \alpha - 2$ y considere un conjunto de Cantor C_p en el t-axis con $0 < \mathcal{H}^p_E(C_p) < \infty$ y $0 < \mathcal{H}^{2p}_{\mathbb{H}}(C_p) < \infty$. La construcción de tal conjunto es estándar, ver [5].
Para precisión, escoja $s < 1$ de modo que

$$2s^p = 1,$$

se vera C_p como el conjunto invariante asociado con el sistema $\mathcal{G}_{\mathbb{H}} = \{G_1, G_2\}$, donde G_1 y G_2 son las funciones $\sqrt{s}$-lipschitzianas de $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ definidas por $G_1(x,t) = (\sqrt{s}x, st)$ y $G_2(x,t) = (\sqrt{s}x, 1 + s(t-1))$.
El conjunto S_α es definido como el siguiente producto de $Q_{\mathbb{H}}$ con C_p:

$$S_\alpha := \{(x, t + t') : (x,t) \in Q_{\mathbb{H}}, (0,t') \in C_p\}.$$

The estimate $\mathcal{H}^\alpha_E(S_\alpha) = \mathcal{H}^{2+p}_E(S_\alpha) > 0$ es una consecuencia de la estructura producto de S_α, como sigue. Para $x \in Q$ defina

$$t_x = \text{máx}\{t : (x,t) \in Q_{\mathbb{H}}\}$$

y $\Phi : Q \times C_p \longrightarrow S_\alpha$,

$$\Phi(x, (0,t)) = (x, t_x + t).$$

la función Φ es bi-lipschitziana incrustada de $Q \times C_p$ en S_α. Así es suficiente mostrar que

$$\mathcal{H}^\alpha_E(Q \times C_p) = \mathcal{H}^{2+p}_E(Q \times C_p) > 0.$$

Esto se sigue de [14], dado que $\mathcal{H}^2_E(Q) = 1$ y $\mathcal{H}^p_E(C_p) > 0$.
Para mostrar the estimate $\mathcal{H}^{2\alpha-2}_{\mathbb{H}}(S_\alpha) = \mathcal{H}^{2+2p}_{\mathbb{H}}(S_\alpha) < \infty$ se usan los cubrimientos de S_α por imágenes de semejanzas de Q y C_p. Fije $\delta > 0$ y escoja

$$m > \frac{1}{4} + \frac{1}{2p} + \frac{\log 1/\delta}{\log 2}.$$

Sea $n = [2pm]$, donde $[x]$ denota el entero más grande menor o igual que x, y considere el cubrimiento de S_α con los conjuntos

$$S_{vw} := \{(x, t + t') : (x,t) \in F_w(Q_{\mathbb{H}}), (0,t') \in G_v(C_p)\},$$

done w y v recorre sobre todos los conjuntos $W_m = \{1,2,3,4\}^m$ y $V_n = \{1,2\}^n$ respectivamente.
Para estimar el $diam_{\mathbb{H}}(S_{vw})$, escoja $(x, t+t')$ y $(\tilde{x}, \tilde{t} + \tilde{t}')$ en S_{vw} con

$$diam_{\mathbb{H}}(S_{vw}) = d_{\mathbb{H}}((x, t+t'), (\tilde{x}, \tilde{t} + \tilde{t}'))$$

y se calcula

$$\begin{aligned} diam_{\mathbb{H}}(S_{vw})^4 &= |\tilde{x} - x|^4 + (\tilde{t} - t + \tilde{t}' - t' - 2\langle x, J\tilde{x}\rangle)^2 \\ &\leq 2\big(|\tilde{x} - x|^4 + (\tilde{t} - t - 2\langle x, J\tilde{x}\rangle)^2 + (\tilde{t}' - t')^2\big) \\ &\leq 2\Big((\frac{1}{2})^{4m} + \alpha^{2n}\Big) < \delta^4. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{2+2p}_{\mathbb{H},\delta}(S_\alpha) &\leq \sum_{w\in W_m}\sum_{v\in V_n} diam_{\mathbb{H}}(S_{vw})^{2+2p}\\ &\leq 2^{1/4}\cdot 4^m\cdot 2^n\cdot\Big((\frac{1}{2})^{4m}+\alpha^{2n}\Big)^{(1+p)/2}\\ &\leq C(p)2^{2m(1+p)}\Big((\frac{1}{2})^{2m(1+p)}+\alpha^{2m(1+p)p}\Big)=2C(p)<\infty\end{aligned}$$

como se deseaba. ■

Bibliografía

[1] RUBIANO, G.N. Fractales para profanos. Universidad Nal. de Colombia, sede Bogotá, 2002.

[2] HUTCHINSON, J.E. Fractals and sel-similarity. Indiana University Journal of Mathematics 30 (1981),713–747.

[3] FALCONER, K.J. The geometry of fractal sets. Cambridge University Press, 1986.

[4] BALOGH, Z.M., HOFER-ISENEGGER, R., AND TYSON, J.T. Lifts of Lipschitz maps and horizontal fractals in the Heisenberg group. Febrero 2, 2005

[5] BALOGH, Z.M., RICKLY, M., AND SERRA-CASSANO, F. Comparison of Hausdorff measures with respect to the Euclidean and Heisenberg metric. Publ. Mat. 47 (2003), 237–259.

[6] BALOGH, Z.M., AND TYSON, J.T. Hausdorff dimensions of self-similar and self-affine fractals in the Heisenberg group. Marzo 1, 2004.

[7] PENAGOS, G. I. Sistemas dinámicos asociados con fractales. Proyecto de grado, Pontificia Universidad Javeriana de Colombia, sede Bogotá 1999.

[8] GERALD, A. E. Measures, topology, and fractal geometry. Springer, 1990.

[9] PANSU, P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un. Ann. of Math. (2) 129 (1989), 1–60.

[10] FEDERER, H. Geometric measure theory. Springer, 1969.

[11] MORAN, P. A. P. Additive functions of intervals and Hausdorff measure. Proc. Cambridge Philos. Soc.42 (1946), 15–23.

[12] GROMOV, M. Carnot–Carathéodory spaces seen from within. In sub-Riemannian Geometry, vol. 144 of Progress in Mathematics. Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 79–323.

[13] KIGAMI, J. Analysis on fractals, vol. 143 of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[14] MATTILA, P. Geometry of sets and measures in Euclidean spaces, vol. 44 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.