Una serie para el seno: el aporte de la India

Óscar Jaime Molina
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
ojmolina@pedagogica.edu.co

José Leonardo Ángel Bautista
Profesor Asistente-Estudiante Universidad de los Andes
Bogotá D.C, Colombia
l.angel76@uniandes.edu.co

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Grupo de Álgebra
Bogotá D.C, Colombia
caluque@pedagogica.edu.co

Resumen

Las series se han constituido en una importante herramienta para el análisis de algunas funciones trascendentes entre ellas las trigonométricas, ya que las dotan de una representación ostensible y manejable; no obstante, algunos de los mecanismos actuales que permiten obtener tales representaciones, como los polinomios de Taylor y Maclaurin, se valen de conceptos como el límite y la derivada, que históricamente aparecieron después de que algunas de dichas series ya se hubieran obtenido. En este sentido el escrito presenta, en contraste con los tratamientos basados en dichos conceptos, los trabajos de algunos matemáticos indios del siglo XVI acerca de series de potencias que, utilizando métodos aritmético - algebraicos, exponen resultados en relación con el descubrimiento de una serie para la función seno y otra para la función coseno.

Con el trabajo Indio aparecen las primeras representaciones en series de potencias (usuales) para un caso particular de funciones trascendentes, como lo es el de las funciones trigonométricas (seno, coseno, arcotangente, etc.), representaciones que surgieron con el objetivo de encontrar la longitud de un segmento (problema de rectificación) mediante aproximaciones que se establecen a partir de la construcción por recurrencia de tales series, tal como expondremos en párrafos siguientes.

Conocemos de dos trabajos de matemáticos indios del siglo XVI acerca de series de potencias, uno de ellos escrito alrededor de 1530 por Kerala Gargya Nilakantha (1445-1545) llamado *Tantrasangraha-Vyakhya*, y otro escrito tiempo después por Jyesthadeva (1500-1610) llamado *Yuktibhasa*; en este último se exponen los resultados del trabajo realizado por Madhava en el siglo XIV. A su vez Nilakantha atribuye a Madhava, en su trabajo *Aryabhatiyabhasya*, el descubrimiento de la serie para seno. Según Katz (1995, p. 169), Madhava fue el primer matemático en expresar las funciones trigonométricas de seno y coseno por medio de series.

Particularmente en el *Tantrasangraha-Vakhya* se presenta (Roy, 1990, p. 480) el desarrollo en serie de las funciones hoy conocidas como seno, coseno y arcotangente, que en términos modernos escribimos

$$
\begin{aligned}
r \arctan \frac{y}{x} &= \frac{1}{1} \times \frac{ry}{x} - \frac{1}{3} \times \frac{ry^{3\,3}}{x} + \frac{1}{5} \times \frac{ry^{5\,5}}{x} - \cdots \\
&= r\frac{y}{x} - \frac{r}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \frac{r}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^5 - \cdots + (-1)^n \frac{r}{2n+1}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n+1} - \cdots \\
r \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right) &= y = s - s \times \frac{s^2}{(2^2+1)r^2} + s \times \frac{s^2}{(2^2+1)r^2} \times \frac{s^2}{(4^2+4)r^2} \\
&= s - \frac{s^3}{3!r^2} + s\frac{s^5}{5!r^4} - \cdots + (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!r^{2n} + \cdot} \\
r \cos\left(\frac{s}{r}\right) &= x = r - r \times \frac{s^2}{(2^2+1)r^2} + r \times \frac{s^2}{(2^2+1)r^2} \times \frac{s^2}{(4^2+4)r^2} - \cdots \\
&= s - \frac{s^3}{2!r} + s\frac{s^4}{4!r^3} - \cdots + (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!r^{2n-1}} + \cdots
\end{aligned}
$$

en donde r es el radio de la circunferencia, s el arco correspondiente al ángulo θ cuya medida es $\frac{s}{r}$, como se observa en la figura 1:

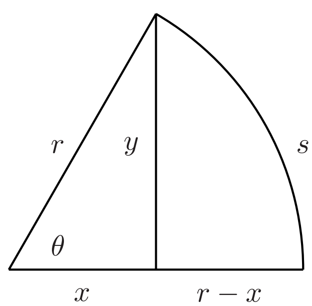

Figura 1

Concretamente, la regla que dieron los indios para determinar estas series fue:

> *Obtain the results of repeatedly multiplying the arc by itself and then dividing by 2, 3, 4, multiplied by the radius. Write down, below the radius (in a column) the even results, and below the arc (in another column) the odd results. After writing down a number of terms in each column, subtract the last term of either column from the one next above it, the remainder from the term next above, and so on, until the last subtraction is made from the radius in the first column and from the arc in the second. The two final remainders are respectively the cosine and the sine, to a certain degree of approximation. (Katz, 1995, p. 169)*
>
> *[Obtenga los resultados a partir de multiplicar el arco [s = arc(BH) -Figura 2-] por sí mismo varias veces y después dividir por $2, 3, 4, \ldots$ multiplicado por el radio [$r = OB$]. Escriba bajo el radio (en una columna) los resultados pares [es decir los resultados correspondientes a $n = 0, 1, 2, 3$, en $\frac{s^{2n}}{(2n)!r^{2n-1}}$], y debajo del arco (en otra columna) los resultados impares [es decir los resultados correspondientes a $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$*

en $\frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!r^{2n}}$]. Después de anotar un número de términos en cada columna, reste del término anterior la substracción del término siguiente con el siguiente a éste, y continúe el procedimiento sucesivamente, hasta que el resultado obtenido le sea restado al radio en la primera columna, y al arco en la segunda. Los dos restos finales son respectivamente el coseno y el seno, con cierto grado de aproximación.]

Una explicación utilizando notación moderna del método expuesto anteriormente es:

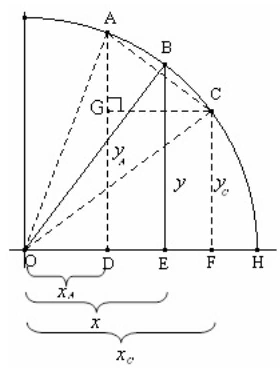

Figura 2

Los indios primero consideraron un cuarto de circunferencia (figura 2) y en ella un arco AC (que denotaremos $arc(AC)$) tal que su medida fuera casi igual a la del segmento AC. Si el segmento OB es mediatriz del segmento AC, B perteneciendo al arco AC, se tiene que los triángulos OEB y AGC son semejantes, de donde

$$\frac{OF - OD}{AC} = \frac{BE}{OB} \quad \text{y} \quad \frac{AD - CF}{AC} = \frac{OE}{OB}$$

y como $acr(AC) \approx AC$, entonces

$$\frac{OF - OD}{arc(AC)} = \frac{BE}{OB} \quad \text{y} \quad \frac{AD - CF}{arc(AC)} = \frac{OE}{OB}$$

o

$$\frac{arc(AC)}{OB} = \frac{OF - OD}{BE} = \frac{AD - CF}{OE}.$$

Ahora, si denotamos la medida del ángulo BOF como θ y a cada una de las medidas de los ángulos BOC y AOB como $d\theta$, entonces ellos obtuvieron que

$$y_A - y_C = \operatorname{sen}(\theta + d\theta) - \operatorname{sen}(\theta - d\theta) = \frac{AD - CF}{OB}$$

pero como

$$\frac{AD - CF}{arc(AC)} = \frac{OE}{OB} \quad \text{o} \quad AD - CF = \frac{arc(AC) \times OE}{OB}$$

entonces

$$y_A - y_C = \operatorname{sen}(\theta + d\theta) - \operatorname{sen}(\theta - d\theta) = \frac{AD - CF}{OB^2}.$$

Además, ya que la $acr(AC) \approx AC$

$$arc(AC) = 2d\theta(OB) \quad \text{y} \quad \frac{OE}{OB} = \cos(\theta)$$

con lo que

$$y_A - y_C = \operatorname{sen}(\theta + d\theta) - \operatorname{sen}(\theta - d\theta) = 2d\theta \cos(\theta). \tag{1}$$

De manera análoga encontraron que

$$x_A - x_C = \cos(\theta + d\theta) - \cos(\theta - d\theta) = 2d\theta \operatorname{sen}(\theta). \tag{2}$$

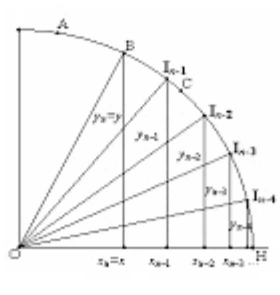

Figura 3

En segundo lugar, para encontrar el valor del segmento BE, es decir y, los indios dividieron el arco BH en n arcos iguales (figura 3), utilizaron las expresiones (1) y (2) donde para cada arco $I_k I_{k-1}$ (figura 4), θ es la medida del ángulo KOH y $d\theta$ la medida de los ángulos I_kOK y KOI_{k-1} (con $k = 1, 2, \ldots, n$) y obtuvieron las siguientes diferencias[1] :

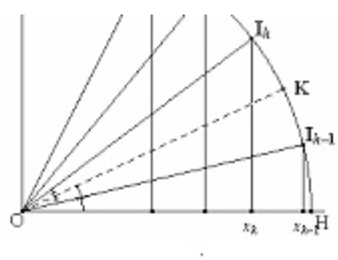

Figura 4

$$\begin{aligned} \Delta_1 y &= y_1 - y_2 = \beta x_1 \\ \Delta_2 y &= y_2 - y_1 = \beta x_2 \\ &\vdots \\ \Delta_n y &= y_n - y_{n-1} = \beta x_n \end{aligned}$$

[1]Por simplicidad en los cálculos, tomamos a OB como 1 (algo que no hicieron los indios).

y análogamente dedujeron que

$$\Delta_{n-1}x = x_n - y_{n-1} = -\beta y_{n-1}$$

donde $\beta = BH/n = 2d\theta$ y por consiguiente que el seno correspondiente a la medida del ángulo BOH (que en este caso es igual a la medida del arco BH ya que $OB = 1$) está dado por

$$y = \Delta_1 y + \Delta_2 y + \Delta_3 y + \cdots + \Delta_n y$$

y que el coseno de tal ángulo está dado por

$$x = 1 + \Delta_1 x + \Delta_2 x + \Delta_3 x + \cdots + \Delta_n x$$

Ahora bien, ellos observaron que

$$\begin{aligned} \Delta_1 y &= y_1, \\ \Delta_2 y &= -\beta^2 y_1 + y_1, \end{aligned}$$

ya que

$$\Delta_2 y - \Delta_1 y = \beta x_2 - \beta x_1$$

y

$$\Delta_2 y = \beta(x_2 - x_1) + \Delta_1 y = \beta(-\beta y_1) + y_1 = -\beta^2 y_1 + y_1,$$

y de manera general que

$$\Delta_n y = -\beta^2 (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + y_1.$$

De ahí, dedujeron que

$$\begin{aligned} y &= \Delta_1 y + \Delta_2 y + \Delta_3 y + \cdots + \Delta_y \\ &= ny_1 - \beta^2 [y_1 + (y_1 + y_2) + (y_1 + y_2 + y_3) + \cdots + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})] \end{aligned}$$

En seguida los indios asumieron que cuando n es muy grande y_1 se aproxima a $\beta = \frac{arc(BH)}{n}$, es decir $arc(BH) \approx ny_1$, con lo que obtuvieron el siguiente resultado, que actualmente y utilizando la noción de límite escribimos

$$y \approx arc(BH) - \lim_{n\to\infty} [y_1 + (y_1 + y_2) + \cdots + (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})] \tag{3}$$

Por otro lado, y de manera análoga a lo hecho para y, obtuvieron

$$x = x_1 - \beta(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})$$

pero x_1 se aproxima a 1, con lo que

$$x = 1 - \beta(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})$$

y utilizando el hecho de que $y_1 = \frac{arc(BH)}{n}$, cuando n es muy grande, concluyeron (en términos actuales) que

$$x = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{arc(BH)}{n} \right) (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1}.$$

En este punto tales personajes empezaron a encontrar expresiones que generaron una mejor aproximación para los valores del seno y del coseno del arco BH, obteniendo paso a paso los términos de dichas expresiones; por ejemplo, en un primer paso dividieron el arco BH en n partes y observaron que los términos y_i se pueden aproximar por $i \times \frac{arc(BH)}{n}$, con lo que reemplazando en (3), obtuvieron

$$y \approx arc(BH) - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{arc(BH)}{n}\right)^2 \left[\frac{arc(BH)}{n} + \cdots + \left(\frac{arc(BH)}{n} + \cdots \right.\right.$$
$$\left.\left. +(n-1)\frac{arc(BH)}{n}\right)\right]$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned}
&arc(BH) - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{arc(BH)}{n}\right)^3 [1 + (1+2) + \cdots + (1+2+3+\cdots+(n-1))] \\
=&arc(BH) - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{arc(BH)}{n}\right)^3 [n(1+2+\cdots+(n-1)) - (1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)] \\
=&arc(BH) - (arc(BH))^3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} i}{n^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^2}{n^3}\right) \\
=&arc(BH) - (arc(BH))^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\
=&arc(BH) - \frac{(arc(BH))^3}{6}
\end{aligned}$$

Lo anterior se constituyó en una primera aproximación para y, y a su vez tomando a y_i como

$$\left(i \times \frac{arc(BH)}{n}\right) - \frac{\left(i \times \frac{arc(BH)}{n}\right)^3}{6},$$

permitió una segunda aproximación, ya que al reemplazar tales valores en (7), y denotando a $arc(BH)$ como s, se tuvo que

$$y \approx s - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{s}{n}\right)^2 \left[\frac{s}{n} - \frac{s^3}{6n^3} + \left(\frac{s}{n} - \frac{s^3}{6n^3} + \frac{2s}{n} - \frac{(2s)^3}{6n^3}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{s}{n} - \frac{s^3}{6n^3} + \cdots + \frac{(n-1)s}{n} - \frac{((n-1)s)^3}{6n^3}\right)\right]$$

que es igual a

$$s - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{s}{n}\right)^2 \left[\frac{s}{n} + \left(\frac{s}{n} + \frac{2s}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{s}{n} + \cdots + \frac{(n-1)s}{n}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{s^3}{6n^3} + \cdots + \left(\frac{s^3}{6n^3} + \cdots + \frac{((n-1)s)^3}{6n^3}\right)\right)\right]$$

y por propiedades del limite lo anterior equivale a

$$\begin{aligned}
s - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{s}{n}\right)^2 &\left[\frac{s}{n} + \left(\frac{s}{n} + \frac{2s}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{s}{n} + \cdots + \frac{(n-1)s}{n}\right)\right] \\
- \lim_{n\to\infty}\left(\frac{s}{n}\right)^2 &\left(\frac{s^3}{6n^3} + \cdots + \left(\frac{s^3}{6n^3} + \cdots + \frac{((n-1)s)^3}{6n^3}\right)\right)
\end{aligned}$$

pero el primer renglón de la expresión anterior corresponde a $s - \frac{s^3}{6}$, resultado obtenido en el paso 1, luego

$$\begin{aligned}
y &\approx s - \frac{s^3}{6} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{s}{n}\right)^2\left[\frac{s^3}{6n^3} + \cdots + \left(\frac{s^3}{6n^3} + \cdots + \frac{((n-1)s)^3}{6n^3}\right)\right] \\
&= s - \frac{s^3}{6} + \lim_{n\to\infty}\frac{s^5}{6n^5}[1^3 + (1^3 + 2^3) + \cdots + (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3)] \\
&= s - \frac{s^3}{6} + \lim_{n\to\infty}\frac{s^5}{6n^5}[n(1^3 + \cdots + (n-1)^3) - (1^4 + \cdots + (n-1)^4)] \\
&= s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{6}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^3}{n^4} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^4}{n^5}\right] \\
&= s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{6}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\
&= -\frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120}
\end{aligned}$$

es decir $s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120}$ fue la nueva aproximación del seno de s. Reiterando este procedimiento, los indios obtuvieron mejores aproximaciones al valor de seno de s; ahora bien, si extendemos este proceso de manera indefinida, obtendremos quizá el primer desarrollo en series de potencias para la función seno,

$$\operatorname{sen}(s) = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Si el radio de la circunferencia de partida es OB (lo que notaremos como r), entonces el desarrollo en serie del seno de s es

$$\operatorname{sen}(s) = s - \frac{s^3}{3!r^2} + \frac{s^5}{5!r^4} - \cdots + (-1)^n\frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!r^{2n}}$$

Por otro lado, para encontrar aproximaciones para el valor de coseno de s, los indios realizaron un procedimiento análogo al anterior, que nos conduce mediante reiteraciones del mismo, al desarrollo en serie de tal función, a saber

$$\cos(s) = p - \frac{s^2}{2!r} + \frac{s^4}{4!r^3} - \cdots + (-1)^n\frac{s^{2n}}{(2n)!r^{2n-1}}$$

Los anteriores métodos empleados por los indios para solventar su problema de rectificación, nos permiten sugerir que su civilización se anticipó, en casi dos siglos, a un cambio de pensamiento caracterizado por el estudio de los infinitesimales, estudio que en Europa aún no había empezado.

Bibliografía

[1] Ángel, J. & Molina, O. (2007). *Influencia de las Series en la Evolución del Concepto de Función: Una Aproximación Socioepistemológica.* Tesis de Maestría Universidad Pedagógica Nacional.

[2] EDWARDS Y PENNEY. *Cálculo diferencial e integral.* Prentice Hall. 4 edición. México. 1997.

[3] Katz, V. *Ideas of Calculus in Islam and India [Electronic Version]. Mathematics Magazine, 68, 163-174. Retrieved Marzo de 2007 from http://links.jstor.org/sici?sici=0025-570X %28199506 %2968 %3A3 %3C163 %3AIOCIIA %3E2.0.CO %3B2-2.*

[4] Roy, R. (1990). *The Discovery of the Series Formula for pi by Leibniz, Gregory and Nilakantha [Electronic Version].* Mathematics Magazine, 63, 291-306. Retrieved Marzo de 2007 from http://links.jstor.org/sici?sici=0025570X %28199012 %2963 %3A5 %3C291 %3ATDOTSF %3E2.0.CO %3B2-C.