PROBLEMAS: OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE PARA ALUMNOS Y PROFESORES

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Campo de investigación: Resolución de problemas; Nivel educativo: medio y superior

Resumen

En el presente artículo se desea enfatizar la importancia de los problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Al tener sesiones de resolución de problemas con métodos activos y colaborativos, con el docente en una actitud completamente abierta a las inquietudes e iniciativas de los estudiantes, aprenderán no sólo los estudiantes, sino también el profesor. El aprendizaje del profesor se dará desde la fase de preparación de la sesión y puede ser no sólo en aspectos pedagógicos, sino también en aspectos matemáticos. Es fundamental la concepción que se tenga de la matemática y de lo que significa resolver problemas, para que las sesiones con los estudiantes realmente estimulen la formación del pensamiento matemático, la investigación y el "hacer matemática".

Introducción

Las experiencias desarrolladas en mis clases de pre y de post grado, así como en talleres de capacitación de docentes de diversos niveles educativos, me llevan al convencimiento de que es muy enriquecedor para el profesor y para los alumnos tener sesiones de resolución de problemas en las que se parte de una situación descrita y se plantean problemas de dificultad creciente para irlos resolviendo inicialmente en trabajos individuales y luego en grupo. La tarea final es proponer problemas inspirados en la situación dada y en los problemas previamente resueltos o examinados. Mostraré la experiencia tenida con un problema de geometría del espacio

Algunos aspectos fundamentales

Concepción de la matemática.

La forma de aprender y de enseñar la matemática depende en gran medida de la concepción que se tenga de la matemática, en la mayoría de los casos de manera inconsciente, como consecuencia de las experiencias tenidas como estudiante, como profesional y como parte de una sociedad en la que predomina la idea de la matemática como una ciencia acabada, difícil, llena de fórmulas, algoritmos y teoremas a los que sólo tienen acceso algunos privilegiados. Es importante cambiar estos estereotipos y llegar al convencimiento de que la matemática es una construcción social dinámica, en permanente desarrollo, tanto con nuevos resultados como con nuevos métodos, que van surgiendo precisamente al resolver problemas que provienen de la realidad, de otros campos de la ciencia o de la matemática misma, impulsados por la búsqueda de la verdad y de la belleza y por el afán de aportar a explicar, predecir y dominar la naturaleza. Bien decía Jean Dieudonné, famoso matemático francés del grupo Bourbaki:

> *"La historia de la matemática muestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico"*

¿Qué entendemos por problema?

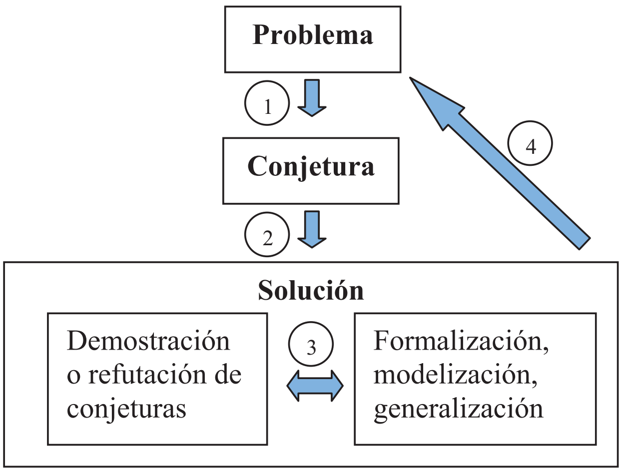
En las sesiones de trabajo hemos asumido que problema es, siguiendo a Schoenfeld, una tarea que es difícil para quien está tratando de hacerla. Difícil en el sentido de constituir un impasse intelectual y no solo a nivel operacional o de cálculo. En palabras de Campistrous y Rizo "*la vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida; cuando es conocida, deja de ser un problema*".

Es resolviendo problemas que avanza la matemática y es resolviendo problemas como deberíamos avanzar en el desarrollo de nuestros cursos, presentándolos adecuada y oportunamente para introducir conceptos y procedimientos nuevos.

¿Qué entendemos por resolver problemas?

Las sesiones de resolución de problemas podrían entenderse como ocasiones en las que se entrega a los alumnos una lista de problemas seleccionados de algún libro o de una página de Internet y se les pide que los resuelvan; es de imaginarse que si los alumnos no pueden resolverlos, el profesor expondrá cómo deben resolverse o repartirá una hoja con las soluciones. Sin embargo, la propuesta es mucho más ambiciosa, teniendo como marco la idea que resolver problemas es "hacer matemática"; es decir, vivir en pequeño la experiencia del ciclo dinámico del desarrollo de la matemática, considerando cuatro fases:

1. Identificada la dificultad, conjeturar una solución o una manera de llegar a ella;
2. Pasar de la conjetura a la búsqueda de una solución formal.
3. Proponer una solución, lo cual significa tratar de demostrar o de refutar la o las conjeturas, simultáneamente con la formalización adecuada, la modelización y el refinamiento de lo hecho, incluyendo la generalización si fuera el caso.
4. Plantearse nuevos problemas. El problema no se considera "acabado" al haber encontrado una solución, pues todavía puede explotarse más sus potencialidades al proponer nuevos problemas planteándose nuevas preguntas a partir del problema dado; buscando otras formas de solución; haciéndole modificaciones y conjeturando soluciones o resolviendo las nuevas cuestiones; buscando conexiones con la realidad y con otros campos de la matemática o de la ciencia, etc.



Con este enfoque, las sesiones de resolución de problemas no son para que el profesor exponga cómo "se deben" resolver los problemas, sino para desarrollar la capacidad de pensar matemáticamente. Y no sólo los alumnos, sino también el profesor, pues debe orientar adecuadamente las iniciativas e ideas de los alumnos – tanto para resolver el problema como para plantearse los nuevos - que pueden estar muy alejadas de las ideas del profesor. Estimular la creación de problemas, es un aspecto sumamente importante en la formación matemática de profesores y estudiantes, poco enfatizado en las propuestas de formación matemática. Proponer un problema supone identificar o crear una dificultad, considerar la información suficiente para resolverlo y redactar un texto adecuado; lo cual es muy diferente a lo que habitualmente se hace en las aulas, pues generalmente se parte de enunciados dados, que tienen ya la dificultad escogida y la información seleccionada. En las experiencias tenidas, se llega a esta fase luego de haber propuesto una situación problemática y dedicado tiempos al trabajo individual de uno o dos problemas sencillos en torno a la situación y luego al trabajo en grupos, con dificultades mayores y graduadas. Es pertinente recordar la reflexión de David Hilbert en su famosa conferencia en el segundo Congreso Internacional de Matemática, en París, en Agosto de 1900: "*Quizás, en la mayoría de los casos, la causa de no haber podido resolver un problema reside en no haber tratado primero de resolver los problemas más sencillos y fáciles. Todo depende entonces de hallar estos problemas más sencillos y tratar de resolverlos por medio de los procedimientos más rigurosos con que contemos y de aquellos conceptos susceptibles de generalización*"

Ciertamente, desarrollar este tipo de sesiones de resolución de problemas requiere que el profesor tenga una sólida formación matemática y una actitud muy amplia y amigable para crear una ambiente de confianza que posibilite la expresión libre de las ideas de los estudiantes, sin que esté presente el temor a equivocarse y a ser criticado por ello.

El papel del profesor es fundamental, no sólo porque debe orientar el trabajo hacia el desarrollo del pensamiento matemático, sino también porque debe inculcar y estimular el desarrollo de valores, actitudes y capacidades.

¿Qué deberíamos hacer al resolver un problema?

Como fruto de las experiencias tenidas, a continuación damos un conjunto de recomendaciones más concretas, que se tendrían que ir desarrollando en las diversas fases consideradas, no necesariamente en el orden en que están enunciadas.

- Comprender el problema, identificar la dificultad.
- Conjeturar una solución o un camino para llegar a la solución.
- Organizar la información.
- Experimentar, buscar regularidades
- Establecer relaciones lógicas.
- Aplicar conocimientos matemáticos.
- Justificar las conclusiones intermedias y finales.
- Encontrar sentido a lo que se desarrolle, en el contexto del problema.
- Verificar la solución encontrada.
- Examinar otros caminos de solución.
- Modificar el problema para examinar otros casos (¿qué pasaría si ….?) Modificar datos, cambiar la dificultad, considerar casos particulares, pensar en generalizaciones, etc.

¿Qué actitudes y capacidades se pueden estimular resolviendo problemas?

En el cuadro se da una lista de algunas de las actitudes y capacidades más importantes que se pueden estimular (preferentemente y no excluyentemente) en las cuatro fases consideradas en la resolución de problemas, en sesiones de trabajo con situaciones problemáticas y dificultades graduadas, a ser resueltas inicialmente de manera individual y luego grupal.

	Pasar de la dificultad a la conjetura	Pasar de la conjetura a la búsqueda de la solución formal	Proponer una solución	Plantear nuevos problemas
Actitudes				
Científica		▪	▪	▪
Crítica		▪		
De investigación	▪		▪	▪
Creativa	▪		▪	▪
De búsqueda de rigor		▪	▪	
De perseverancia	▪	▪		
De tolerancia	▪	▪		
De confianza y seguridad en sí mismo		▪		
De búsqueda de la belleza			▪	▪
De reconocimiento y corrección de errores		▪	▪	
Capacidades				
Entender y establecer relaciones en situaciones complejas	▪			▪
Relacionar lógicamente información y conceptos	▪	▪		▪
Encontrar regularidades	▪			
Estimar	▪			
Predecir	▪			
Intuir	▪			
Organizar información		▪		
Identificar problemas		▪		▪
Comunicarse mediante las matemáticas		▪	▪	▪
Demostrar		▪	▪	
Usar tecnología		▪		
Saber hacer		▪		
Aplicar		▪		

conocimientos				
Resolver problemas		▪	▪	
Trabajar en grupo		▪	▪	▪
Abstraer			▪	▪
Generalizar			▪	▪
Modelizar			▪	
Entender y manejar símbolos		▪	▪	▪
Proponer problemas				▪
Relacionar la matemática con la realidad y otros campos del conocimiento				▪

¿Qué oportunidades de aprendizaje nos brindan los problemas?

A continuación damos una lista de las diversas oportunidades de aprendizaje que nos brindan los problemas, a los alumnos y a los profesores. El saber aprovecharlas depende mucho de la actitud del profesor al preparar los problemas y al orientar las sesiones de resolución de los mismos, de modo que despierte en sus alumnos el deseo de resolverlos y estimule adecuadamente su creatividad.

a) Aplicar las matemáticas.
b) Comprender la realidad (física, social, económica)
c) Establecer conexiones:
   – entre conceptos matemáticos
   – con otros campos del conocimiento
   – con situaciones de la vida real.
d) Organizar la información.
e) Usar recursos tecnológicos.
f) Sistematizar razonamientos, adoptar notaciones y símbolos
g) Profundizar conceptos matemáticos.
h) Agudizar la intuición científica, la creatividad, la observación, la búsqueda de regularidades, la capacidad de generalizar.
i) Ser rigurosos, hacer demostraciones.
j) Conocer las potencialidades y las limitaciones de las herramientas matemáticas.
k) Disfrutar de la belleza de las matemáticas.
l) Proponer soluciones, establecer criterios objetivos.
m) Identificar y proponer problemas.
n) Dar pasos iniciales en la investigación científica.
o) Practicar el aprendizaje colaborativo
p) Reflexionar sobre la matemática misma
q) Reflexionar sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas
r) Valorar la verdad y la belleza
s) Estimular el desarrollo de determinadas actitudes y capacidades

Experiencias con geometría

En una clase con estudiantes universitarios de segundo y tercer ciclo, propuse la siguiente situación, haciendo ligeras modificaciones a uno que se propuso en la Olimpiada de Mayo del 2003.
Se tiene un cubo cuyas aristas miden 8 cm. En una arista, a 2 cm de uno de sus extremos, se encuentra una hormiga que debe realizar un recorrido por la superficie del cubo y regresar al punto de partida. Su camino debe contener puntos interiores de las seis caras del cubo y debe visitar sólo una vez cada cara del cubo.
Una de las actividades a desarrollar fue describir el camino que se consideraba el más corto que puede recorrer la hormiga; y otra, la de proponer algún problema inspirado en esta situación. Uno de los grupos de trabajo propuso el problema "*encontrar la longitud del camino más corto sobre la superficie de un tetraedro regular, que una los puntos ubicados en los centros de dos de sus caras".*
En el siguiente ciclo, con otros estudiantes, propuse la siguiente situación:
Una hormiga se encuentra en el centro de una de las caras de un tetraedro regular, cuyas aristas miden 12 cm, y avanza sobre la superficie del tetraedro hasta alcanzar una gota de miel que se encuentra en el centro de otra de las caras del tetraedro
Una de las actividades fue describir el camino de longitud más corta que podría seguir la hormiga; y otra, la de proponer un problema similar, considerando otro cuerpo geométrico. Casi todos los grupos propusieron problemas sobre un cubo. En todos los casos fue sumamente ilustrativo resolver los problemas usando desarrollos planos tanto del tetraedro como del cubo. En particular para mí, como profesor, fue una oportunidad para descubrir, haciendo un estudio de posibilidades con una notación propia, que sólo existen 11 desarrollos planos de un cubo, diferentes entre sí, salvo isometrías. En el problema del tetraedro, con los puntos centrales de dos caras laterales de un tetraedro regular, quedó demostrado que el camino más corto no es paralelo al plano de la base – como lo imaginaron varios - sino "subiendo" por el segmento perpendicular a la arista común y luego "bajando" en línea recta hasta el otro punto central. Este hecho me motivó a preparar la siguiente situación problemática:
Una hormiga se encuentra en el punto A de una bola esférica, y una gota de miel en el punto B. La bola tiene 6 cm de radio, el ángulo ACB que forman los puntos A y B con el centro C de la esfera mide 60° y ambos puntos están en el paralelo del "hemisferio norte" cuyo centro P se encuentra a 3 cm de C.
Una de las actividades fue determinar, aproximadamente, la longitud de un arco AB que se considere el arco de longitud mínima que recorrería la hormiga para llegar a la gota de miel. Al trabajar con los estudiantes quedó claro que en este caso era imposible recurrir a un desarrollo plano, y la solución del problema del tetraedro ayudó a intuir que el camino más corto no es el arco de un paralelo sino "subiendo" por el arco de una circunferencia máxima. El problema brindó una excelente oportunidad para ejercitar la visión espacial y para la aplicación de teoremas de la geometría plana, y motivó la conversación con los estudiantes sobre las geometrías no euclídeas, la geometría de la esfera, las geodésicas, la optimización restringida y el cálculo de variaciones. Se comentó también sobre la vinculación de este problema con la realidad, al considerar las rutas aéreas más cortas entre dos ciudades; en particular entre Nueva York y Madrid, que se encuentran en el mismo paralelo.
En el curso trabajé con los participantes otras experiencias didácticas desarrolladas con estudiantes universitarios y con profesores, proponiendo situaciones problemáticas de geometría analítica, de optimización y de búsqueda de criterios para tomar decisiones, con sus correspondientes actividades individuales y grupales, de dificultad creciente.

Bibliografía

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996) *Aprende a resolver problemas aritméticos.* La habana, Cuba. Editorial pueblo y educación.

Malaspina, U. (2002) Optimización matemática. En *Acta Latinoamericana de matemática Educativa* (Volumen 15, Tomo 1, pp 43 – 48) México: CLAME.

Malaspina, U. (2003) Elements for teaching Game Theory. En *PRO MATHEMATICA* (Volumen XVII, No. 33, pp 87 – 100) Lima, Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Malaspina, U. (2004). Motivation and development of mathematical thinking, using optimization problems. En Gagatsis, A. et al (Ed.) *Proceedings of the 4th Mediterranean conference on mathematics education* (Volume II, pp 491 – 500) Palermo, Italia.

Malaspina, U. (2005). El rincón de los problemas. En Revista Iberoamericana de Educación Matemática: http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, USA. Academic Press.