# La geometría de Minkowski a partir del grupo de Lorentz[1]

**Jael Inés Medina Santana**
*Licenciada en Matemáticas*
*Bogotá D.C., Colombia*
jaelmedi@gmail.com

**Carlos Julio Luque Arias**
*Profesor Universidad Pedagógica Nacional*
*Bogotá D.C., Colombia*
caluque@pedagogica.edu.co

**Resumen**

Se hace una presentación de los fundamentos de la geometría de Minkowski tomando como base el grupo de transformaciones de Lorentz, siguiendo las directrices del programa de Erlangen propuesto por Felix Klein, estudiando las formas invariantes del grupo de transformaciones.

## 1. Introducción

La geometría es una rama de las matemáticas, que incluye a la Geometría Euclidiana y también a las llamadas Geometrías no Euclidianas, que se pueden estudiar a partir de propiedades invariantes de grupos particulares.

En esta presentación se elige una versión donde los elementos básicos son grupos, cuyos elementos son representados por movimientos de un espacio. Los subconjuntos del espacio son las figuras y las propiedades que permanecen invariantes bajo los movimientos son las propiedades geométricas que se estudian, como la distancia entre puntos, rectas, rectas paralelas, la colinealidad, etc.

En particular, este documento tiene como propósito hacer un estudio de geometría no euclidiana de Minkowski tomando como base el grupo de transformaciones de Lorentz, siguiendo las directrices del programa de Erlangen propuesto por Felix Klein, estudiando las formas invariantes del grupo de transformaciones, las cuales dan las transformaciones básicas del plano de Minkowski, haciendo una indagación sobre las propiedades y relaciones básicas entre los elementos de dicha geometría.

En la exposición se muestran los elementos fundamentales de la geometría de Minkowski, en particular de las propiedades geométricas que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones de Lorentz. Se definen conceptos como: distancia entre dos puntos, rectas, ángulos, rectas perpendiculares, rectas paralelas, circunferencia, triángulos. Se enuncian los teoremas de seno y coseno hiperbólicos, entre otros.

## 2. Geometría de Minkowski a partir del grupo de Lorentz

La geometría de Minkowski se define como el estudio de las propiedades de las figuras (subconjuntos de R2) en el plano x, y que son invariantes bajo el grupo de las transformaciones de

[1]Presentada en el XIX encuentro de geometría y sus aplicaciones y VII Encuentro de aritmética.

Lorentz; es decir,

$$x' = \frac{x - vy}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad y' = frac{-}vx + y\sqrt{1 - v^2} \tag{1}$$

donde $v$ es un parámetro del movimiento que representa la relación entre la velocidad del objeto en consideración y la velocidad de la luz.

Se usará a menudo la representación matricial para las transformaciones mencionadas, es decir

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \Lambda_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde $\Lambda_\theta = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\operatorname{senh}\theta \\ -\operatorname{senh}\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$ y $\tanh\theta = v$.

Como se usará la representación matricial, se dan algunas identidades de la trigonometría hiperbólica iniciando con la definición de ángulo hiperbólico:

## 2.1. Algunos aspectos de la trigonometría hiperbólica

Como las circunferencias minkowskianas son hipérbolas euclidianas, es natural definir las funciones trigonométricas en el plano de Minkowski usando la circunferencia unidad centro en $O = (0, 0)$ y radio $OA = (1, 0)$, que resulta de unir $O$ con el vértice $A(1, 0)$ de la hipérbola $S$, es decir,

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{2}$$

Si $OM$ es un radio variable de $S$

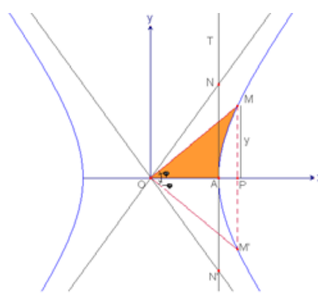


*Figura 1.*

El *ángulo* dirigido $\delta_{OA,\ OM} = \phi$, considerado como un ángulo en la geometría de Minkowski, es igual a dos veces el área señalada del sector sombreado $AOM$ de la hipérbola $S$ en 1 se le conoce como el *ángulo hiperbólico* entre $OA$ y $OM$; las coordenadas $x = OP > 0$ y $y = PM$ del punto variable $M$ se les llama el *coseno hiperbólico* y el *seno hiperbólico* de $\phi$ y se denota por el $\cosh\phi$ y $\operatorname{senh}\phi$, respectivamente. La relación $\frac{PM}{OP} = \frac{\operatorname{senh}\phi}{\cosh\phi}$ se denomina *tangente hiperbólica* de $\phi$ y se denota por $\tanh\phi$[2].

Si $\phi$ aumenta indefinidamente, entonces el $\cosh\phi$ y $\operatorname{senh}\phi$ aumentan indefinidamente y $\tanh\phi$ tiende a 1. También, si $\phi = 0$, entonces $\cosh\phi = l$, $\operatorname{senh}\phi = 0$, y $\tanh\phi = 0$.

[2]El sentido físico de $\tanh\phi$ es la relación entre la velocidad del movimiento uniforme del punto y la velocidad de la luz que representa la recta $OM$

También se tiene que por la simetría de la hipérbola:

$$\cosh(-\phi) = \cosh\phi \qquad \operatorname{senh}(-\phi) = -\operatorname{senh}\phi \qquad \tanh(-\phi) = -\tanh\phi$$

Es conocido que para todo $\phi$ y $\lambda$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\cosh^2\phi - \operatorname{senh}^2\phi &= 1\\
\operatorname{senh}(\phi \pm \lambda) &= \operatorname{senh}\phi\cosh\lambda \pm \cosh\phi\operatorname{senh}\lambda\\
\cosh(\phi \pm \lambda) &= \cosh\phi\cosh\lambda \pm \operatorname{senh}\phi\operatorname{senh}\lambda\\
\tanh(\phi \pm \lambda) &= \frac{\tanh\phi \pm \tanh\lambda}{1 \pm \tanh\phi\tanh\lambda}
\end{aligned}$$

Y en particular,

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh} 2\phi &= 2\operatorname{senh}\phi\cosh\phi\\
\cosh 2\phi &= \cosh^2\phi + \operatorname{senh}^2\phi\\
\tanh 2\phi &= \frac{2\tanh\phi}{1+\tanh^2\phi}
\end{aligned}$$

## 2.2. Invariantes del grupo de Lorentz

### 2.2.1. Distancia

Por analogía con la forma que tiene la expresión

$$d(y,x) = \begin{cases} \sqrt{(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2} & \text{si} \quad (x_1-y_1)^2 \geq (x_2-y_2)^2\\ \sqrt{(x_2-y_2)^2-(x_1-y_1)^2} & \text{si} \quad (x_2-y_2)^2 > (x_1-y_1)^2 \end{cases}$$

con el teorema de Pitágoras de la geometría euclidiana y su relación con la definición de distancia, se usará el término *distancia* para llamar a esta función en el espacio de Minkowski, aunque no es una métrica en el sentido de los espacios métricos, pues no cumple la condición de que la distancia entre dos puntos sea 0 si y sólo si los puntos son iguales, ni cumple con la desigualdad triangular.

La función

$$\begin{aligned}
d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^+ \cup 0\\
(y,x) &\mapsto d(y,x)
\end{aligned}$$

donde

$$d(y,x) = \begin{cases} \sqrt{(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2} & \text{si} \quad (x_1-y_1)^2 \geq (x_2-y_2)^2\\ \sqrt{(x_2-y_2)^2-(x_1-y_1)^2} & \text{si} \quad (x_2-y_2)^2 > (x_1-y_1)^2 \end{cases}$$

con $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, es invariante bajo las transformaciones de Lorentz.

*Demostración.* La forma bilineal simétrica:

$$\begin{aligned}
\langle\ ,\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}\\
(x,y) &\mapsto \langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

donde

$$\langle x,y\rangle = \begin{cases} x^t\eta y = x_1y_1 - x_2y_2 & \text{si} \quad x_1y_1 \geq x_2y_2 \\ x^t\eta * y = x_2y_2 - x_1y_1 & \text{si} \quad x_2y_2 > x_1y_1 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \qquad , \eta^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple la condición

i. $\langle x,x\rangle \geq 0$, pero no cumple

ii. $\langle x,x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$, pues para los puntos de la forma

$$x = (x_1, x_1),$$

se tiene que

$$\langle x,x\rangle = 0 \text{ pero } x \neq 0.$$

Con esta forma bilineal simétrica se define la función:

$$\begin{aligned} ||\ || &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ z = (x_1, x_2) &\mapsto ||z|| \end{aligned}$$

donde

$$||z|| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 - x_2^2} & \text{si} \quad x_1^2 \geq x_2^2 \\ \sqrt{x_2^2 - x_1^2} & \text{si} \quad x_2^2 > x_1^2 \end{cases}$$

Para todo $z$ en $\mathbb{R}^2$ de la forma $(x,x)$, se tiene que $||z|| = 0$ aunque $z \neq 0$. □

Con la función $||\ ||$ se puede definir la función

$$\begin{aligned} d &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+ \cup 0 \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) = ||x - y|| \end{aligned}$$

donde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Es decir,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= ||x - y|| \\ &= ||x_1 - y_1, x_2 - y_2|| \\ &= \begin{cases} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2} & \text{si} \quad (x_1 - y_1)^2 \geq (x_2 - y_2)^2 \\ \sqrt{(x_2 - y_2)^2 - (x_1 - y_1)^2} & \text{si} \quad (x_2 - y_2)^2 > (x_1 - y_1)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Como las transformaciones de Lorentz dejan invariante la forma bilineal simétrica mencionada anteriormente[3] , y con ella se definió la función $||\ ||$, ésta también queda invariante bajo las tranformaciones de Lorentz. Y con ella se definió la distancia, también ésta queda invariante bajo las transformaciones de Lorentz.

[3] La demostración de esta afirmación puede consultarse en el trabajo de grado para optar el título en Licenciada en matemáticas: Medina, J. (2007). LA GEOMETRÍA DE MINKOWSKI A PARTIR DEL GRUPO DE LORENTZ. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. Sección 2.10.

### 2.2.2. Circunferencias

Una circunferencia con centro en el punto $p = (x_0, y_0)$ y radio $r > 0$, en el plano de Minkowski está formada por los puntos $z = (x, y)$ tales que

$$d(z, p) = ||z - p||.$$

Las Transformaciones de Lorentz aplican circunferencias en circunferencias, puesto que éstas preservan la distancia $d$ entre dos puntos.

Las circunferencias de Minkowski asumen la forma de hipérbolas euclidianas cuando se expresan en términos de sus coordenadas, pues una circunferencia con centro en $(h, k)$ y radio $r > 0$, tiene como ecuación

$$(x - h)^2 - (y - k)^2 = r^2.$$

### 2.2.3. El área como propiedad invariante

Otra manera de estudiar la distancia entre dos puntos del espacio de Minkowski, un poco más sugestiva, es hacerlo en términos de áreas, cambiando el sistema de coordenadas.

Como las *rectas especiales* $y = x$ y $y = -x$ tienen un papel importante en la geometría de Minkowski, se puede hacer una rotación euclidiana en un ángulo de 45 grados, de coordenadas de $(x, y)$ a $(X, Y)$, quedando estas rectas como ejes coordenados.

Las dos clases de coordenadas están relacionadas mediante:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \tag{3}$$

o sea

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y), y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \tag{4}$$

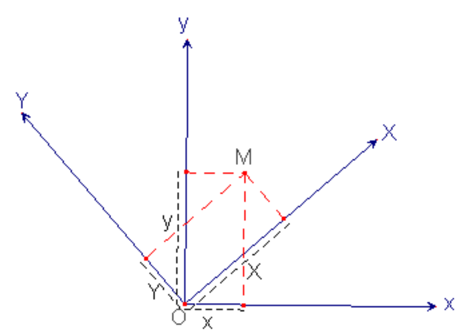


*Figura 2.*

y como

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cosh\theta - y\operatorname{senh}\theta \\
y' &= x\operatorname{senh}\theta + y\cosh\theta
\end{aligned}
$$

entonces

$$
X' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \qquad Y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}X' &= x(\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta) + y(\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta) \\
\sqrt{2}X' &= (\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta)(x + y) \\
\sqrt{2}X' &= \frac{(\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta)2X}{\sqrt{2}} \\
X' &= (\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta)X \\
X' &= \lambda X
\end{aligned}
$$

donde $\lambda = (\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta)$. Además,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}Y' &= (-x' + y') \\
\sqrt{2}Y' &= -x(\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta) + y(\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta) \\
\sqrt{2}Y' &= (\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta)(y - x) \\
Y' &= (\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta)\sqrt{2}Y \\
Y' &= (\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta)Y
\end{aligned}
$$

y como

$$
(\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta)(\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta) = \cosh^2\theta - \operatorname{senh}^2\theta = 1
$$

entonces

$$
\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta = \frac{1}{\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta}
$$

y por tanto las transformaciones de Lorentz en coordenadas $(X, Y)$ son

$$
\begin{aligned}
X' &= \lambda X \\
Y' &= \frac{1}{\lambda}Y
\end{aligned}
$$

lo que significa que el producto

$$
X'Y' = XY
$$

que es el *área del rectángulo* de lados $X$ e $Y$ es invariante bajo las transformaciones de Lorentz y por lo tanto es una propiedad geométrica.

### 2.2.4. Rectas

Se define una *recta* en el plano de Minkowski como el conjunto de puntos $z = (x, y)$ tales que $y = mx + b$.

Las transformaciones de Lorentz aplican rectas en rectas, lo que significa que la *colinealidad* también es una propiedad geométrica, pues puntos que son colineales, por las transformaciones de Lorentz se aplican en puntos colineales, como se muestra a continuación.

*Demostración.* Sea $y = mx + b$ una recta, la transformación de Lorentz

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \Lambda_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde $\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\operatorname{senh}\theta \\ -\operatorname{senh}\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$, también se escribe como

$$\begin{aligned} x' &= (\cosh\theta)x - (\operatorname{senh}\theta)y \\ y' &= -(\operatorname{senh}\theta)x + (\cosh\theta)y \end{aligned}$$

y como

$$\Lambda_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \operatorname{senh}\theta \\ \operatorname{senh}\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

pues

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & -\operatorname{senh}\theta \\ -\operatorname{senh}\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\theta & \operatorname{senh}\theta \\ \operatorname{senh}\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \operatorname{senh}\theta \\ \operatorname{senh}\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

o sea que,

$$\begin{aligned} x &= x'\cosh\theta + y'\operatorname{senh}\theta \\ y &= x'\operatorname{senh}\theta + y'\cosh\theta \end{aligned}$$

y por tanto, si se reemplaza $x$ e $y$ en la ecuación de la recta

$$y = mx + b$$

se obtiene

$$x'\operatorname{senh}\theta + y'\cosh\theta = m(x'\cosh\theta + y'\operatorname{senh}\theta) + b$$

o sea,

$$(\cosh\theta - m\operatorname{senh}\theta)y' = (m\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta)x' + b$$

que equivale a

$$y' = \left(\frac{m\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta - m\operatorname{senh}\theta}\right)x' + \left(\frac{b}{\cosh\theta - m\operatorname{senh}\theta}\right).$$

Esto significa que

$$y' = m'x' + b'$$

es una recta, donde

$$m' = \left(\frac{m\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta - m\operatorname{senh}\theta}\right) \quad \text{y} \quad b' = \left(\frac{b}{\cosh\theta - m\operatorname{senh}\theta}\right). \quad \square$$

Si se divide el numerador y el denominador de $m'$ entre $\cosh\theta$ se tiene que

$$m' = \left(\frac{m - \tanh\theta}{1 - m\tanh\theta}\right).$$

Este resultado sugiere interpretar $m = \tanh\phi$, donde $\phi$ es el ángulo hiperbólico con respecto al eje $x$, porque en ese caso

$$m' = \left(\frac{\tanh\phi - \tanh\theta}{1 - \tanh\phi\tanh\theta}\right)$$

o sea que

$$m' = \tanh(\phi - \theta).$$

Una recta de la forma

$$y = (\tanh\phi)x + b$$

se llama de *primera clase*, y como $|\tanh\phi| < 1$, toda recta de primera clase está entre las rectas $y = x$ y $y = -x$ que se llaman *rectas especiales*, las otras son de segunda clase.

### 2.2.5. Definición vectorial de recta

También es posible dar una caracterización vectorial de recta en el espacio de Minkowski, de la misma forma que en el espacio euclidiano, de la siguiente manera:

Una recta que pasa por los puntos $P$ y $Q$ es el conjunto de puntos $Z$ tales que

$$Z = P + t(Q - P)$$

donde $Z = (x, y)$, $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ y $t$ un número real. Esta definición es equivalente a la definición anterior de recta, puesto que:

$$\begin{aligned}(x, y) &= (p_1, p_2) + t(q_1 - p_1, q_2 - p2)\\ (x, y) &= (p_1 + t(q_1 - p_1), p_2 + t(q_2 - p_2))\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}x &= p_1 + t(q_1 - p_1)\\ y &= p_2 + t(q_2 - p_2)\end{aligned}$$

despejando $t$ de la primera igualdad, se tiene

$$t = \frac{x - p_1}{q_1 - p_1}$$

y reemplazando $t$ en la segunda igualdad,

$$y = p_2 + \frac{(q_2 - p_2)}{(q_1 - p_1)}(x - p_1)$$

que es de la forma

$$y = mx + b,$$

donde $m = \dfrac{(q_2 - p_2)}{(q_1 - p_1)}$ y $b = p_2 - p_1\dfrac{(q_2 - p_2)}{(q_1 - p_1)}$.

### 2.2.6. Paralelismo

Dos rectas

$$y = m_1 x + b_1$$
$$y = m_2 x + b_2$$

en el espacio de Minkowski son paralelas si $m_1 = m_2$.

Esto significa que una recta de primera clase es paralela a otra de primera clase y que una de segunda clase es paralela a una de segunda también. Como $\tanh \phi = \tanh \theta$ implica que $\phi = \theta$ pues la función

$$\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

es inyectiva, las rectas paralelas forman los mismos ángulos hiperbólicos con respecto al eje $x$.

El paralelismo también es una *propiedad geométrica* pues las transformaciones de Lorentz aplican rectas paralelas en rectas paralelas.

*Demostración.* Sean

$$y = m_1 x + b_1$$
$$y = m_2 x + b_2$$

con $m_1 = m_2$ la primera recta se transforma en

$$y' = m_1' x' + b'$$

donde

$$m_1' = \left( \frac{\tanh \phi_1 - \tanh \theta}{1 - \tanh \phi_1 \tanh \theta} \right)$$

y como $m_1 = m_2$ entonces

$$m_2' = m_1'$$

lo que significa que las imágenes de rectas paralelas son rectas paralelas. □

### 2.2.7. Relación entre área y longitud de segmentos

Si se considera un segmento arbitrario $AB$ no paralelo a uno de los ejes $OX$ y $OY$, y un rectángulo $AKBL$ cuyos lados son paralelos a los ejes $OX$ y $OY$ y cuya diagonal es el segmento $AB$, como se ilustra en la siguiente figura:

Se tiene que una transformación de Lorentz aplica este rectángulo a un rectángulo $A'K'B'L'$ cuyos lados son también paralelos a los ejes $OX$ y $OY$ y cuya área la misma que la del área $AKBL$. Si la distancia euclidiana entre los puntos $A$ y $B$ es pequeña, entonces el área de $AKBL$ también es pequeña. Por lo que se puede considerar el área del rectángulo $AKBL$, denotada por $S(AKBL)$, como una medida de la separación minkowskiana de los puntos $A$ y $B$ la cual tiende a cero cuando $A$ tiende a $B$; y tiene el mismo valor para los puntos $A'$ y $B'$. Esto define que una congruencia de segmentos en el sentido de la geometría de Minkowski.

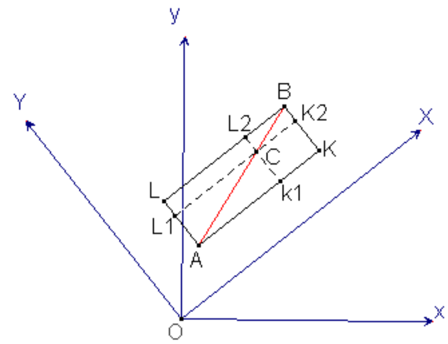


*Figura 3.*

Esto permite pensar $S(AKBL)$ como la distancia de Minkowski entre $A$ y $B$. Como el área se mide en unidades cuadradas, se debe suponer que en la geometría de Minkowski la distancia $d_{AB}$ entre $A$ y $B$ es proporcional a la raíz cuadrada del área del rectángulo $AKBL$, es decir, igual a $k\sqrt{S(AKBL)}$. Se elige el coeficiente $k$ de manera que

$$d_{AB} = \sqrt{2S(AKBL)}. \tag{5}$$

Si $C$ es un punto del segmento $AB$, entonces

$$d_{AB} = d_{AC} + d_{CB}.$$

Las áreas de rectángulos semejantes $AKBL$, $AK_1CL_1$ y $CK_2BL_2$ en la figura 3 son proporcionales a los cuadrados de las diagonales $AB$, $AC$ y $BC$ de estos rectángulos.

Si se rota el segmento $AB$ alrededor del punto $A$ preservando su longitud euclidiana, se tiene que cuando $AB$ se aproxima a la posición $AB_0||OX$ (o $AB_0||OY$), el área de $AKBL$ disminuye, y cuando $AB$ coincide con $AB_0||OX$ (o $AB_0||OY$), el rectángulo correspondiente se reduce a un segmento, de manera que su área se anula. Por eso a la longitud de un segmento en una recta especial se le asigna el valor de cero. Cuando en el proceso de rotación alrededor de $A$, el segmento $AB$ pasa por la posición $AB_0||OX$ (o $AB_0||OY$), el área del rectángulo $AKBL$ empieza otra vez a incrementarse, pero su orientación (determinada por la ordenación $A \to K \to B \to L$;

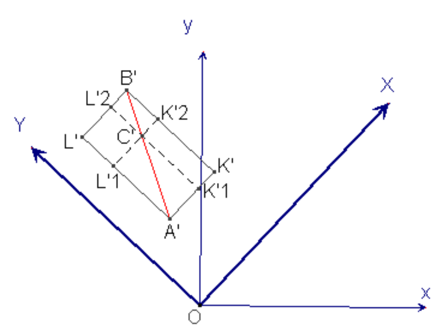


*Figura 4.*

donde $AK||LB||OX$ y $AL||KB||OY$) se invierte (rectángulos $AKBL$ y $AK_1B_1L_1$ en la figura 5). Esto implica que en el plano de Minkowski existen dos clases diferentes de segmentos, que

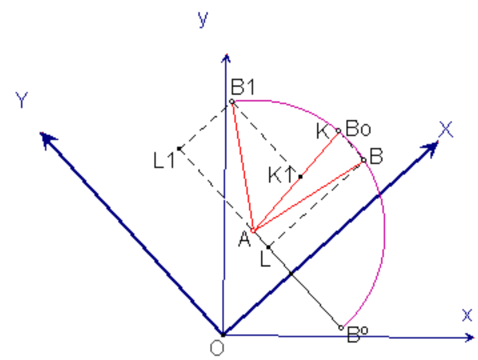


*Figura 5.*

no son comparables en *longitud*, definida ésta como la distancia minkowskiana entre los puntos que definen el segmento.
Un segmento o recta son de primera (segunda) clase si es paralela a una recta que pasa por el origen localizada en el par de ángulos verticales formados por los ejes $OX$ y $OY$ y que contiene al eje $Ox$ ($Oy$). Las rectas y segmentos especiales de tales rectas son llamados rectas nulas y segmentos nulos, respectivamente. Una transformación de lorentz aplica cada segmento en un segmento de la misma clase.

Para ver que la definición de longitud de un segmento $AB$ coincide con la distancia minkowskiana ente $A$ y $B$ se supone que $A$ tiene coordenadas $(X_1, Y_1)$ y $B$ coordenadas $(X_2, Y_2)$ en el sistema de coordenadas $\{X, Y\}$. Los lados del rectángulo $AKBL$ son $|X_2 - X_1|$ y $|Y_2 - Y_1|$, por tanto $S(AKBL) = |(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)|$ y así,

$$d_{AB} = \sqrt{2|(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)|}. \tag{6}$$

En términos de coordenadas $\{x, y\}$ se tiene que la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es igual a

$$\sqrt{2\left|\frac{1}{2}\left[(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\right]\left[(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)\right]\right|} = \sqrt{|(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2|},$$

es decir,

$$d_{AB} = \sqrt{|(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2|} \tag{7}$$

como se quería demostrar.

### 2.2.8. Triángulos

Si $BC = a$, $CA = b$, y $AB = c$ son los lados del triángulo $ABC$, ninguno de ellos es un segmento especial y todos son de la misma clase, entonces las longitudes de los segmentos $BC$, $CA$, y $AB$ denotadas por las letras $a$, $b$, $c$ respectivamente, se pueden comparar. Y si $A, B$, y $C$ no son colineales, la longitud del lado más grande del triángulo $ABC$ es mayor que la suma de las longitudes de los otros dos lados, como se ve en la figura 6, donde $AM = AC = b$ y $BN = BC = a$, así que $a + b = BN + AM < AB = c$. Para probar la desigualdad

$$a + b < c$$

donde $c$ es el lado más grande del $\triangle\ ABC$, análoga a la desigualdad triangular de la geometría euclidiana pero en sentido contrario, puesto que se afirma que la distancia minkowskiana entre dos puntos cualesquiera, es mayor si se mide en línea recta que si mide por cualquier otro camino; primero se prueban tres teoremas:

1. **LEY DE COSENOS DE LA GEOMETRÍA DE MINKOWSKI**
   Si todos los lados del $\triangle\ ABC$ son de la misma clase, entonces,

   $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cosh A$$

   donde $A = \delta_{AB,\ AC}$ es el ángulo de Minkowski entre los lados $AB$ y $AC$ del $\triangle\ ABC$.

   *Demostración.* Demostración: Como los triángulos $\triangle\ APC$ y $\triangle\ BPC$ son triángulos euclidianos rectángulos, en ellos es válido el teorema de Pitágoras y por tanto,

   $$a^2 = h^2 + (c - x)^2 h^2 \qquad\qquad = b^2 - x2$$

   y por la definición de coseno hiperbólico

   $$x = b \cosh A$$

   considerando $b$ y $x$ segmentos minkowskianos. Reemplazando $x$ y $h^2$ en la primera igualdad, se obtiene

   $$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

   o sea,

   $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cosh A. \quad \square$$

2. **LA DESIGUALDAD $\langle A, B\rangle \geq ||A||||B||$**
   Sea $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ en $\mathbb{R}$, el segmento que une $A$ con $B$ corresponde en términos vectoriales a $AB = B - A$, es decir,

   $$AB = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

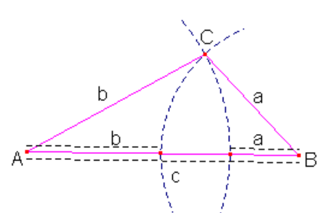


*Figura 6.*

En el triángulo formado por el origen $O$ y los puntos $A$ y $B$ se aplica el teorema del coseno hiperbólico, para obtener

$$||B-A||^2 = ||A||^2 + ||B||^2 - 2||A||||B|| \cosh\theta$$

que en términos de coordenadas corresponden a:

$$(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2 = (a_1^2-a_2^2)+(b_1^2-b_2^2)-2\sqrt{(a_1^2-a_2^2)}\sqrt{(b_1^2-b_2^2)}\cosh\theta$$

resolviendo los cuadrados y simplificando se obtiene

$$\begin{gathered}
(b_1^2-2b_1a_1+a_1^2)-(b_2^2-2b_2a_2+a_2^2) = a_1^2-a_2^2+b_1^2-b_2^2-\sqrt{(a_1^2-a_2^2)(b_1^2-b_2^2)}\cosh\theta \\
b_1^2-2b_1a_1+a_1^2-b_2^2+2b_2a_2-a_2^2-a_1^2+a_2^2-b_1^2+b_2^2 = 2||A||||B||\cosh\theta \\
2(b_2a_2-b_1a_1) = -2||A||||B||\cosh\theta \\
b_1a_1-b_2a_2 = ||A||||B||\cosh\theta
\end{gathered}$$

la expresión $b_1a_1-b_2a_2$ es $\langle A,B\rangle$, por tanto

$$\frac{\langle A,B\rangle}{||A||||B||} = \cosh\theta$$

como $\cosh\theta \geq 1$ entonces $\frac{\langle A,B\rangle}{||A||||B||} \geq 1$, luego

$$\langle A,B\rangle = ||A||||B||.$$

Esta es una fórmula análoga a la desigualdad de Cauchy-Schwartz de la geometría euclidiana, pero con la desigualdad en sentido contrario.

## 3. DESIGUALDAD TRIANGULAR PARA LA FUNCIÓN $||\ ||$

La desigualdad

$$\langle A,B\rangle \geq ||A||||B||$$

implica una desigualdad triangular para la función $||\ ||$ en el espacio de Minkowski,

$$||A+B|| \geq ||A|| + ||B||$$

también análoga a la desigualdad triangular de la geometría euclidiana para las normas.

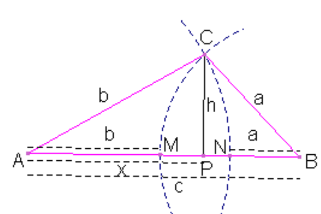


*Figura 7.*

*Demostración.* La forma bilineal simétrica definida para el plano de Minkowski aplicada a la suma $A + B$, da

$$\langle A + B, A + B\rangle = \langle A, A\rangle + 2\langle A, B\rangle + \langle B, B\rangle$$

y por la definición de la función $|| \; ||$, resulta

$$||A + B||^2 = ||A||^2 + 2\langle A, B\rangle + ||B||^2$$

y como $\langle A, B\rangle \geq ||A||||B||$, entonces

$$\begin{aligned} ||A + B||^2 &\geq ||A||^2 + 2||A||||B|| + ||B||^2 \\ ||A + B||^2 &\geq (||A|| + ||B||)^2 \\ ||A + B|| &\geq ||A|| + ||B||. \end{aligned}$$

La desigualdad $a + b < c$ resulta de interpretar $a = d(B, C), b = d(C, A), c = d(A, B)$, puesto que

$$\begin{aligned} d(A, B) &= ||B - A|| \\ &= ||(B - C) + (C - A)|| \end{aligned}$$

y por la desigualdad triangular para $|| \; ||$

$$||(B - C) + (C - A)|| \geq ||B - C|| + ||C - A||$$

y por tanto

$$d(A, B) \geq d(C, B) + d(A, C). \quad \square$$

En la geometría de Minkowski no existen triángulos equiláteros, pues la desigualdad $c > a + b$ lo impide.

### 2.2.9. Área de triángulos

El *área de Minkowski* de cualquier figura en el plano de Minkowski es por definición, la misma que el área en la geometría de Euclides. Por lo tanto, el área $S(ABC)$ del $\triangle\ ABC$ se puede calcular mediante la fórmula

$$S(ABC) = \frac{ch}{2}$$

Y como $\operatorname{senh} A = \frac{h}{b}$, donde $A = \delta_{AB,AC}$ es el ángulo de Minkowski entre los lados $AB$ y $AC$

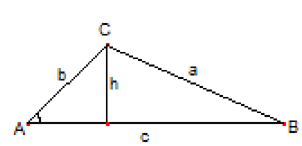


*Figura 8.*

del $\triangle\ ABC$, entonces

$$S(ABC) = \frac{1}{2} cb \operatorname{senh} A.$$

### 2.2.10. Teorema del seno

Como el área de un triángulo se calcula con cualquier lado y su altura correspondiente, la fórmula

$$S(ABC) = \frac{1}{2} cb \operatorname{senh} A$$

implica que

$$\frac{1}{2} ab \operatorname{senh} C = \frac{1}{2} ac \operatorname{senh} B = \frac{1}{2} bc \operatorname{senh} A,$$

de la cual se obtiene la *ley de los senos de Minkowski*

$$\frac{a}{\operatorname{senh} A} = \frac{b}{\operatorname{senh} B} = \frac{c}{\operatorname{senh} C}.$$

### 2.2.11. Ángulo entre dos rectas de primera clase

Como el ángulo entre dos vectores $A$ y $B$ está dado por la relación

$$\cosh \theta = \frac{\langle A, B \rangle}{||A||||B||},$$

esto permite definir el ángulo entre las rectas

$$\begin{aligned} y_1 &= m_1 x + c_1 \\ y_2 &= m_2 x + c_2 \end{aligned}$$

en el plano de Minkowski como el mismo ángulo entre las rectas

$$\begin{aligned} y_1 &= m_1 x & |m1| &< 1 \\ y_2 &= m_2 x & |m2| &< 1 \end{aligned}$$

es decir, el mismo que entre los vectores $(1, m_1)$ y $(1, m_2)$, o sea

$$\cosh \theta = \frac{1 - m_1 m_2}{\sqrt{(1 - m_1^2)(1 - m_2^2)}}.$$

Análogamente se define el ángulo entre rectas y segmentos de segunda clase.

### 2.2.12. Ortogonalidad

En geometría euclidiana dos vectores $A, B$ son perpendiculares u ortogonales, si $\langle A, B \rangle = 0$ por que

$$\langle A, B \rangle = ||A||||B|| \cos \theta$$

por analogía, se dice que en la geometría de Minkowski, dos vectores son ortogonales si y solo si

$$\langle A, B \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0.$$

Esto significa que

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= a_2 b_2 \\ \frac{a_1}{a_2} &= \frac{b_2}{b_1}. \end{aligned}$$

Esta definición se puede extender a rectas y decir que dos rectas

$$y_1 = m_1 x + b_1$$
$$y_2 = m_2 x + b_2$$

en el plano de Minkowski son ortogonales si y solo si las dos rectas

$$y_1 = m_1 x$$
$$y_2 = m_2 x$$

son ortogonales, es decir, si los vectores $(1, m_1)$ y $(1, m_2)$ son ortogonales. Lo que significa que

$$\langle (1, m_1), (1, m_2) \rangle = 0$$

o sea

$$1 - m_1 m_2 = 0$$

es decir,

$$m_1 m_2 = 1.$$

Siempre una recta de primera clase es perpendicular con una de segunda clase pues si $|m1| < 1$ entonces $|m2| > 1$.

### 2.2.13. Distancia de un punto a una recta

Para calcular la distancia entre una recta l de ecuación

$$y = mx + b$$

con $m \neq 0$ y un punto $M = (x_1, y_1)$, se encuentra una recta $l'$ perpendicular a $l$ que tenga como pendiente $\frac{1}{m}$ y que pase por $M$; la recta $l'$ tiene por ecuación

$$\frac{1}{m} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

o sea,

$$y = \frac{1}{m}(x - x_1) + y_1.$$

Las rectas $l$ y $l'$ se intersecan en el punto de coordenadas $x$ e $y$, con

$$\frac{1}{m}(x - x_1) + y_1 = mx + b$$

es decir,

$$\left(\frac{1}{m} - m\right) x = (b - y_1) + \frac{x_1}{m}$$
$$(1 - m^2)x = (b - y_1)m + x_1$$

o sea,

$$x = \frac{(b - y_1)m + x_1}{(1 + m^2)}$$

y por tanto,

$$y = \frac{(b - y_1)m + x_1}{(1 - m^2)} m + b$$

y si se hace $k = \dfrac{(b - y)m + x_1}{(1 - m^2)}$ y la distancia entre $M$ y el punto de intersección es

$$d\left((x_1, y_1), (k, km + b)\right) = \begin{cases} \sqrt{(k - x_1)^2 - (km + b - y_1)^2} & \text{si } (k - x_1)^2 \geq (km + b - y_1)^2 \\ \sqrt{(km + b - y_1)^2 - (k - x_1)^2} & \text{si } (km + b - y_1)^2 > (k - x_1)^2. \end{cases}$$

Con los elementos de geometría desarrollados hasta el momento ya es posible formular y demostrar teoremas de la geometría de Minkowski referentes a triángulos, circunferencias y otras figuras de la geometría hiperbólica como se hace en detalle en el libro de Yaglom, aunque la presentación difiere en la complejidad de los argumentos de la de este trabajo, los resultados que se obtienen son los mismos.

## 3. Conclusiones

La geometría de Minkowski es un ejemplo interesante de una forma de presentar la geometría, fundamentada en la noción de grupo, en particular del grupo de transformaciones de Lorentz, cuyos elementos son representados por movimientos del espacio de Minkowski. Los subconjuntos del espacio son las figuras y las propiedades que permanecen invariantes bajo los movimientos son las propiedades geométricas que se estudian.

Con los elementos de geometría la geometría de Minkowski desarrollados en este presentación, ya es posible formular y demostrar teoremas de esta geometría referentes a triángulos, circunferencias y otras figuras de la geometría hiperbólica como se hace en detalle en el libro de Yaglom, aunque la presentación difiere en la complejidad de los argumentos de la de este trabajo, los resultados que se obtienen son los mismos.

## Bibliografía

[1] ALPERIN, J. L. y ROWEN, B. (1995). *Groups and Representations*. New York, Editorial Springer-Verlag.

[2] ARTEAGA, J. R. (1991). “Geometría diferencial”, en: *Memorias II Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. pp. 149?170.

[3] BIRKHOFF, G. D. (1932). *A set of postulates for plane geometry (Based on Scale and Protractors)*. Annals of Mathematics.

[4] BLUMENTHAL, L. (1965). *Geometría axiomática*. Universidad de Missouri. Editorial Aguilar.

[5] CAICEDO, J. F. (2004). *Teoría de grupos.* Bogotá. Universidad Nacional de Colombia. Pro-Offset Editorial Ltda.

[6] CAMPOS, A. (1994). "El florecimiento del programa de Erlangen", en *Memorias V Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. pp. 269?290.

[7] CAMPOS, A. (1999). "Enunciados en fundamentos de la geometría de David Hilbert", en *Memorias X Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. pp. 49?75.

[8] CAMPOS, A. (1994). Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki. Bogotá, Editor: Alberto Campos.

[9] CASTILLO, H. A. (1993). Lecciones de geometría euclidiana. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional.

[10] COOLIDGE, J. L. (1947). *A history of geometrical methods.* First edition, University Press, Oxford.

[11] COXETER, H. S. (1971). *Fundamentos de geometría*. México, Editorial Limusa

[12] CUESTA, N. (1968). *Geometría vectorial*. Introducción intuitiva al álgebra lineal. España, Editorial Alambra.

[13] DOU, A. (1992). *Orígenes de la geometría no euclídea*, en: Historia de la matemática en el siglo XIX. Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. pp. 43?65.

[14] EFIMOV, N. V. (1984). Geometría Superior. Traducción al Español. Editorial Mir -Moscú.

[15] EUCLIDES. (1979) *Elementos*. Libro I. Editorial Aguilar.

[16] EVES, H. (1969). *Estudio de las geometrías*. México, Tomos I y II, UTEHA.

[17] GREENBERG, M. J. (1980). *Euclidean and non-euclidean geometries.* San Francisco, Editorial Freeman.

[18] HILBERT, D. (1953). *Fundamentos de la geometría de Hilbert*. Traducción de la séptima edición alemana por Francisco Cebrian. Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

[19] HUMPHREYS, J. F. (1996). *A course in group theory*. New York, Oxford Science Publications, Oxford University Press Inc.

[20] KÁRTESZI, F. y SZÉNÁSSY, B. (1987). *Janos Bolyai, appendix the theory of space*. Budpest, Akadémiai Kiadó.

[21] LEGENDRE, A. M. (1833). *Réflexions sur differéntes manières de démostrer la théorie des paralléles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle.* Paris, Mém. Ac. Sc. T. XIII.

[22] LEHMANN, C. H. (1996). *Geometría analítica*. México, Editorial Limusa.

[23] LUNA, J. y ÁLVAREZ, Y. (2004). "Félix Klein y el estudio de la geometría"en: *Memorias XV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y III Encuentro de* Aritmética. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. pp. 265-277.

[24] MARTIN, G. E. (1998). The foundations of geometry and the Non-Euclidean Plane. Editorial Springer, UTM.

[25] MONTESINOS, J. M. (1992). "Las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobatcheswski y Bolyai"en: *Historia de la matemática en el siglo XIX*. Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. pp. 65?105.

[26] OCHOA, C. (1998). *Momento geométrico*, Bogotá, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

[27] OSPINA, O. (1993). *Nociones de geometría vectorial*. Universidad Nacional de Colombia.

[28] SANCHEZ, L. y PEREZ, M. (1945). *Geometría métrica, proyectiva y sistemas de representación*. Tomo I. Editorial Saeta.

[29] VERA, F. (1970). *Científicos griegos*. Recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas. Madrid (España), Editorial Aguilar.

[30] VIDAL, E. (1956). *Introducción a la geometría diferencial*. Editorial Dossat.

[31] YAGLOM, I. M. (1962). *Geometric transformations I*. The Mathematical Association of America 8.

[32] YAGLOM, I. M. (1979). *A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis*. Traslated from the Russian by Abe Shenitzer with the Editorial Asistanse of Basil Gordon. New York, Editorial Springer-Verlag.