Soluciones por ondas viajeras, y soluciones exactas de ecuaciones en derivadas parciales

Cesar Gomez
Profesor Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
cagomezsi@unal.edu.co

Resumen

En este trabajo, consideramos algunos de los métodos utilizádos en la obtención de soluciones exactas para ecuaciones diferenciales parciales no lineales, los cuales utilizan la transformación de onda. Con el fin de ilustrar los métodos, obtenemos soluciones exactas del nuevo sistema de Mikhailov–Novikov–Wang.
Key words: Ecuaciones diferenciales parciales no lineales; Soluciones por ondas viajeras; Método proyectivo de ecuaciones de Riccati; Método de la tanh generalizado; Método tanh-coth ; Método tanh-coth extendido.

Introducción

Uno de los principales objetivos de este trabajo tiene que ver con las así llamadas ondas viajeras. Sabemos que las ondas estan en casi todas partes, reconozcamos o no, encontramos ondas a diario. Ondas de sonido, ondas de radio, ondas de agua etc. Además de las ondas, existen una gran variedad de fenómenos físicos, de tal manera que podemos describirlos como si fueran ondas, como el movimiento de un péndulo, el movimiento de una masa suspendidad de un resorte entre otros.

Podemos describir una onda como una disturbancia que viaja a través de un medio de un lugar a otro. Se dice que las ondas son un fenómeo de transporte de energía. Las ondas pueden ser caracterizadas de muchas formas, ellas pueden ser distinguidas unas de otras a travéz de una característica observable (o no observable). Asi por ejemplo, podemos hablar de ondas transversales, en el cual las partículas del medio se mueven en direccion perpendicular a la cual se mueve la onda. Una onda longitudinal e una onda en la cual la particula del medio se mueve en la dirección paralela a la cual se mueve la onda, por ejemplo la onda de sonido. Las ondas electromagneticas son capaces de transmitir su energía a travéz del espacio vacio, como las ondas de luz. Las ondas mecánicas requieren de un medio a fin de transportar su energía de un medio a otro, como las ondas de agua.

Algunas características asociadas a las ondas son: La cresta, el valle o canal, la amplitud (máxima elevación de la cresta); la longitud de onda (longitud de un ciclo completo de onda). Otras características importantes que pueden ser asociadas a las ondas son: Frecuencia de onda (que tan rapido vibran las patículas del medio cuando la onda pasa), el periodo de la onda (el tiempo para que una partícula realice un ciclo de vibración completa); más exactamente, el periodo es el recíproco de la frecuencia ($T = \frac{1}{f}$). La velocidad de onda, hace referencia a la distancia recorrida por esta, por unidad de tiempo, asi, si el sonido viaja a 340 $\frac{m}{s}$, la velocidad de la onda es precisamente esta. Podemos decir entonces que la velocidad de onda v puede obtenerse como la longitud de onda λ sobre el periodo T ($v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$). Finalmete, cuando una onda viaja a travéz del medio (como una onda de agua), se dice que es una onda viajera (traveling wave), pero cuando la onda está sometida a un espacio dado (por ejemplo cuando se pone a vibrar la cuerda de una guitarra) se obtienen otro tipo de ondas que se llaman estacionarias.

Finalmente, podemos referirnos a ondas lineales (luz, sonido) las cuales tienen velocidad constante y, además, obedecen al llamado principio de superposición (al tocar varias notas al tiempo en un instrumento musical, se escuchará la suma de ellas (armonía)). La ondas no lineales (por ejemplo una onda en el mar), no son tan comunes como las lineales, en estas, la amplitud, la longitud de onda y la velocidad van variando a medida que avanza la onda (en las lineales, estas variables son constantes). Observese por ejemplo como una onda en el mar, la distancia entre las crestas va decreciendo, entre mas adentro del mar esté la onda, esta crece mas, y la velocidad cambia. Si lanzamos una piedra al centro de un estanque, podemos ver lo que sucede, es decir, se forman pequeñas ondulaciones, que se van extendiendo y ensanchando en círculos concéntricos, cada vez más débiles, hasta que desaparecen. Se puede observar que estas ondas tienen cumbres y valles. Sin embargo, en un experimento hecho por el ingeniero escocés John Scott Russell en 1834, que consistía en una barcaza rodando por una canal de agua, cuando la barcaza se detuvo repentinamente, ocasionó un movimiento violento del agua, que produjo una ola en la proa de la nave que fue deslizandose a gran velocidad hacia adelante, formando una única ondulación de gran altura (una montaña de agua) que continuó su recorrido por el canal sin variar aparentmente su forma o reducir su velocidad (onda solitaria) (Russell llamó esta onda *great wave of translation*). Al comienzo, varios científicos de la época, argumentaron que las ondas permanentes no podían existir. Sólo hasta 1870 J. Boussinesq y Lord Rayleigh, dedujeron que la la amplitud de dicha great wave of translation debía ser una onda viajera proporcional a sech^2, teniendo de ésta manera una localización exponencial (Boussinesq derivó la ecuación difeencial parcial no lineal que lleva su nombre). Sin embargo, sĺo hasta 1895, Diederick Johannes Korteweg y su alumno Gustav de Vries presentaron la NLPDE (que lleva su nombre Korteweg -de Vries) y que describe este fenómeno $u_t + u_{xxx} - \alpha u u_x = 0$ donde el segundo término es el de dispersión y el el tecero es el no lineal. Una solución Solitoón es $u(x,t) = -\frac{12}{\alpha} a^2 \text{sech}^2(a(x - 4a^2 t - x_0))$, donde α y x_0 son constantes arbitrarias. Esta ecuación, no solo contení a a la great wave of translation, sino que hoy es fundamental en muchos campos de la física matemática y biología molecular. Los solitones, han venido tomando fundamental importancia en muchas ramas de la ciencia moderna: física, química, biología, etc. Se ha descubierto (1965 Norman Zabusky y Martin Kruskal), usando un modelo discreto (parecido a la ecuación KdV), un tipo de ondas localizadas muy especiales, que exhibian un comportamiento tipo partícula. (Cuando dos de estan ondas interactuan, salen de su colisión con su forma intacta salvo un pequeño cambio de fase); las llamaron ondas solitónicas, que fue necesario cambiarlo por soliton, término que fue escogido para estar en concordancia con el nombre de otras partículas elementales tales como electrón, protón, fotón, etc.

Existen muchas definiciones de soliton (que en esencia todas representan el concepto inicial) dependiendo del campo de trabajo. Tomaremos como definición la siguiente:

Un solitón es una onda solitaria que preserva asintóticamente su forma y velocidad en interacciones no lineales con otras ondas solitarias o con otras perturbaciones lcalizadas.

Hoy, existen otros modelos matemáticos que exiben solitones en sus soluciones. Se han descubierto solitones en medios líquidos, gaseosos, corriente eléctrica, campos electromagneticos, atmósfera de los planetas, cristales, plasmas, fibras de vidrio, redes nerviosas, aparatos electrónicos, biología molecular etc. Asi por ejemplo, la estructura actual de un solitón, en biología molecular, está formado por un electrón rodeado de otras partículas llamadas fonones. Así como un fonón es una partícula de energía luminosa, un solitonón es una partícula de energía vibratoria. Un estudio reciente, sugiere que el electrón (visto como onda) dentro de un solitón, puede tener diferentes estados de energía de modo semejante al electrón en un átomo de hidrógeno. Se conoce que tales estructuras electrónicas internas existen en todos los átomos, pero esta es la primera vez que se ha demostrado que tales estructuras existes en un solitón. Las propiedades de las mecánica cuántica de un solitón, incluyendo estos estados energéticos, son importantes, porque afectan a la forma en que la partícula transporta una carga a travéz de materiales orgánicos como los polímeros conductores a nivel molecular. (se sospecha que los solitones atraviesan, como fantasmas, la estructura de las moléculas). Por ejemplo en fibras opticas, la estructura de las ondas normales de luz se debilitan gradualmente, y salvo que sean amplificadas periódicamente, desaparecen. Por el contrario, las ondas de luz de los solitones mantienen su estructura y continuan viajando sin ayuda. Algunas compañnias de telecomunicaciones aprovechan esta propiedad, usando los solitones para enviar senñales a largas distancias con bajo costo. Debido a que las cadenas de polímeros tienden a doblarse y torcerse cuando son atravesadas por los solitones, puede ser posible usar a los solitones para activar los musculos artificiales de robots de alta tecnología. Es decir, si se hacen los músculos de los robots de polímeros orgánicos, estos se flexionarian ante estímulos luminosos o electroquímicos. El estudio a fondo de los solitones, tiene una amplia gama de importantes aplicaciones científicas. Uno de los objetivos de este trabajo, es ver como usar ciertas técnicas, para obtener solitones en muchos modelos, especialmente de la fíca matemática. Esto permite obtener diversas clases de solitones, obteniéndose clasificaciones de ellos, lo que permite un conocimiento mayor de esta "nueva"estructura.

1. Soluciones por ondas viajeras de NLPDE

Existe un número de métodos, para encontrar soluciones exactas de NLPDE, que están basados en la reducción de la ecuación original a otra ecuación con menos variables (dependientes o independientes). La idea es encontrar tales variables, y pasando a ellas, obtener ecuaciones simples. En particular, encontrar soluciones exactas de una ecuación diferencial parcial en dos variables, una dependiente y una independiente, puede ser reducido a encontrar soluciones de una ecuación (o sistema) de ecuaciones ordinarias. Naturalmente, éste método no da todas las soluciones de la ecuación origial, pero si se puede obtener una clase de soluciones con algunas propiedades especiales. Los métodos aquí expuestos, pertenecen precisamente a esta clase.

1.1. Los métodos

Consideremos una NLPDE

digamos en dos variables (x, t)

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots) = 0. \tag{1.1}$$

. Usando la tranformación conocida como tranformación de onda,

$$u(x, t) = v(\xi), \quad \xi = x + \lambda t, \tag{1.2}$$

la ecuación (1.1) se reduce a una ecuación ordinaria

$$P(v, v', v'', \ldots) = 0. \tag{1.3}$$

1. El método proyectivo de ecuaciones de Riccati

   Este método consiste en suponer una solución de 1.3 de la forma

$$v(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^{M} \sigma^{i-1}(\xi)(a_i\sigma(\xi) + b_i\tau(\xi)), \tag{1.4}$$

   donde $\sigma(\xi)$, $\tau(\xi)$ satisfacen el sistema

$$\begin{cases} \sigma'(\xi) = e\sigma(\xi)\tau(\xi) \\ \tau'(\xi) = e\tau^2(\xi) - \mu\sigma(\xi) + r, \end{cases} \tag{1.5}$$

   con primera integral

$$\tau^2 = -e[r - 2\mu\sigma(\xi) + \frac{\mu^2 + \rho}{r}\sigma^2(\xi)], \tag{1.6}$$

   y $\rho = \pm 1$, $e = \pm 1$, μ, r constantes, y usar el hecho que las soluciones de 1.5 son

   a) Caso I:
   Si $r = \mu = 0$ entonces

$$\tau_1(\xi) = -\frac{1}{e\xi}, \quad \sigma_1(\xi) = \frac{C}{\xi}. \tag{1.7}$$

   b) Caso II:
   Si $e = 1$ y $\rho = -1$

$$\begin{cases} \tau_2 = \dfrac{\sqrt{r}\tan(\sqrt{r}\xi)}{\mu\sec(\sqrt{r}\xi) + 1} & (r > 0) \\ \sigma_2 = \dfrac{r\sec(\sqrt{r}\xi)}{\mu\sec(\sqrt{r}\xi) + 1} & (r > 0). \end{cases} \tag{1.8}$$

   c) Caso III:
   Si $e = -1$ y $\rho = -1$

$$\begin{cases} \tau_3 = \dfrac{\sqrt{r}\tanh(\sqrt{r}\xi)}{\mu\mathrm{sech}(\sqrt{r}\xi) + 1} & (r > 0) \\ \sigma_3 = \dfrac{r\mathrm{sech}(\sqrt{r}\xi)}{\mu\mathrm{sech}(\sqrt{r}\xi) + 1} & (r > 0). \end{cases} \tag{1.9}$$

   d) Caso IV:
   Si $e = -1$ y $\rho = 1$

$$\begin{cases} \tau_4 = \dfrac{\sqrt{r}\coth(\sqrt{r}\xi)}{\mu\mathrm{csch}(\sqrt{r}\xi) + 1} & (r > 0) \\ \sigma_4 = \dfrac{r\,\mathrm{csch}(\sqrt{r}\xi)}{\mu\,\mathrm{csch}(\sqrt{r}\xi) + 1} & (r > 0). \end{cases} \tag{1.10}$$

e) Caso V:
Si $e = 1$ y $\rho = 1$

$$\begin{cases} \tau_5 = \dfrac{-\sqrt{-r}\coth(\sqrt{-r}\xi)}{\mu \mathrm{csch}(\sqrt{-r}\xi)+1} & (r<0) \\ \sigma_5 = \dfrac{r\,\mathrm{csch}(\sqrt{-r}\xi)}{\mu\ \mathrm{csch}(\sqrt{-r}\xi)+1} & (r<0). \end{cases} \tag{1.11}$$

el entero M debe ser determinado por balanceo en 1.3. Sustituyendo 1.4 en 1.3, y usando 1.5 y 1.6, se obtiene un sistema de ecuaciones, en el cual las variables μ, r, λ, a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots, M)$ se obtienen , y con esto, usando nuevamente 1.4 se obtiene las soluciones de 1.3, y usando 1.2, soluciones de 1.1.

2. El método generalizado de la tangente hiperbólica.

   Este método, consite en suponer una solución de 1.3 de la forma

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^{m} a_k \phi^k(\xi), \tag{1.12}$$

   donde $\phi(\xi)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\phi'(\xi) = \phi^2(\xi) + k, \tag{1.13}$$

   cuyas soluciones son

$$\phi(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{\xi}, & k = 0 \\ \sqrt{k}\tan(\sqrt{k}\xi) & k > 0 \\ -\sqrt{k}\cot(\sqrt{k}\xi) & k > 0 \\ -\sqrt{-k}\tanh(\sqrt{-k}\xi) & k < 0 \\ -\sqrt{-k}\coth(\sqrt{-k}\xi) & k < 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

   El procedimiento a seguir es semejante al método anterior.

3. El método generalizado de sech-csch.

   Este método consiste, en suponer una solución de 1.3 en la forma

$$\sum_{i=0}^{M} a_i \phi(\xi)^i + \sum_{M+1}^{2M} a_i \phi(\xi)^{M-i}, \tag{1.15}$$

   , donde $\phi(\xi)$ es solución de la ecuación de Riccati

$$\phi'(\xi) = \mu(\phi(\xi)^2 + k), \tag{1.16}$$

   k, μ constantes, y cuyas soluciones son dadas por

$$\phi(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{\mu\xi}, & k = 0 \\ \sqrt{k}\tan(\mu\sqrt{k}\xi) & k > 0 \\ -\sqrt{k}\cot(\mu\sqrt{k}\xi) & k > 0 \\ -\sqrt{-k}\tanh(\mu\sqrt{-k}\xi) & k < 0 \\ -\sqrt{-k}\coth(\mu\sqrt{-k}\xi) & k < 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

   El proceso a seguir es como en los métodos anteriores.

2. El sistema de Mikhailov–Novikov–Wang

Es dado por

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxxx} - 20uu_{xxx} - 50u_xu_{xx} + 80u^2u_x + w_x \\ w_t = -6wu_{xxx} - 2u_{xx}w_x + 96wuu_x + 16w_xu^2. \end{cases} \tag{2.18}$$

Buscamos soluciones de este sistema en la forma

$$\begin{cases} u(x,t) = v(\xi) \\ w(x,t) = w(\xi) \\ \xi = x + \lambda t, \end{cases} \tag{2.19}$$

obteniendo el sistema

$$\begin{cases} \lambda v'(\xi) - v^{(5)}(\xi) + 20v(\xi)v^{(3)}(\xi) + 50v'(\xi)v''(\xi) - 80v^2(\xi)v'(\xi) - w'(\xi) = 0 \\ \lambda w'(\xi) + 6w(\xi)v'''(\xi) + 2v''(\xi)w'(\xi) - 96w(\xi)v(\xi)v'(\xi) - 16w'(\xi)v^2(\xi) = 0, \end{cases} \tag{2.20}$$

de donde

$$w'(\xi) = \lambda v'(\xi) - v^{(5)}(\xi) + 20v(\xi)v^{(3)}(\xi) + 50v'(\xi)v''(\xi) - 80v^2(\xi)v'(\xi). \tag{2.21}$$

La primera ecuación del sistema de ecuaciones ordinarias puede escribirse como

$$(\lambda v(\xi) - v^{(4)}(\xi) + 20v(\xi)v''(\xi) + 15((v'(\xi))^2) - \frac{80}{3}(v^3(\xi)) - w(\xi))' = 0, \tag{2.22}$$

la cual integramos una vez respecto a ξ para obtener

$$\lambda v(\xi) - v^{(4)}(\xi) + 20v(\xi)v''(\xi) + 15(v'(\xi))^2 - \frac{80}{3}v^3(\xi) - w(\xi) = c, \tag{2.23}$$

donde c es la constante de integracion. Como buscamos soluciones exactas, hacemos $c = 0$. Por lo tanto

$$w(\xi) = \lambda v(\xi) - v^{(4)}(\xi) + 20v(\xi)v''(\xi) + 15(v'(\xi))^2 - \frac{80}{3}v^3(\xi). \tag{2.24}$$

Finalmente, podemos obtener la ecuación diferencial ordianria

$$\begin{cases} \lambda^2 v'(\xi) - \lambda v^{(5)} + 26\lambda v(\xi)v'''(\xi) + 52\lambda v'(\xi)v''(\xi) - 192\lambda v^2(\xi)v'(\xi) - 2v''(\xi)v^{(5)}(\xi) + \\ 160v(\xi)v''(\xi)v'''(\xi) + 100v'(\xi)(v''(\xi))^2 - 2880v^2(\xi)v'(\xi)v''(\xi) + \\ 16v^2(\xi)v^{(5)} - 480v^3(\xi)v'''(\xi) + 3840v^4(\xi)v'(\xi) - 6v'''(\xi)v^{(4)} + 90(v'(\xi))^2v'''(\xi) + \\ 96v(\xi)v'(\xi)v^{(4)} - 1440v(\xi)(v'(\xi))^3 = 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

- Aplicando el método proyectivo de ecuaciones de Riccati, buscamos soluciones de esta última ecuación en la forma

  $$v(\xi) = a_0 + a_1\sigma(\xi) + b_1\tau(\xi), \tag{2.26}$$

  Resolviendo el sistema algebraico que resulta, respecto de las variables r, a_0, a_1, b_1 y μ , encontramos las soluciones:
  Con $\mu^2 + \rho = 0$, $\rho = \pm 1$

1. $e = 1$ $a_1 = \frac{3}{8}\mu$, $a_0 = \pm\frac{\sqrt{\lambda}}{4}$, $r = \mp 4\sqrt{\lambda}$, $b_1 = 0$
2. $e = -1$, $\mu = i$, $a_1 = -\frac{3}{8}i$, $a_0 = \pm\frac{\sqrt{\lambda}}{4}$, $r = \pm 4\sqrt{\lambda}$, $b_1 = 0$.
3. $e = -1$, $\mu = -i$, $a_1 = \frac{3}{8}i$, $a_0 = \pm\frac{\sqrt{\lambda}}{4}$, $r = \pm 4\sqrt{\lambda}$, $b_1 = 0$.

Para los siguientes valores,

e	μ	ρ	$v(\xi)$
1	1	-1	$-\frac{\sqrt{\lambda}}{4} + \frac{3\sqrt{\lambda}\sec(2\lambda^{\frac{1}{4}}\xi)}{2(\sec(2\lambda^{\frac{1}{4}}\xi)+1)}$
1	-1	-1	$-\frac{\sqrt{\lambda}}{4} - \frac{3\sqrt{\lambda}\sec(2\lambda^{\frac{1}{4}}\xi)}{2(1-\sec(2\lambda^{\frac{1}{4}}\xi))}$
-1	-1	-1	$\frac{\sqrt{\lambda}}{4} + \frac{3\sqrt{\lambda}\text{sech}(2\lambda^{\frac{1}{4}}\xi)}{2(1-\text{sech}(2\lambda^{\frac{1}{4}}\xi))}$
-1	1	-1	$\frac{\sqrt{\lambda}}{4} - \frac{3\sqrt{\lambda}\text{sech}(2\lambda^{\frac{1}{4}}\xi)}{2(1+\text{sech}(2\lambda^{\frac{1}{4}}\xi))}$

las soluciones del sistema vienen dadas por

$$\begin{cases} u_1(x,t) = -\dfrac{\sqrt{\lambda}}{4} + \dfrac{3\sqrt{\lambda}\sec(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))}{2(\sec(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))+1)} \\ w_1(x,t) = \dfrac{\lambda^{\frac{3}{2}}\cos^4(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))\sec^5(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))}{192(1+\sec(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)))^5}(320+ \\ 480\cos(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) + 192\cos(4\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) + 32\cos(6\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))) = \\ \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6} \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\begin{cases} u_2(x,t) = -\dfrac{\sqrt{\lambda}}{4} - \dfrac{3\sqrt{\lambda}\sec(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))}{2(1-\sec(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)))} \\ w_2(x,t) = \dfrac{\lambda^{\frac{3}{2}}\sec^5(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))\sin^4(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))}{192(-1+\sec(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)))^5}(320- \\ 480\cos(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) + 192\cos(4\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) - 32\cos(6\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))) = \\ \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6} \end{cases} \tag{2.28}$$

$$\begin{cases} u_3(x,t) = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{4} + \dfrac{3\sqrt{\lambda}\text{sech}(2\lambda^{\frac{1}{4}}\xi)}{2(1-\text{sech}(2\lambda^{\frac{1}{4}}\xi))} \\ w_3(x,t) = \dfrac{\lambda^{\frac{3}{2}}\text{sech}^5(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))\sinh^4(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))}{192(-1+\text{sech}(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)))^5}(-320+ \\ 480\cosh(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) - 192\cosh(4\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) + 32\cosh(6\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))) = \\ -\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6} \end{cases} \tag{2.29}$$

$$\begin{cases} u_4(x,t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{4} - \frac{3\sqrt{\lambda}\operatorname{sech}(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))}{2(1+\operatorname{sech}(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)))} \\ w_4(x,t) = \dfrac{\lambda^{\frac{3}{2}}\operatorname{sech}^5(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))\cosh^4(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))}{192(1+\operatorname{sech}(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)))^5}(-320- \\ 480\cosh(2\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) - 192\cosh(4\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) - 32\cosh(6\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))) = \\ -\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6}. \end{cases} \tag{2.30}$$

- Aplicando el método de la tanh generalizado, buscamos soluciones de (2.25) en la forma

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^{m} a_k \phi^k(\xi), \tag{2.31}$$

con $m = 2$. Obtenemos el sistema

1. $-16\,k^3\,\lambda\,a_1 + k\,\lambda^2\,a_1 + 52\,k^2\,\lambda\,a_0\,a_1 + 256\,k^3\,{a_0}^2\,a_1 - 192\,k\,\lambda\,{a_0}^2\,a_1 - 960\,k^2\,{a_0}^3\,a_1 + 3840\,k\,{a_0}^4\,a_1 + 180\,k^4\,{a_1}^3 - 1440\,k^3\,a_0\,{a_1}^3 - 256\,k^5\,a_1\,a_2 + 104\,k^3\,\lambda\,a_1\,a_2 + 2176\,k^4\,a_0\,a_1\,a_2 - 5760\,k^3\,{a_0}^2\,a_1\,a_2 + 400\,k^5\,a_1\,{a_2}^2 = 0.$
2. $-136\,k^2\,\lambda\,a_1 + \lambda^2\,a_1 + 208\,k\,\lambda\,a_0\,a_1 + 2176\,k^2\,{a_0}^2\,a_1 - 192\,\lambda\,{a_0}^2\,a_1 - 3840\,k\,{a_0}^3\,a_1 + 3840\,{a_0}^4\,a_1 + 3912\,k^3\,{a_1}^3 - 192\,k\,\lambda\,{a_1}^3 - 18720\,k^2\,a_0\,{a_1}^3 + 23040\,k\,{a_0}^2\,{a_1}^3 - 5824\,k^4\,a_1\,a_2 + 1196\,k^2\,\lambda\,a_1\,a_2 + 37120\,k^3\,a_0\,a_1\,a_2 - 1152\,k\,\lambda\,a_0\,a_1\,a_2 - 66240\,k^2\,{a_0}^2\,a_1\,a_2 + 46080\,k\,{a_0}^3\,a_1\,a_2 - 15840\,k^3\,{a_1}^3\,a_2 + 22048\,k^4\,a_1\,{a_2}^2 - 51840\,k^3\,a_0\,a_1\,{a_2}^2 = 0.$
3. $-256\,k^4\,{a_1}^2 + 156\,k^2\,\lambda\,{a_1}^2 + 2688\,k^3\,a_0\,{a_1}^2 - 384\,k\,\lambda\,a_0\,{a_1}^2 - 8640\,k^2\,{a_0}^2\,{a_1}^2 + 15360\,k\,{a_0}^3\,{a_1}^2 - 1440\,k^3\,{a_1}^4 - 272\,k^3\,\lambda\,a_2 + 2\,k\,\lambda^2\,a_2 + 416\,k^2\,\lambda\,a_0\,a_2 + 4352\,k^3\,{a_0}^2\,a_2 - 384\,k\,\lambda\,{a_0}^2\,a_2 - 7680\,k^2\,{a_0}^3\,a_2 + 7680\,k\,{a_0}^4\,a_2 + 5136\,k^4\,{a_1}^2\,a_2 - 20160\,k^3\,a_0\,{a_1}^2\,a_2 - 2624\,k^5\,{a_2}^2 + 208\,k^3\,\lambda\,{a_2}^2 + 8192\,k^4\,a_0\,{a_2}^2 - 11520\,k^3\,{a_0}^2\,{a_2}^2 + 800\,k^5\,{a_2}^3 = 0.$
4. ${a_1}^4 - 1232\,k^2\,\lambda\,a_2 + 2\,\lambda^2\,a_2 + 1040\,k\,\lambda\,a_0\,a_2 + 19712\,k^2\,{a_0}^2\,a_2 - 384\,\lambda\,{a_0}^2\,a_2 - 19200\,k\,{a_0}^3\,a_2 + 7680\,{a_0}^4\,a_2 + 51344\,k^3\,{a_1}^2\,a_2 - 768\,k\,\lambda\,{a_1}^2\,a_2 - 146880\,k^2\,a_0\,{a_1}^2\,a_2 + 92160\,k\,{a_0}^2\,{a_1}^2\,a_2 - 26176\,k^4\,{a_2}^2 + 1456\,k^2\,\lambda\,{a_2}^2 + 71168\,k^3\,a_0\,{a_2}^2 - 768\,k\,\lambda\,a_0\,{a_2}^2 - 80640\,k^2\,{a_0}^2\,{a_2}^2 + 30720\,k\,{a_0}^3\,{a_2}^2 - 48960\,k^3\,{a_1}^2\,{a_2}^2 + 21152\,k^4\,{a_2}^3 - 34560\,k^3\,a_0\,{a_2}^3 = 0.$
5. $-240\,k\,\lambda\,a_1 + 156\,\lambda\,a_0\,a_1 + 3840\,k\,{a_0}^2\,a_1 - 2880\,{a_0}^3\,a_1 + 14112\,k^2\,{a_1}^3 - 192\,\lambda\,{a_1}^3 - 38880\,k\,a_0\,{a_1}^3 + 23040\,{a_0}^2\,{a_1}^3 + 3840\,k\,{a_1}^5 - 27008\,k^3\,a_1\,a_2 + 2392\,k\,\lambda\,a_1\,a_2 + 122624\,k^2\,a_0\,a_1\,a_2 - 1152\,\lambda\,a_0\,a_1\,a_2 - 132480\,k\,{a_0}^2\,a_1\,a_2 + 46080\,{a_0}^3\,a_1\,a_2 - 92640\,k^2\,{a_1}^3\,a_2 + 76800\,k\,a_0\,{a_1}^3\,a_2 + 151168\,k^3\,a_1\,{a_2}^2 - 960\,k\,\lambda\,a_1\,{a_2}^2 - 296640\,k^2\,a_0\,a_1\,{a_2}^2 + 115200\,k\,{a_0}^2\,a_1\,{a_2}^2 - 57600\,k^3\,a_1\,{a_2}^3 = 0.$
6. $-1856\,k^3\,{a_1}^2 + 416\,k\,\lambda\,{a_1}^2 + 12928\,k^2\,a_0\,{a_1}^2 - 384\,\lambda\,a_0\,{a_1}^2 - 23040\,k\,{a_0}^2\,{a_1}^2 + 15360\,{a_0}^3\,{a_1}^2 - 11040\,k^2\,{a_1}^4 + 15360\,k\,a_0 - 120\,\lambda\,a_1 + 1920\,{a_0}^2\,a_1 + 17464\,k\,{a_1}^3 - 21600\,a_0\,{a_1}^3 + 3840\,{a_1}^5 - 49664\,k^2\,a_1\,a_2 + 1300\,\lambda\,a_1\,a_2 + 144128\,k\,a_0\,a_1\,a_2 - 72000\,{a_0}^2\,a_1\,a_2 - 147360\,k\,{a_1}^3\,a_2 + 76800\,a_0\,{a_1}^3\,a_2 + 356320\,k^2\,a_1\,{a_2}^2 - 960\,\lambda\,a_1\,{a_2}^2 - 466560\,k\,a_0\,a_1\,{a_2}^2 + 115200\,{a_0}^2\,a_1\,{a_2}^2 + 53760\,k\,{a_1}^3\,{a_2}^2 - 265920\,k^2\,a_1\,{a_2}^3 + 107520\,k\,a_0\,a_1\,{a_2}^3 = 0.$
7. $-4288\,k^2\,{a_1}^2 + 260\,\lambda\,{a_1}^2 + 18304\,k\,a_0\,{a_1}^2 - 14400\,{a_0}^2\,{a_1}^2 - 19680\,k\,{a_1}^4 + 15360\,a_0\,{a_1}^4 - 1680\,k\,\lambda\,a_2 + 624\,\lambda\,a_0\,a_2 + 26880\,k\,{a_0}^2\,a_2 - 11520\,{a_0}^3\,a_2 + 142928\,k^2\,{a_1}^2\,a_2 - 768\,\lambda\,{a_1}^2\,a_2 - 256320\,k\,a_0\,{a_1}^2\,a_2 + 92160\,{a_0}^2\,{a_1}^2\,a_2 + 23040\,k\,{a_1}^4\,a_2 - 87680\,k^3\,{a_2}^2 + 2496\,k\,\lambda\,{a_2}^2 + 185856\,k^2\,a_0\,{a_2}^2 - 768\,\lambda\,a_0\,{a_2}^2 - 138240\,k\,{a_0}^2\,{a_2}^2 + 30720\,{a_0}^3\,{a_2}^2 - 247680\,k^2\,{a_1}^2\,{a_2}^2 + 138240\,k\,a_0\,{a_1}^2\,{a_2}^2 + 116736\,k^3\,{a_2}^3 - 384\,k\,\lambda\,{a_2}^3 - 172800\,k^2\,a_0\,{a_2}^3 + 46080\,k\,{a_0}^2\,{a_2}^3 - 23040\,k^3\,{a_2}^4 = 0.$

8. $-4032\,k\,a_1{}^2 + 8064\,a_0\,a_1{}^2 - 10080\,a_1{}^4 - 720\,\lambda\,a_2 + 11520\,a_0{}^2\,a_2 + 153392\,k\,a_1{}^2\,a_2 - 129600\,a_0\,a_1{}^2\,a_2 + 23040\,a_1{}^4\,a_2 - 133248\,k^2\,a_2{}^2 + 1248\,\lambda\,a_2{}^2 + 192000\,k\,a_0\,a_2{}^2 - 69120\,a_0{}^2\,a_2{}^2 - 365760\,k\,a_1{}^2\,a_2{}^2 + 138240\,a_0\,a_1{}^2\,a_2{}^2 + 246144\,k^2\,a_2{}^3 - 384\,\lambda\,a_2{}^3 - 253440\,k\,a_0\,a_2{}^3 + 46080\,a_0{}^2\,a_2{}^3 + 61440\,k\,a_1{}^2\,a_2{}^3 - 99840\,k^2\,a_2{}^4 + 30720\,k\,a_0\,a_2{}^4 = 0.$
9. $-12096\,a_1\,a_2 + 119808\,a_1\,a_2{}^2 - 164160\,a_1\,a_2{}^3 + 34560\,a_1\,a_2{}^4 = 0.$
10. $7084\,a_1{}^3 - 40320\,k\,a_1\,a_2 + 56448\,a_0\,a_1\,a_2 - 70560\,a_1{}^3\,a_2 + 346608\,k\,a_1\,a_2{}^2 - 221760\,a_0\,a_1\,a_2{}^2 + 53760\,a_1{}^3\,a_2{}^2 - 372480\,k\,a_1\,a_2{}^3 + 107520\,a_0\,a_1\,a_2{}^3 + 34560\,k\,a_1\,a_2{}^4 = 0.$
11. $-25920\,a_2{}^2 + 73440\,a_2{}^3 - 57600\,a_2{}^4 + 7680\,a_2{}^5 = 0$
12. $-1344\,a_1{}^2 + 56672\,a_1{}^2\,a_2 - 95040\,k\,a_2{}^2 + 69120\,a_0\,a_2{}^2 - 167040\,a_1{}^2\,a_2{}^2 + 223200\,k\,a_2{}^3 - 115200\,a_0\,a_2{}^3 + 61440\,a_1{}^2\,a_2{}^3 - 134400\,k\,a_2{}^4 + 30720\,a_0\,a_2{}^4 + 7680\,k\,a_2{}^5 = 0.$

Resolviendo respecto a k, λ, a_0, a_1, a_2, obtenemos

$a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $k = \pm\sqrt{\lambda}$, $a_0 = \pm\frac{\sqrt{\lambda}}{2}$.

(otras soluciones del sistema son $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, k, λ, a_0 constantes arbitrarias. Pero este caso no es interesante).

Consideramos unicamente las siguientes soluciones para (2.25) For $\lambda > 0$,

1. $v_1(\xi) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\cot^2(\lambda^{\frac{1}{4}}\xi)$.
2. $v_2(\xi) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\coth^2(\lambda^{\frac{1}{4}}\xi)$.
3. $v_3(\xi) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\tan^2(\lambda^{\frac{1}{4}}\xi)$.
4. $v_4(\xi) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\tanh^2(\lambda^{\frac{1}{4}}\xi)$.

Finalmente las soluciones del sistema (M-N-W) son

1. $u_1(x,t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\cot^2(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))$
   $w_1(x,t) = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6}$
2. $u_2(x,t) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\coth^2(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))$.
   $w_2(x,t) = -\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6}$
3. $u_3(x,t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\tan^2(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))$.
   $w_3(x,t) = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6}$
4. $u_4(x,t) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\tanh^2(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t))$.
   $w_4(x,t) = -\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6}$

- Aplicando el método general de la tanh-cotah, encontramos las soluciones del sistema (M-N-W)
  - For $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $k > 0$

$$\begin{cases} u_1(\xi) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{3\sqrt{\lambda}}{4}\cot^2(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) \\ w_1(x,t) = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6} \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\begin{cases} u_2(x,t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{3\sqrt{\lambda}}{4}\tan^2(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) \\ w_2(x,t) = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6} \end{cases} \tag{2.33}$$

$$\begin{cases} u_3(x,t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{8} + \frac{3\sqrt{\lambda}}{16}\tan^2(\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) + \frac{3\sqrt{\lambda}}{16}\cot^2(\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) \\ w_3(x,t) = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6} \end{cases} \tag{2.34}$$

- For $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $k < 0$

$$\begin{cases} u_4(x,t) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{3\sqrt{\lambda}}{4}\coth^2(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) \\ w_4(x,t) = -\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6} \end{cases} \tag{2.35}$$

$$\begin{cases} u_5(x,t) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{3\sqrt{\lambda}}{4}\tanh^2(\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) \\ w_5(x,t) = -\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6} \end{cases} \tag{2.36}$$

$$\begin{cases} u_6(x,t) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{8} + \frac{3\sqrt{\lambda}}{16}\tanh^2(\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) + \frac{3\sqrt{\lambda}}{16}\coth^2(\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{4}}(x+\lambda t)) \\ w_6(x,t) = -\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6} \end{cases} \tag{2.37}$$

Bibliografía

[1] R. Conte & M. Musette , *Link betwen solitary waves and projective Riccati equations*,J. Phys. A Math. **25** (1992), 5609-5623.

[2] E. Inc & M. Ergüt, *New Exact Tavelling Wave Solutions for Compound KdV-Burgers Equation in Mathematical Physics*, Applied Mathematics E-Notes, **2**(2002), 45-50.

[3] J. Mei, H. Zhang & D. Jiang, *New exact solutions for a Reaction-Diffusion equation and a Quasi-Camassa-Holm Equation*, Applies Mathematics E-Notes, **4**(2004), 85-91.

[4] Z. Yan, *The Riccati equation with variable coefficients expansion algorithm to find more exact solutions of nonlinear differential equation*, MMRC, AMSS, Academis Sinica, Beijing **22**(2003), 275-284.

[5] Z. Yan, *An improved algebra method and its applications in nonlinear wave euations*, MM-RC, AMSS, Academis Sinica, Beijing **22**(2003), 264-274.

[6] W.Hereman, *Symbolic computation of exact solutions expressible in hyperbolic and elliptic functions for nonlinear partial differential and diffential-difference equations*, Journal of Symbolic Computation.

[7] A. Salas & C. Gomez, *El mathematica en la busqueda de soluciones exactas para ecuaciones differenciales parciales lineales y no lineales*, Primer Simposio Intrnacional del uso de Tecnologias en eduación matemática. Universidad Pedagógica Nacional **1**(2005).

[8] N.A. Kudryashov , *Nonlinear differential equations with exact solutions expressed via the Weierstrass function*, arXiv:nlin.CD/0312035 **1**(2003)v1.16 Dic 2003.