

EL PRISMATOIDE TETRAGONAL UNIFORME¹

Luis Enrique Ruiz

Departamento de Matemáticas

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Duitama, Boyacá, Colombia

leruizh@yahoo.es

Resumen

Se precisa la noción de prismaoide y de prismaoide n-gonal uniforme. Se expresa cada vértice del prismaoide tetragonal uniforme como una combinación lineal promedio de su centroide y tres vértices de una base, además de dar una construcción detallada del mismo. Se aporta una construcción algorítmica del antiprisma tetragonal uniforme afín \mathfrak{F} , como también una representación unificada, tal que $\varphi^{-1}(r)$ es la frontera de \mathfrak{F} , donde, específicamente, φ es una función convexa sobre $I \mathbb{R}^3$ y $r > 0$. A la inversa, las características y representación de φ se obtienen para cada \mathfrak{F} dado. En particular se trata la geometría del prismaoide tetragonal uniforme.

Introducción

El prismaoide es un poliedro convexo cuya forma proviene de una distorsión del prisma recto regular. Es sorprendente que no se registre una noción rigurosa del prismaoide en los textos estándar de Geometría Sólida, y apenas sí se le describe como el poliedro obtenido “al distorsionar levemente un prisma”, por lo cual su conocimiento no va más allá de la visión de su manido modelo euclídeo. Este vacío conceptual en el delineamiento del cuerpo produce, de hecho, una gran dificultad técnica para abordar la geometría del antiprisma.

Por esto, y así motivado, el autor aporta en este documento, además de una definición precisa del prismaoide, del prismaoide uniforme, y en particular del prismaoide tetragonal uniforme (ver definiciones 1.1), una metodología y perspectiva, ajenas a la euclídea, que permiten profundizar en la estructura geométrica de este último cuerpo (Ver Figura 1), enlazando nociones de álgebra lineal, análisis convexo y topología.

En esta dirección se expresa, explícitamente, cada vértice del prismaoide tetragonal uniforme como una combinación lineal promedio de su centroide y tres vértices de una base (Teorema 1.2), además de precisar su construcción y altura en términos de la arista.

En general, se acomete aquí la geometría afín de dicho sólido introduciendo una construcción algorítmica del prismaoide tetragonal uniforme afín \mathfrak{F} (Ver definición 2.1 y Figura 2), como también una representación unificada del mismo, considerán-dolo como un conjunto de nivel de una función convexa φ sobre \mathbb{R}^3 concebida a partir de tres vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 (Teorema 2.2).

También, a partir de un prismaoide del tipo \mathfrak{F} se construye φ tal que $\varphi^{-1}(1)$ es, precisamente, la frontera de \mathfrak{F} (Corolario 3.1). En particular se trata la geometría del antiprisma tetragonal uniforme (Corolario 3.2).

¹Presentada en el XIX encuentro de geometría y sus aplicaciones y VII Encuentro de aritmética.

Denotaremos con letra mayúscula los puntos o vectores de \mathbb{R}^3 , su producto interior usual por un punto \cdot y el producto vectorial mediante una cruz \times .

Los teoremas 1.2 y 2.2, como los corolarios 3.1 y 3.2, consignados en la presente investigación son originales. Constituyen aportes concebidos y demostrados por el autor.

1. Representación de los vértices del prismoide tetragonal uniforme

1.1. Definiciones.

Si las bases de un prisma son polígonos regulares y sus caras laterales son rectángulos, entonces el poliedro es llamado un **prisma recto regular**.

A continuación el autor precisa la noción de antiprisma, la cual, sorprendentemente, no aparece en los textos estándar y relevantes sobre poliedros. Por ejemplo, el geómetra H.S.M. Coxeter en su libro [4] p. 149 dice así “distorsionando levemente un prisma n -gonal obtenemos un antiprisma n -gonal”. W.W. Rouse Ball en [1] p. 129 consigna, a manera de definición, “el antiprisma cuyas bases, aunque paralelas, no están situadas similarmente, pero a cada vértice de una le corresponde un lado de la otra, tal que las aristas laterales forman un zig-zag”.

Si rotamos $\frac{\pi}{n}$ la base de un prisma n -gonal recto regular, alrededor de su centro, obtenemos un **prismoide** (o prismoide o antiprisma) n -gonal, cuyas caras consisten de dos n -gonos regulares conectados por $2n$ triángulos isósceles. Los n -gonos son las bases y la distancia entre ellos la altura del prismoide. La altura del prismoide puede siempre ajustarse tal que los triángulos isósceles sean equiláteros; el poliedro así obtenido es un **prismoide n -gonal uniforme**, con tres triángulos y un n -gono en cada vértice. Cuando $n = 4$ obtenemos el **prismoide tetragonal uniforme** (Ver Figura 1).

Dado un prismoide tetragonal uniforme, en el siguiente teorema se construye explícitamente el prisma recto regular tetragonal del cual se obtiene el prismoide, determinándose su altura. Además se expresa categóricamente cada vértice del antiprisma como una combinación lineal promedio (la suma de cuyos coeficientes es uno, [3] pp. 417 - 423) de su centroide y tres vértices de una base.

1.2. Teorema.

Sea $V'_1 \dots V'_8$ un prismoide tetragonal uniforme de vértices dispuestos como en la Figura 1, arista a y centroide

$$G' = \frac{1}{8}(V'_1 + \dots + V'_8) \quad (1.2.1)$$

Sea

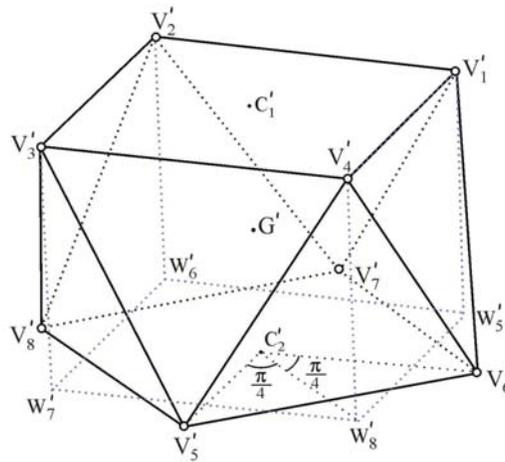
$$\begin{cases} C'_i = \frac{1}{2}(V'_{4i-3} + V'_{4i-1}) \\ = \frac{1}{2}(V'_{4i-2}) + V'_{4i} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

el centro de la base cuadrada $V'_{4i-3}V'_{4i-2}V'_{4i-1}V'_{4i}$ del prismoide, para $i = 1, 2$. Entonces

(i) G' satisface

$$G' = \frac{1}{2}(C'_1 + C'_2) \tag{1.2.3}$$

Figura 1. Si $V'_1 \dots V'_8$ es un prismaoide tetragonal uniforme de arista a y centroide $G' = \frac{1}{8} (V'_1 + \dots + V'_8)$, entonces $\frac{1}{2}a$ es la altura del prismaoide, el cual se obtiene del prisma recto tetragonal $V'_1 \dots V'_4 W'_5 \dots W'_8$ al rotar $\frac{\pi}{4}$ la base cuadrada $W'_5 \dots W'_8$ alrededor de su centro C'_2



Fuente: El Autor

(ii) Si

$$\begin{cases} W'_5 = 2G' - V'_3 & , & W'_6 = 2G' - V'_4 & , \\ W'_7 = 2G' - V'_1 & , & W'_8 = 2G' - V'_2 & , \end{cases} \tag{1.2.4}$$

la reflexión a través de G' de los vértices de la base cuadrada $V'_1 \dots V'_4$ del prismaoide, entonces $W'_5 \dots W'_8$ es un cuadrado obtenido al rotar $\frac{\pi}{4}$ el cuadrado $V'_5 \dots V'_8$ (la otra base del prismaoide) alrededor de su centro C'_2

(iii) El poliedro $V'_1 \dots V'_4 W'_5 \dots W'_8$ es un prisma recto regular tetragonal, de vértices dispuestos como en la Figura 1, y altura $2 \frac{1}{4}a$. Explícitamente, todo prismaoide tetragonal uniforme de arista a , se obtiene del prisma recto regular de base cuadrada de lado a y altura $2 \frac{1}{4}a$, al rotar $\frac{\pi}{4}$ una de las bases alrededor de su centro.

(iv) Los vértices del prismoide tienen las siguientes representaciones lineales

$$\begin{cases} V'_4 = V'_1 - V'_2 + V'_3 & , \\ V'_5 = -\frac{1}{2}V'_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}V'_2 + \frac{\sqrt{2}-1}{2}V'_3 + 2G' & , \\ V'_6 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}V'_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}V'_2 - \frac{1}{2}V'_3 + 2G' & , \\ V'_7 = -\frac{1}{2}V'_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}V'_2 - \frac{\sqrt{2}+1}{2}V'_3 + 2G' & , \\ V'_8 = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}V'_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}V'_2 - \frac{1}{2}V'_3 + 2G' & , \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Demostración. De (1.2.1) obtenemos

$$\begin{aligned} G' &= \frac{1}{8} \left\{ [(V'_1 + V'_3) + (V'_2 + V'_4)] + [(V'_5 + V'_7) + (V'_6 + V'_8)] \right\} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^2 \left\{ (V'_{4i-3} + V'_{4i-1}) + (V'_{4i-2} + V'_{4i}) \right\} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^2 (2C'_i + 2C'_i) && \text{(por (1.2.2))} \\ &= \frac{1}{2} (C'_1 + C'_2) \end{aligned}$$

justamente (1.2.3)

Por ser $V'_5 \dots V'_8$ un cuadrado (de hecho no degenerado) de centro C'_2 , entonces automáticamente los vectores $V'_6 - C'_2$ y $V'_7 - C'_2$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , por lo cual el subespacio generado por ellos es

$$H = \left\{ s(V'_6 - C'_2) + t(V'_7 - C'_2) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

y por ende $C'_2 + H$ es el plano de la base $V'_5 \dots V'_8$ del prismoide. Su trasladado $C'_1 + H$ por $C'_1 - C'_2$, pasa por el punto C'_1 . Ahora, según las definiciones 1.1 las bases del prismoide son paralelas, y dado que $C'_2 + H$ y $C'_1 + H$ son planos paralelos, entonces $C'_1 + H$ es el plano de la base cuadrada $V'_1 \dots V'_4$ (de centro C'_1) del prismoide. Por esto existen escalares s y t tales que

$$V'_3 = C'_1 + s(V'_6 - C'_2) + t(V'_7 - C'_2) ,$$

o bien, según (1.2.4) y (1.2.3),

$$W'_5 = C'_2 + s(V'_6 - C'_2) + t(V'_7 - C'_2) ,$$

un punto de $C'_2 + H$, el plano de la base $V'_5 \dots V'_8$.

Además,

$$\begin{aligned} V'_1 - W'_5 &= V'_1 - (2G' - V'_3) && \text{(por (1.2.4))} \\ &= (V'_1 + V'_3) - 2G' = 2C'_1 - (C'_1 + C'_2) && \text{(por (1.2.2) y (1.2.3))} \\ &= C'_1 - C'_2 && ; \end{aligned}$$

procediendo así en general se prueba que

$$V'_i - W'_{i+4} = C'_1 - C'_2, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.2.6)$$

Por otro lado, y de acuerdo a las definiciones 1.1, si $V'_1 \dots V'_4$ es una de las bases del prisma recto regular del cual procede el prismaoide tetragonal uniforme $V'_1 \dots V'_8$, entonces $C'_1 - C'_2$ es un vector normal común a los planos $C'_1 + H$ y $C'_2 + H$ de sus bases, por lo cual la recta a través de V'_1 , y paralela a $C'_1 - C'_2$, interseca al plano $C'_2 + H$ en un único punto U_{i+4} , para $i = 1, \dots, 4$, por esto

$$V'_i - U_{i+4} = C'_1 - C'_2, \quad i = 1, \dots, 4$$

De aquí y (1.2.6) se infiere que $W'_{i+4} = U_{i+4}$ (por un punto pasa un única recta paralela a un vector director dado), por lo cual $W'_5 \dots W'_8$ es obtenido al rotar $\frac{\pi}{4}$ el cuadrado $V'_5 \dots V'_8$ alrededor de su centro C'_2 . De contera $V'_1 \dots V'_4 W'_5 \dots W'_8$ es un prisma recto regular tetragonal de vértices dispuestos como en la Figura 1.

Si P es el punto medio de la arista $\overline{V'_5 V'_6}$ entonces $\overline{C'_2 P}$ es una apotema del cuadrado $V'_5 \dots V'_8$ y por ende bisectriz del ángulo recto del triángulo rectángulo isósceles $V'_5 C'_2 V'_6$, recto en C'_2 (Ver Figura 1); razón por la cual $V'_5 P C'_2$ es un triángulo rectángulo isósceles, recto en P , lo que implica $C'_2 P = \frac{a}{2} < C'_2 V'_5 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo (y la rotación a través de $\frac{\pi}{4}$ de $\overline{C'_2 W'_8}$ alrededor de C'_2), de aquí que P sea un punto del interior relativo del segmento $\overline{C'_2 W'_8}$. Ya hemos establecido que $\overline{V'_4 W'_8}$ es perpendicular al plano $C'_2 + H$, por lo cual $P W'_8 V'_4$ es un triángulo rectángulo recto en W'_8 , de hipotenusa (la altura del triángulo equilátero $V'_4 V'_5 V'_6$ de lado a) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Los catetos son

$$\begin{aligned} P W'_8 &= C'_2 W'_8 - C'_2 P = C'_2 V'_5 - C'_2 P \\ &= \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1) \end{aligned} \quad y$$

$V'_4 W'_8$, la altura del prisma (y del prismaoide). Así, aplicando el Teorema de Pitágoras hayamos que

$$V'_4 W'_8 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left\{\frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)\right\}^2} = 2^{-\frac{1}{4}}a$$

Por ser $V'_1 \dots V'_4$ un cuadrado entonces $V'_4 - V'_1 = V'_3 - V'_2$, ecuación equivalente a la primera en (1.2.5). En el cuadrado $W'_5 \dots W'_8$ el lado $\overline{W'_7 W'_8}$ y su apotema (sobre el segmento $\overline{V'_5 V'_7}$ son segmentos perpendiculares, y así $V'_5 - V'_7$ y $W'_7 - W'_6$ son vectores paralelos y del mismo sentido, esto es, existe un escalar $t > 0$ tal que $V'_5 - V'_7 = t(W'_7 - W'_6)$. Tomando norma en ambos miembros de esta ecuación hallamos $t = \sqrt{2}$ y

$$V'_5 = V'_7 + \sqrt{2}(W'_7 - W'_6) \quad (1.2.7)$$

Procediendo análogamente obtenemos

$$V'_6 = V'_8 + \sqrt{2}(W'_5 - W'_6) \quad (1.2.8)$$

De (1.2.7) se sigue

$$\begin{aligned} V'_5 &= 2C'_2 - V'_5 + \sqrt{2}(V'_4 - V'_1) && \text{(por (1.2.2) y (1.2.4))} \\ &= 2C'_2 - V'_5 + \sqrt{2}(V'_3 - V'_2) && (V'_1 \dots V'_4 \text{ es un cuadrado}), \end{aligned}$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} 2V'_5 &= 2C'_2 + \sqrt{2}(V'_3 - V'_2) \\ &= 4G' - 2C'_1 + \sqrt{2}(V'_3 - V'_2) && \text{(por (1.2.3))} \\ &= 4G' - (V'_1 + V'_3) + \sqrt{2}(V'_3 - V'_2) && \text{(por (1.2.2)),} \end{aligned}$$

ecuación equivalente a la segunda en (1.2.5). Igualmente de (1.2.8) hallamos

$$\begin{aligned} V'_6 &= V'_8 + \sqrt{2}(V'_1 - V'_2) && (1.2.9) \\ &= 2C'_2 - V'_6 + \sqrt{2}(V'_1 - V'_2) \quad , \end{aligned}$$

si y solo si

$$\begin{aligned} 2V'_6 &= 2C'_2 + \sqrt{2}(V'_1 - V'_2) \\ &= 4G' - 2C'_1 + \sqrt{2}(V'_1 - V'_2) && \text{(por (1.2.3))} \\ &= 4G' - (V'_1 + V'_3) + \sqrt{2}(V'_1 - V'_2) && \text{(por (1.2.2)),} \end{aligned}$$

ecuación equivalente a la tercera en (1.2.5).

De (1.2.9) y la tercera ecuación en (1.2.5) se infiere la última ecuación para V'_8 en (1.2.5). Finalmente, por ser $V'_5 \dots V'_8$ un cuadrado entonces $V'_7 - V'_6 = V'_8 - V'_5$, esto es, $V'_7 = -V'_5 + V'_6 + V'_8$. Sustituyendo en esta ecuación V'_5, V'_6, V'_8 por sus representaciones lineales promedio en (1.2.5), obtenemos la penúltima ecuación en (1.2.5).

2. Una construcción algorítmica del prismoide tetragonal uniforme afín

2.1. Definición.

Un prismoide tetragonal uniforme afín es la imagen de un prismoide tetragonal uniforme bajo un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 (Ver Figura 2).

2.2. Teorema.

Sean, $r > 0$ y A, B, C, G vectores en \mathbb{R}^3 tales que

$$\Delta = \det(A, B, C) \neq 0 \quad (2.2.1)$$

Hagamos

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = G + \frac{r}{\Delta}(A \times B + B \times C + C \times A) , \\ V_2 = G + \frac{r}{\Delta}(A \times B - B \times C + C \times A) , \\ V_3 = G + \frac{r}{\Delta}(A \times B - B \times C - C \times A) , \\ V_4 = G + \frac{r}{\Delta}(A \times B + B \times C - C \times A) , \\ V_5 = G - \frac{r}{\Delta}(A \times B + \sqrt{2}C \times A) , \\ V_6 = G - \frac{r}{\Delta}(A \times B - \sqrt{2}B \times C) , \\ V_7 = G - \frac{r}{\Delta}(A \times B - \sqrt{2}C \times A) , \\ V_8 = G - \frac{r}{\Delta}(A \times B + \sqrt{2}B \times C) , \end{array} \right. \quad (2.2.2)$$

y sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función convexa representada por

$$\varphi(X) = \max_{1 \leq i \leq 10} f(i, X), \quad (2.2.3)$$

para todo $X \in \mathbb{R}^3$, en la cual

$$\left\{ \begin{array}{l} f(i, X) = \frac{1}{2} \left\{ \left[(\sqrt{2} - 2)k + 2 - \sqrt{2} + 2(3 - 2\sqrt{2})|k - 2| + 2(3\sqrt{2} - 4)|k - 3| \right. \right. \\ \left. \left. + 2(3 - 2\sqrt{2})|k - 4| - 2(3 - 2\sqrt{2})|k - 6| - 2(3\sqrt{2} - 4)|k - 7| - 2(3 - 2\sqrt{2})|k - 8| \right. \right. \\ \left. \left. + (2 - \sqrt{2})|k - 9| \right] A + \left[(4 - 3\sqrt{2})k + 5\sqrt{2} - 6 - 2(3 - 2\sqrt{2})|k - 2| \right. \right. \\ \left. \left. + (3 - 2\sqrt{2})|k - 4| + 2(3\sqrt{2} - 4)|k - 5| + 2(3 - 2\sqrt{2})|k - 6| - 2(2 - \sqrt{2})|k - 8| \right. \right. \\ \left. \left. + (2 - \sqrt{2})|k - 9| \right] B + \left[4(\sqrt{2} - 2)k + 28 - 6\sqrt{2} + 4(3 - 2\sqrt{2}) \sum_{i=2}^7 (-1)^i |k - i| \right. \right. \\ \left. \left. + 2(5 - 3\sqrt{2})|k - 8| - 2(3 - \sqrt{2})|k - 9| \right] C \right\} \cdot (X - G) \end{array} \right. \quad (2.2.4)$$

Si

$$\mathfrak{F} = \{X \in \mathbb{R}^3 | \varphi(X) \leq r\} \quad , \quad (2.2.5)$$

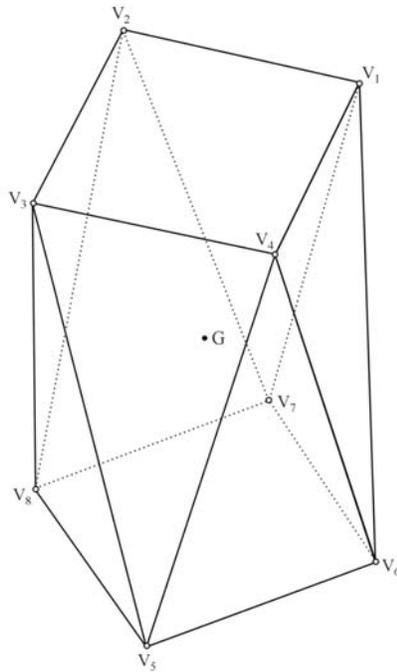
entonces \mathfrak{F} es un prismaoide tetragonal uniforme afín, macizo y cerrado, de vértices V'_1, \dots, V'_8 dispuestos como se muestra en la Figura 2, y centroide

$$G = \frac{1}{8}(V_1 + \dots + V_8) \quad (2.2.6)$$

Además, los planos faciales del poliedro tienen las siguientes representaciones. Las caras (triángulos y paralelogramos),

$$\left\{ \begin{array}{llll} V_1 V_2 V_7, & V_2 V_7 V_8, & V_2 V_3 V_8, & V_3 V_5 V_8, \\ V_3 V_4 V_5, & V_4 V_5 V_6, & V_1 V_4 V_6, & V_4 V_6 V_7, \\ V_1 V_2 V_3 V_4, & V_5 V_6 V_7 V_8, & & \end{array} \right. \quad (2.2.7)$$

Figura 2. $\varphi^{-1}(r)$ es la frontera del prismaoide tetragonal uniforme afin $V_1 \cdots V_8$ de centroide $G = \frac{1}{8} (V_1 + \cdots + V_8)$



Fuente: El Autor

están en los planos

$$f(i, X) = r, \quad i = 1, \dots, 10, \tag{2.2.8}$$

respectivamente

Demostración. Cada una de las diez funciones en (2.2.4) es una forma lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} ([2] p. 215), y por tanto una función real convexa. Por ende φ en (2.2.3) es convexa por ser el máximo de funciones convexas ([5] pp. 35 - 36, Theorem 5.5). De (2.2.1), (2.2.2) y las propiedades de los determinantes obtenemos $\det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G) = \frac{4r^3}{\Delta} \neq 0$, es decir, G, V_1, V_2, V_3 son afínmente independientes en \mathbb{R}^3 , lo mismo que G', V'_1, V'_2, V'_3 en el prismaoide tetragonal uniforme de la Figura 1 (de hecho no degenerado).

Por tanto existe un único automorfismo afín $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g(G') = G \quad \text{y} \quad g(V'_i) = V_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.2.9}$$

([3] p. 429; [5] p. 8).

De (2.2.2) obtenemos la siguiente combinación lineal promedio, $V_4 = V_1 - V_2 + V_3$. En general: directamente puede verificarse cómo obtenemos de (2.2.2), precisamente, las combinaciones lineales promedio que aparecen en (1.2.5) al sustituir V'_i por $V_i, i = 1, \dots, 8$. Por tanto, y según (2.2.9),

$$\begin{aligned} g(V'_4) &= g(V'_1) - g(V'_2) + g(V'_3) \\ &= V_1 - V_2 + V_3 = V_4, \end{aligned}$$

análogamente,

$$g(V'_i) \quad , i = 4, \dots, 8,$$

dado que g preserva las combinaciones lineales promedio. Por esto

$$g(V'_i) = V_i \quad , \quad i = 1, \dots, 8 ,$$

y así, de acuerdo a la definición 2.1, $V'_1 \dots V'_8$ es un prismoide tetragonal uniforme afín, de centroide G según (2.2.6) y vértices dispuestos como se muestra en la Figura 2.

Consideremos ahora el prismoide tetragonal uniforme afín $V_1 \dots V_8$ como un sólido macizo y cerrado \mathfrak{P} , esto es,

$$\mathfrak{P} = \text{conv} \{V'_1, \dots, V'_8\}$$

, la envolvente convexa de sus vértices ([5] p. 158 Theorem 17.2; p. 12 Corollary 2.3.1). Siendo cada X en \mathfrak{P} una combinación convexa de la forma

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=1}^8 \lambda_j V_j = G + = \sum_{j=1}^8 \lambda_j (V_j - G) \\ &= G + \sum_{j=1}^4 \lambda_j (V_j - G) + \sum_{j=1}^4 \lambda_{j+4} (V_{j+4} - G) \end{aligned}$$

o bien, según (2.2.2),

$$\begin{aligned} X - G &= \frac{r}{\Delta} \left\{ (\lambda_1 + \dots + \lambda_4 - \lambda_5 - \dots - \lambda_8) A \times B + (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \sqrt{2}\lambda_6 \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2}\lambda_8) B \times C + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 - \sqrt{2}\lambda_5 + \sqrt{2}\lambda_7) C \times A \right\} , \end{aligned}$$

donde

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_8 = 1 \quad \text{y} \quad \text{cada } \lambda_j \geq 0,$$

se desprende

$$\begin{cases} A \cdot (X - G) = r(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \sqrt{2}\lambda_6 - \sqrt{2}\lambda_8) , \\ B \cdot (X - G) = r(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 - \sqrt{2}\lambda_5 + \sqrt{2}\lambda_7) , \\ C \cdot (X - G) = r(\lambda_1 + \dots + \lambda_4 - \lambda_5 - \dots - \lambda_8) , \end{cases}$$

y por ende, según (2.2.4),

$$\left\{ \begin{aligned} f(i, X) &= \frac{r}{2} \left[\left[(\sqrt{2} - 2)k + 2 - \sqrt{2} + 2(3 - 2\sqrt{2})|k - 2| + 2(3\sqrt{2} - 4)|k - 3| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (3 - 2\sqrt{2})|k - 4| - 2(3 - 2\sqrt{2})|k - 6| - 2(3\sqrt{2} - 4)|k - 7| - 2(3 - 2\sqrt{2})|k - 8| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2 - \sqrt{2})|k - 9| \right] (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \sqrt{2}\lambda_6 - \sqrt{2}\lambda_8) + \left[(4 - 3\sqrt{2})k + 5\sqrt{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 6 - 2(3 - 2\sqrt{2})|k - 2| + 2(3 - 2\sqrt{2})|k - 4| + 2(3\sqrt{2} - 4)|k - 5| + 2(3 - 2\sqrt{2})|k - 6| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(2 - \sqrt{2})|k - 8| + (2 - \sqrt{2})|k - 9| \right] (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 - \sqrt{2}\lambda_5 + \sqrt{2}\lambda_7) \right] \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +[4(\sqrt{2} - 2)k + 28 - 6\sqrt{2} + 4(3 - 2\sqrt{2}) \sum_{i=2}^7 (-1)^i |k - i| + 2(5 - 3\sqrt{2})|k - 8| \\ -2(3 - \sqrt{2})|k - 9|](\lambda_1 + \cdots + \lambda_4 - \lambda_5 - \cdots - \lambda_8) \end{array} \right\},$$

o bien, explícitamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1, X) = r \left\{ (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_7) - b(\lambda_3 + \lambda_4) - c\lambda_5 - a(\lambda_6 + \lambda_8) \right\}, \\ f(2, X) = r \left\{ (\lambda_2 + \lambda_7 + \lambda_5) - a(\lambda_1 + \lambda_3) - c\lambda_4 - b(\lambda_5 + \lambda_6) \right\}, \\ f(3, X) = r \left\{ (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_8) - b(\lambda_1 + \lambda_4) - a(\lambda_5 + \lambda_7) - c\lambda_6 \right\}, \\ f(4, X) = r \left\{ (\lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_8) - c\lambda_1 - a(\lambda_2 + \lambda_4) - b(\lambda_6 + \lambda_7) \right\}, \\ f(5, X) = r \left\{ (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) - b(\lambda_1 + \lambda_2) - a(\lambda_6 + \lambda_8) - c\lambda_7 \right\}, \\ f(6, X) = r \left\{ (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - a(\lambda_1 + \lambda_3) - c\lambda_2 - b(\lambda_7 + \lambda_8) \right\}, \\ f(7, X) = r \left\{ (\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6) - b(\lambda_2 + \lambda_3) - a(\lambda_5 + \lambda_7) - c\lambda_8 \right\}, \\ f(8, X) = r \left\{ (\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_7) - a(\lambda_2 + \lambda_4) - c\lambda_3 - b(\lambda_5 + \lambda_8) \right\}, \\ f(9, X) = r(\lambda_1 + \cdots + \lambda_4 - \lambda_5 - \cdots - \lambda_8), \\ f(10, X) = r(\lambda_5 + \cdots + \lambda_8 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_4), \end{array} \right. \quad (2.2.10)$$

donde

$$a = 3 - 2\sqrt{2} > 0 \quad , \quad b = 4\sqrt{2} - 5 > 0 \quad , \quad c = 7 - 4\sqrt{2} > 0, \quad (2.2.11)$$

expresiones que implican

$$f(i, X) \leq r \quad , \quad i = 1, \dots, 10, \quad (2.2.12)$$

por lo cual, según (2.2.3), $\varphi(X) \leq r$, es decir según (2.2.5), $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{F}$.

Por ser φ una función convexa sobre \mathbb{R}^3 , propia y cerrada, entonces

$$\text{int}(\mathfrak{F}) = \{X \in \mathbb{R}^3 | \varphi(X) < r\}$$

y

$$\text{Fr}(\mathfrak{F}) = \{X \in \mathbb{R}^3 | \varphi(X) = r\}$$

([5] p. 59, Corollary 7.6.1). Por esto, de acuerdo a (2.2.3) y (2.2.4), $\varphi(G) = 0 < r$, por lo cual $G \in \text{inte}(\mathfrak{F})$, propiedad topológica que utilizaremos al final de la presente demostración.

Si $X \in \text{conv}\{V_1, V_2, V_7\} \subseteq \mathfrak{P}$ existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_7$, no negativos, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_7 = 1$, tales que

$$X = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + 0V_3 + \cdots + 0V_6 + \lambda_7 V_7 + 0V_8,$$

reduciéndose la primera ecuación en (2.2.10) a $f(1, X) = r$, lo que implica al unísono con (2.2.12), $\varphi(X) = r$ y

$$\text{conv}\{V_1, V_2, V_7\} \subseteq \text{Fr}(\mathfrak{F})$$

Así, utilizando (2.2.10) y (2.2.12) en general se prueba que todas las caras de \mathfrak{P} , listadas en (2.2.7), están contenidas en la frontera de \mathfrak{F} (y de contera contenidas en los planos (2.2.8), respectivamente). Por tanto

$$\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{F} \quad \text{y} \quad \text{Fr}(\mathfrak{P}) \subseteq \text{Fr}(\mathfrak{F}) \quad (2.2.13)$$

Si $X \in \mathfrak{F} \sim \mathfrak{P}$ entonces X es un punto interior de $\mathbb{R}^3 \sim \mathfrak{P}$ por ser \mathfrak{P} cerrado, y el segmento $\overline{GX} \subseteq \mathfrak{F}$ interseca a $\text{Fr}(\mathfrak{P})$ en un punto P entre G y X (por ser \mathfrak{P} un poliedro convexo), esto es, $P \in \text{int}(\mathfrak{F})$ ([5] p. 45, Theorem 6.1) y además por (2.2.13) $P \in \text{Fr}(\mathfrak{F})$ lo cual es imposible. Así que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}$.

3. Representación de un prismaoide tetragonal uniforme afín dado

3.1. Corolario.

Sea \mathfrak{F} un prismaoide tetragonal uniforme afín dado, macizo y cerrado, de vértices V_1, \dots, V_8 dispuestos como en la Figura 2, de centroide

$$G = \frac{1}{8}(V_1 + \dots + V_8)$$

Hagamos

$$\begin{cases} A = \nabla^{-1} \left\{ -(V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) - (V_3 - G) \times (V_1 - G) \right\}, \\ B = \nabla^{-1} \left\{ -(V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) + (V_3 - G) \times (V_1 - G) \right\}, \\ C = \nabla^{-1} \left\{ (V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) + (V_3 - G) \times (V_1 - G) \right\}, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

donde

$$\nabla = \det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G) \quad (3.1.2)$$

Entonces, A , B y C son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , y respecto a estos vectores $\mathfrak{F} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(X) \leq 1\}$ donde $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la función convexa representada en (2.2.3) y (2.2.4).

Demostración. Siendo de hecho \mathfrak{F} un poliedro no degenerado (la imagen automorfa afín de un prismaoide tetragonal uniforme), entonces automáticamente el determinante ∇ definido en (3.1.2) es no nulo. Además, según (3.1.1) y (3.1.2),

$$\Delta = \det(A, B, C) = 4\nabla^{-1} \neq 0$$

En otras palabras, los vectores A , B , C definidos en (3.1.1) satisfacen las hipótesis del teorema 2.2, bajo los cuales consideramos la función convexa $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ representada en (2.2.3) y (2.2.4). Por tanto, si tomamos en este teorema $r = 1$ entonces el conjunto de nivel $\mathfrak{P} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(X) \leq 1\}$ es un prismaoide tetragonal uniforme afín, macizo y cerrado, de centroide G , de tal manera que remitiéndonos a los segundos miembros de las ecuaciones en (2.2.2) se demuestra que V_1 , V_2 y V_3 son también vértices de \mathfrak{P} .

Ahora bien, dado que \mathfrak{F} es la imagen automorfa afín de un prismaoide tetragonal uniforme, entonces sus vértices (y los de \mathfrak{P} , según se estableció en la demostración del teorema 2.2) son combinaciones lineales promedio de G , V_1 , V_2 y V_3 como los indicados en (1.2.5). Se infiere que los vértices de \mathfrak{P} son, justamente, V_1, \dots, V_8 , es decir, $\mathfrak{P} = \mathfrak{F}$.

3.2. Corolario.

Sea \mathfrak{F} un prismaoide tetragonal uniforme de arista a , macizo y cerrado, de vértices V_1, \dots, V_8 dispuestos como en la Figura 2, y centroide

$$G = \frac{1}{8}(V_1 + \dots + V_8)$$

Hagamos

$$\begin{cases} A = 2a^{-2}(V_1 - V_2) , \\ B = 2a^{-2}(V_2 - V_3) , \\ C = 2\sqrt{2}a^{-2}\{(V_1 - G) + (V_3 - G)\} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Entonces, A , B y C son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , y respecto a estos vectores, $\mathfrak{F} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(X) \leq 1\}$ donde $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la función convexa representada en (2.2.3) y (2.2.4).

Demostración. Si C_1 es el centro del cuadrado $V_1 \dots V_4$, entonces su circunradio es

$$\|V_i - C_1\| = \frac{\sqrt{2}a}{2}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.2.2)$$

Puesto que $C_1 - G$ es un vector normal al plano de dicho cuadrado y $\|C_1 - G\| = 2^{-5/4}a$ ((iii) parte del teorema 1.2), entonces $V_i C_1 G$ es un triángulo rectángulo, recto en C_1 , lo que implica de acuerdo al Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} \|V_i - G\| &= \{\|V_i - C_1\|^2 + \|C_1 - G\|^2\}^{1/2} \\ &= a \left(\frac{1}{2} + 2^{-5/2} \right)^{1/2} \quad (\text{por (3.2.2)}), \end{aligned}$$

esto es,

$$\left\{ \|V_i - G\| = \|V_{i+4} - G\| = \frac{a}{4} \sqrt{8 + 2\sqrt{2}}, \quad i = 1, \dots, 4, \right. \quad (3.2.3)$$

el circunradio de \mathfrak{F} . Si θ_{mn} denota la medida del ángulo $\angle V_m G V_n$, entonces del Teorema del Coseno aplicado al triángulo isósceles $V_1 G V_3$, obtenemos

$$\|V_3 - V_1\|^2 = 2\|V_1 - G\|^2(1 - \cos \theta_{13}),$$

lo que implica, a la luz de (3.2.2), (3.2.3) y la relación $V_3 - V_1 = -2(V_1 - C_1)$,

$$\cos \theta_{13} = \cos \theta_{24} = \frac{4\sqrt{2} - 9}{7} \quad (3.2.4)$$

Análogamente conseguimos

$$\begin{cases} \cos \theta_{12} = \cos \theta_{23} = \cos \theta_{34} = \cos \theta_{14} \\ = \frac{2\sqrt{2} - 1}{7} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Ahora, dado que $\nabla \neq 0$ en (3.1.2), como se estableció en la demostración del corolario 3.1, entonces $V_1 - G$, $V_2 - G$ y $V_3 - G$ constituyen una base de \mathbb{R}^3 . Por tanto existen escalares s , t , u tales que

$$(V_1 - G) \times (V_2 - G) = s(V_1 - G) + t(V_2 - G) + u(V_3 - G) \quad (3.2.6)$$

Multiplicando interiormente ambos miembros de (3.2.7), sucesivamente por $V_1 - G$, $V_2 - G$ y $V_3 - G$, teniendo presentes (3.2.3), (3.2.4) y (3.2.7), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 7s + (2\sqrt{2} - 1)t + (4\sqrt{2} - 9)u = 0 \\ (2\sqrt{2} - 1)s + 7t + (2\sqrt{2} - 1)u = 0 \\ (4\sqrt{2} - 9)s + (2\sqrt{2} - 1)t + 7u = 4a^{-2}(4 - \sqrt{2})\nabla, \end{cases} \quad (3.2.7)$$

respectivamente. Resolviendo el sistema recibimos

$$s = -\sqrt{2}t = (2 - \sqrt{2})u = \sqrt{2}a^{-2}\nabla,$$

y por ende, según (3.2.6),

$$(V_1 - G) \times (V_2 - G) = a^{-2}\nabla \left\{ \sqrt{2}(V_1 - G) - (V_2 - G) + (1 + \sqrt{2})(V_3 - G) \right\} \quad (3.2.8)$$

Procediendo análogamente hallamos

$$\begin{cases} (V_2 - G) \times (V_3 - G) = a^{-2}\nabla \left\{ (1 + \sqrt{2})(V_1 - G) - (V_2 - G) + \sqrt{2}(V_3 - G) \right\}, \\ (V_3 - G) \times (V_1 - G) = a^{-2}\nabla \left\{ -(V_1 - G) + 2(V_2 - G) - (V_3 - G) \right\}, \end{cases}$$

Sustituyendo estas expresiones y (3.2.8) en (3.1.1) obtenemos (3.2.1). Además, de (3.2.1) recibimos

$$\det(A, B, C) = 16\sqrt{2}a^{-6}\nabla \neq 0,$$

por lo cual A , B y C son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 . Por esto el corolario 3.2 se infiere del corolario 3.1.

Bibliografía

- [1] BALL, W. W. Rouse. *Mathematical Recreations and Essays*. Eleventh Edition. London, Macmillan & Co Ltda., New York - St Martin's Press, 1959.
- [2] BIRKHOFF G., Mac Lane S. *A brief Survey of Modern Algebra*. Second Edition. New York: The Macmillan Company, 1.965.
- [3] _____ . *Algebra*. Fourth Printing, 1.970.
- [4] COXETER, H.S.M. *Introduction to Geometry*. Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. Wiley Classics Library Edition Published, 1989.
- [5] ROCKAFELLAR, Ralph T. *Convex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1972.