LOS PROCESOS DE CONVENCIÓN MATEMÁTICA CONSTITUYENTES EN LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LA MATEMÁTICA DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO: EL CASO DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES[•]

Gustavo Martínez Sierra
Centro de Investigación en Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero, México
gmartinez@cimateuagro.org & gamartinezsierra@gmail.com
Campo de Investigación: Socioepistemología; Nivel educativo: Superior

Resumen

En investigaciones anteriores (Farfán & Martínez, 2001, 2002; Martínez-Sierra, 2002; Martínez-Sierra, 2003, 2005) se han presentado caracterizaciones de un proceso particular de construcción de conocimiento al que hemos llamado "convención matemática". Aquí presentamos nuestros avances más recientes que trabajan con la hipótesis de que tal proceso es parte constitutiva de la construcción social de la matemática de la variación y el cambio. El caso particular que aquí presentamos se refiere a los aspectos convencionales presentes en la construcción de las funciones elementales.

1. Introducción

De manera general, la presente investigación encuentra su marco de referencia en dos líneas de investigación: Aquella denominada desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral y Farfán, 1998) y aquella que estudia los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento (Martínez-Sierra, 2005). La primera línea busca determinar los procesos de construcción social del conocimiento relacionado con la matemática de la variación y el cambio y ha prestado parte de su atención al estudio de la construcción de la noción de función (Farfán, 1997; Farfán et al., 2000). Algunas de estas investigaciones elaboran explicaciones que dotan de particularidades a las funciones trascendentes, como lo son las funciones logarítmicas (Ferrari, 2001), exponenciales (Lezama, 2003; Martínez-Sierra, 2003) y trigonométricas (Buendía y Cordero, 2005; Montiel, 2005). La segunda línea de investigación tiene por objetivo estudiar un proceso particular de construcción de conocimiento: la convención matemática. En particular en este trabajo se busca identificar y caracterizar los procesos de convención matemática en la construcción de la matemática de la variación y el cambio (Martínez-Sierra, 2003, 2005) tomando especial atención en el concepto de función.

2. Aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa

Dentro de la perspectiva socioepistemológica en Matemática Educativa se considera que al menos cuatro grandes circunstancias condicionan/determinan la construcción del conocimiento matemático en las personas: las cognitivas, las didácticas, las sociales y las epistemológicas. Las didácticas son aquellas propias de la conformación de los diferentes sistemas didácticos, las cognitivas son propias del funcionamiento mental, las

[•] Este trabajo es financiado por el Fondo Mixto CONACYT-Gobierno del Estado de Guerrero, Clave: GUE-2002-C0-7626 y por el Fondo Sectorial de Investigación para la educación SEP-CONACYT, Clave: SEP-2004-C01-46917.

epistemológicas son propias de la naturaleza y significados del conocimiento matemático y las sociales. Nuestro interés es el estudio sistémico de todas las circunstancias. La consideración anterior plantea al programa socioepistemológico problemas teóricos y empíricos para explicar la construcción del conocimiento. El principal problema consiste en llevar a la práctica la postura sistémica para analizar las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y sus mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza. La solución clásica a este problema es a través del establecimiento de *unidades de análisis*, cada una de las cuales retiene en forma simple las propiedades significativas de todo el sistema[1]. A nuestro parecer algunas nociones acuñadas en la perspectiva socioepistemológica tienen la característica de ser unidades de análisis para explorar el origen social del conocimiento. De entre ellas retomamos tres que aparecen fundamentales: *resignificación, práctica social y discurso matemático escolar*.

La noción de *resignificación* busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la preexistencia[2] de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de sus significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos. En este marco explicativo es posible plantearse, por ejemplo, resignificar la derivada a través de la linealidad de los polinomios[3] (Rosado, 2004). La noción de *práctica social*, junto con la de *discurso matemático escolar*, son quizá la parte medular de la perspectiva socioepistemológica. La construcción del conocimiento es producto de la actividad humana en su intento por transformar su realidad social o material y a su vez la actividad humana está *normada* por diferentes prácticas sociales y por el discurso matemático escolar. El concepto de "norma" lo utilizaremos según las aproximaciones sociológicas en la línea de (Durkheim, 1988; Gallino, 2001), en donde se entiende por norma [social] a una proposición – o también idea, representación colectiva que de todas maneras puede expresarse en una proposición- que prescribe a un individuo o a una colectividad el comportamiento más apropiado a que atenerse en una determinada situación. El aspecto normativo de las prácticas sociales es categóricamente preeminente sobre a los aspectos intencional y utilitario. En (Cantoral & Farfán, 2004, 141-142) la noción de práctica social mencionada es utilizada cuando se afirma: "Los juicios de valor, la búsqueda de convicciones y de consensos caracterizan todo proceso de construcción de conocimiento: en este sentido es que nosotros hablaremos de construcción social del conocimiento".

3. La noción de convención matemática cómo practica social de integración sistémica de conocimientos

En el plano de la construcción del conocimiento matemático, utilizamos la acepción que utilizamos para convención es la que señala aquello que es conveniente para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las

[1] Hemos tomado ésta caracterización de unidad de análisis de Vigotsky (1996), cuando establece, para su explicación de las relaciones entre pensamiento y lenguaje, como tal a la "significación de la palabra".
[2] En si misma esta es idea a-social, debido a que se considera al conocimiento como independiente del ser humano.
[3] En el contexto gráfico-analítico se tiene que la parte lineal de un polinomio P(x) es la recta tangente a su grafica en el punto (0, P(0)).

matemáticas (evitar contradicciones o dar unidad, por ejemplo). Al respecto el análisis epistemológico del desarrollo del concepto de exponente no natural muestra la presencia de una manera común de generar significados, presente en las distintas formulaciones que se han podido determinar (Martínez-Sierra, 2003) a lo largo de la historia de las ideas entre los siglos XIV y XVIII. Se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración sistémica de conocimientos)*.

En el sentido anterior entonces, un proceso de convención matemática puede ser entendido como un proceso de búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción de consensos es posible debido a que en esta comunidad existe la *práctica de integración sistémica de los conocimientos*; es decir existe una *normativa de la actividad para relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado*. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes.

Esencialmente, la búsqueda de integración puede resolverse optando por alguna de las siguientes vertientes: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Así vista la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados.

Tomemos por ejemplo el caso de los exponentes para aclarar a que nos referimos con "convenir matemáticamente". Partamos del supuesto que queremos darle un significado al símbolo $2^{1/2}$. La multiplicación reiterada no puede ser utilizada para ello, por lo que buscamos otro camino. ¿Qué significado tomar? Si retomamos la operatividad de las potencias de la misma base podemos postular que sería conveniente que $2^{1/2}2^{1/2}=2^1=2=(2^{1/2})^2$ por lo que tenemos que "convenir" que $2^{1/2}=\sqrt{2}$. Lo anterior también muestra que la igualdad $2^{1/2}=\sqrt{2}$ *no se puede demostrar sino se debe convenir.*

4. Procesos de convención matemática en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio

En términos generales nuestra línea de investigación descansa en dos hipótesis:

- **H1**: La naturaleza y significados de algunos contenidos matemáticos, presentes en diversos corpus de conocimiento pueden ser explicados a través del proceso de convención matemática.
- **H2**: El manejo escolar de tales contenidos provoca la existencia de fenómenos didácticos explicables, precisamente, en términos del proceso de convención matemática.

Los ejemplos que siguen muestran algunos de los aspectos convencionales presentes en la construcción del concepto de función.

4.1. Aspectos convencionales presentes en el orden y operatividad de los números

Orden: ¿Por qué -3>-4?

- 4>3
- Se desea que la relación de orden de los números se cumpla cuando se resta en cada miembro de la relación.
- 4-7>3-7
- Entonces se debe convenir que -3>-4

Operatividad: ¿Por qué -3(-2)=6?

- $y = 15\text{-}2(x)$
- Evaluando construimos una tabla para tomando x = 1,2,3,4,5

x	1	2	3	4	5
y	13	11	9	7	5

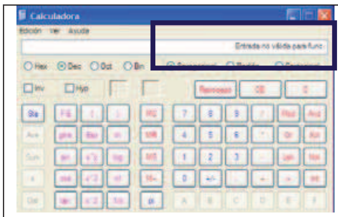
- Notando que Δx=1 y Δy=2, es posible continuar la tabla sin evaluar de la siguiente manera:

x	-2	-1	0	1	2
y	19	17	15	13	11

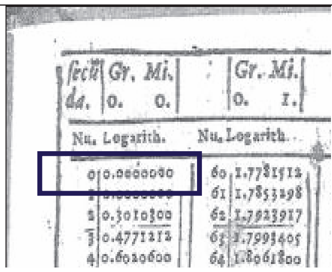
- Sustituyendo en la fórmula los valores encontrados por la variación tenemos: 19 = 15 -2(-3) $\Rightarrow$ -3(-2)=6.
- Para que la variación se conserve es necesario convenir que -3(-2)=6.

4.2. Aspectos convencionales presentes en la función exponencial y logaritmo

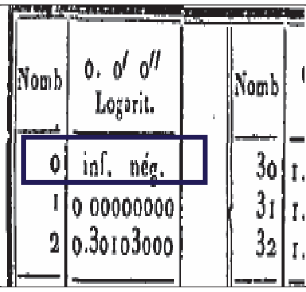
En términos modernos no está definido $\log(0)$; pero el aspecto convencional de su indeterminación puede ser observado en la siguiente tabla; que muestra como en un sistema de conocimientos fue posible afirmar que $\log(0) = 0$ y en otro $\log(0) =$ inf. neg.



Una calculadora moderna



Tabula logarítmica (Zaragoza, 1672)



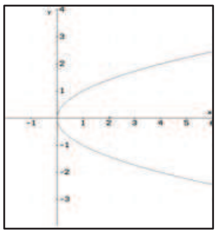
Tables de logarithmes (La Lande, 1841)

En cuanto a la función exponencial en otros escritos (Martínez-Sierra, 2002, 2003, 2005) hemos argumentado que el significado de los exponentes no naturales son construidos a través del proceso de construcción de conocimiento.

4.3. Aspectos convencionales presentes en la función raíz *n*-ésima.

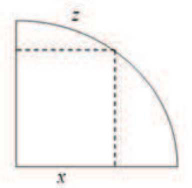
Tomamos la función raíz cuadrada como prototipo de la función raíz *n*-ésima. De acuerdo a las tradiciones escolares respecto a la raíz cuadrada (Colín, 2006) es común afirmar que la raíz cuadrada es bi-valuada en el contexto numérico y algebraico. Sin embargo la convención escolar presente en la función raíz cuadrada es considerar que el operador raíz cuadrada produce un "valor principal" positivo; es decir que el operador es univaluado, de está manera la expresión $\sqrt{x}$ puede interpretarse como función.

Un estudio realizado recientemente (Colín, 2006) se han dado evidencias sobre las disfunciones del discurso matemático escolar referente al aspecto bi-valuado de la raíz cuadrada y sus diferentes significados en los contextos aritmético, algebraico y funcional. La huella de tales disfunciones se presenta en algunas de las concepciones de estudiantes que establecen que la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$ es:



4.4. Aspectos convencionales presentes en las funciones trigonométricas

En el discurso matemático escolar moderno el argumento de las funciones trigonométricas son ángulos. En particular las funciones trigonométricas de varible real son justificadas a través del uso de medida angular del "radián". El aspecto convencional de la toma del radian como unidad de medida se muestra en el hecho de que antaño el argumento de las funciones trigonométricas eran las longitudes de los arcos; tal y como se muestra en lo siguiente.



$$x = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \frac{z^8}{40320} - \frac{z^{10}}{3628800}$$

(Newton, 1669)

127. Soit z un arc quelconque de cercle dont je ſuppoſe toujours le rayon $= 1$; on a coutume de conſidérer plus particuliérement les ſinus & coſinus de cet arc z. Pour repréſenter dans la ſuite le ſinus d'un arc z, j'écrirai $\mathit{ſin.}\ A.z$, ou ſimplement $\mathit{ſin.}\ z$. Et pour repréſenter le coſinus j'écrirai $\mathit{coſ.}\ A.\ z$, ou ſeulement $\mathit{coſ.}\ z$. Ainſi comme π exprime un arc de 180°, $\mathit{ſin.}\ 0\pi = 0$; $\mathit{coſ.}\ 0\pi = 1$; $\mathit{ſin.}\ \frac{1}{2}\pi = 1$; $\mathit{coſ.}\ \frac{1}{2}\pi = 0$; $\mathit{ſin.}\ \pi = 0$, $\mathit{coſ.}\ \pi = -1$; $\mathit{ſin.}\ \frac{3}{2}\pi = -1$, $\mathit{coſ.}\ \frac{3}{2}\pi = 0$;

Euler (1845/1738)

Conclusión

En este escrito se ha proporcionado una articulación de la noción de convención matemática, en tanto proceso de construcción de conocimiento, con la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa. Se ha explicado el origen de este proceso a través de la práctica social de integración sistémica de conocimientos. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir y explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. En particular se han presentado ejemplos que dan evidencias del funcionamiento del proceso como constituyente en la construcción de las funciones elementales.

Bibliografía

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics,* 59(2).

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*. 42, 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction : logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(2.3), 137 - 168.

Colín, M. P. (2005). *De la aritmética al Cálculo: un estudio transversal de la raíz cuadrada*. Tesis de Maestría. México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

Durkheim, E. (1988). *Las reglas del método sociológico y otros escritos sobre filosofía de las ciencias sociales"* [1895 y 1896-1917]. Madrid: Alianza Editorial.

Euler, L. (1845). *Introduction a l'analyse infinitésimale.* París, Francia: L'Ecole Polytechnique (Trabajo original publicado en 1738).

Farfán, R. (1997) *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M.; Martínez, G. & Ferrari, M. (2000). Lenguaje Algebraico y pensamiento funcional. Un estudio de las funciones pretextando la resolución de desigualdades (Cap. 7, pp. 89-145). En R. Cantoral, F. Cordero, R. Farfán, et al. (2000) *Desarrollo de Pensamiento Matemático*. ITESM- Universidad Virtual. México: Editorial Trillas.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2001). Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero. En G. L. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 14*. (pp. 524-531). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2002). Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. En C. R. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 15 Tomo I*. (pp. 225-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII.* (pp. 145 -149).

Gallino, L. (2001). *Diccionario de sociología*. México: Siglo XXI Editores.

La Lande, J. (1841). *Tables de logarithmes*. Paris: Bachelier.

Lezama, J. (2003). *Estudio de la reproducibilidad*. Tesis de doctorado. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Newton, I. (1669). De Analysi per equationes infinitas (june 1669). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. II (1667-1700)* (pp. 206-247). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1) 45-78.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN. CICATA-IPN. México.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(2).

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidaddel polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Zaragoza, J. (1672). *Tabula logarítmica*. Matriti : Apud Bernardum a Villa Diego.