PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL: UNA APLICACIÓN AL ESTUDIO DE LA DERIVADA

Mario Sánchez Aguilar y Juan Gabriel Molina Zavaleta
CICATA del IPN, México
mosanchez@ipn.mx

Campo de investigación: Pensamiento Variacional; Nivel educativo: Superior

Resumen

El presente escrito muestra una descripción del taller denominado 'pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada' que se desarrolló en la ciudad de Montevideo, Uruguay, en el marco de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Además de presentar esta descripción, el escrito contiene algunas reflexiones relacionadas con los contenidos matemáticos abordados en este taller.

Introducción

Guiado por la estructura del taller, el presente escrito se encuentra dividido en dos secciones, la primera aborda aspectos numéricos asociados a los contenidos matemáticos tratados; mientras que la segunda hace referencia a algunos aspectos gráficos.

Sobre los aspectos numéricos

Como ya es conocido, el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) es una línea de investigación que se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el sistema social que le da cabida (Cantoral et al., 2000, p. 185). En este escrito se toman algunas ideas matemáticas que han sido utilizadas (y algunas de ellas generadas) dentro de esta línea de investigación y se muestra su aplicación en el estudio del concepto matemático derivada.

El término 'variacional' se encuentra estrechamente ligado al concepto de *variación*, el cual es entendido como una cuantificación del cambio (ver Cantoral, Molina y Sánchez, 2005). Dentro del PyLV, el concepto de variación tiene una importancia fundamental, ya que el estudio de la variación de diferentes situaciones (en particular aquellas ligadas a cuerpos en movimiento) generó las ideas fundamentales que dieron origen al cálculo diferencial. Un concepto matemático que fungió como herramienta para determinar la variación entre dos estados consecutivos E_1 y E_2 de un sistema dado, es el de *diferencia*; esto es, el residuo de la sustracción $E_2 - E_1$; por esta razón se buscó provocar la emergencia de este concepto en la primer parte del taller, para posteriormente mostrar su utilidad en el estudio del concepto de derivada en un contexto numérico.

Para lograr el objetivo anterior, hicimos uso de una actividad matemática contenida en el trabajo Cantoral et al. (2005), cuyo propósito es favorecer la emergencia de estrategias de solución y argumentos de naturaleza numérica que utilicen la idea de diferencia. La actividad es la siguiente:

Actividad 1. A continuación se presentan tres tablas numéricas.

a) Determina cuál de estas tablas corresponde a una función lineal, cuál a una función cuadrática y cuál a una función cúbica.
b) Una vez que hayas determinado a qué tipo de función corresponde cada una de las tablas numéricas, encuentra la expresión algebraica de cada una de estas funciones.

x	y
-3	-78
-2	-57.75
-1	-40.5
0	-26.25
1	-15
2	-6.75
3	-1.5

x	y
-3	624
-2	404.25
-1	243
0	131.25
1	60
2	20.25
3	3

x	y
-3	-29.25
-2	96
-1	221.25
0	346.5
1	471.75
2	597
3	722.25

Tal como se comenta en Cantoral et al. (2005), la actividad anterior está diseñada para obstaculizar la estrategia de solución gráfica que se presenta con gran frecuencia entre los profesores que intentan resolverla; esto con el propósito de favorecer la emergencia de argumentos de tipo numérico que involucren la idea de diferencia.
Cuando la idea de diferencia aparece en los argumentos de los profesores, ésta se retoma y se utiliza como herramienta para dar respuesta al primero de los cuestionamientos de la actividad, mostrando por ejemplo que para la primera de las tablas numéricas, el cálculo de las segundas diferencias nos conducen a un número constante, lo cual nos indica que esta tabla corresponde a una función de segundo orden (para más detalles consultar Cantoral et al. (2005)):

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
-3	-78		
-2	-57.75	20.25	
-1	-40.5	17.25	-3
0	-26.25	14.25	-3
1	-15	11.25	-3
2	-6.75	8.25	-3
3	-1.5	5.25	-3

Figura 1. *Aplicación de las segundas diferencias a la primera tabla de la actividad*

Este número constante $k=-3$, además de indicar que la primera de las tablas corresponde a una función de la forma $y=Ax^2+Bx+C$, también señala que el valor de A en esta expresión algebraica es $A=\frac{k}{2}=\frac{-3}{2}$. Esta propiedad ($2A=k$) generada a partir de la aplicación de la segunda diferencia, a los valores de las ordenadas, en la representación numérica de una función de segundo grado, se encuentra estrechamente relacionada con el valor constante k' producido al obtener la segunda derivada de una función cuadrática de la forma $f(x)=Ax^2+Bx+C$:

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$f'(x) = 2Ax + B$$
$$f''(x) = k' = 2A$$

De esta manera se argumenta que el concepto de diferencia, además de subyacer al concepto matemático de derivada, puede ser de utilidad para estudiar desde un contexto numérico algunas ideas propias del cálculo diferencial.

Estos aspectos numéricos del taller concluyen explicando que el concepto de diferencia como herramienta de análisis de la variación aparece en el trabajo astronómico de Newton (1687) y se formaliza en el *Methodus Differentialis* publicado en Newton (1711).

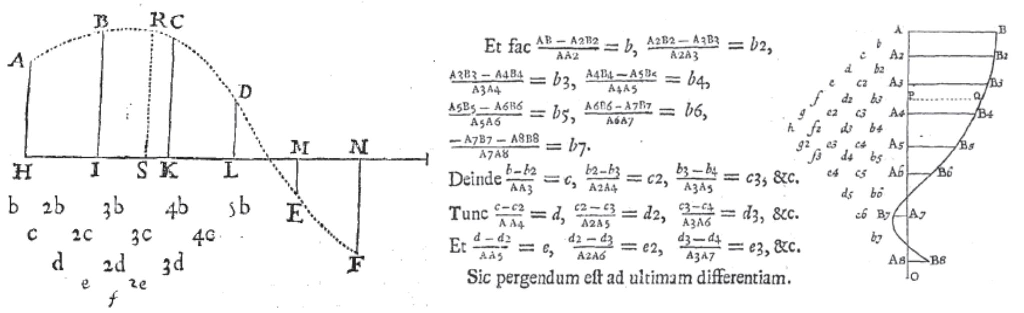


Figura 2. *Imágenes tomadas de la obra de Newton que ilustran el uso de la diferencia como herramienta de análisis de la variación.*

Acerca de las formas gráficas

La noción de velocidad fue por algunos años una idea huidiza, situación que posiblemente afectó en el desarrollo de la matemática. Según Gandt (1999) durante el siglo XVII los precursores del análisis matemático iniciaron su utilización en forma intuitiva, "Los hombres del siglo XVII manipularon movimientos acelerados y velocidades instantáneas durante bastante tiempo antes de poder precisar qué entendían por ello…" (De Gandt, 1999, p. 41). Los estudiosos del movimiento idearon medios para apreciar la velocidad, por ejemplo, para que fuese aceptada la tesis de Galileo que expresa: un móvil pasa por todos los grados de velocidad. Él utilizó la siguiente analogía:

> Si se considera que una maza actúa con tanta mayor fuerza sobre una estaca cuanto mayor es la velocidad de la maza, hay que admitir que la misma maza puede tener un efecto y, en consecuencia, una velocidad tan pequeña como se quiera, a condición de dejarla caer desde una altura muy pequeña. La lentitud de su movimiento se comprobará por el hundimiento casi nulo de la estaca. De esta manera, Galileo hace concebible la idea de una velocidad muy débil,…En este caso, la velocidad se mide por el efecto producido: "Podremos conjeturar sin error cuánta es la velocidad de un grave que cae, por la cualidad y la cantidad del golpe" (De Gandt, 1999, p. 44)

Otro ejemplo de estos medios de representación es el siguiente, “Newton en sus primeros trabajos imagina dos desplazamientos sobre dos líneas horizontales paralelas y trata de expresar la relación entre las velocidades, a partir del conocimiento de los desplazamientos realizados en un tiempo igual…” (De Gandt, 1999, p. 59). Estos modelos evolucionaron, hasta que permitieron la manipulación de la velocidad y aceleración, situación que ha sobrevivido hasta los libros de texto actuales, en ellos se pueden encontrar representaciones auxiliares para explicar estas nociones, sin embargo parece haber un corte en estos dispositivos, es poco común encontrar representaciones intuitivas para darle sentido a nociones como tercera derivada o derivadas de orden mayor. Con este trabajo se comparte la siguiente idea, estudiar un medio de representación para extender el estudio de las derivadas de orden superior, en concreto, analizar las *formas* que se reflejan sobre la gráfica de una función en la región que su derivada de orden *n* es mayor o menor que cero y determinar sus propiedades.

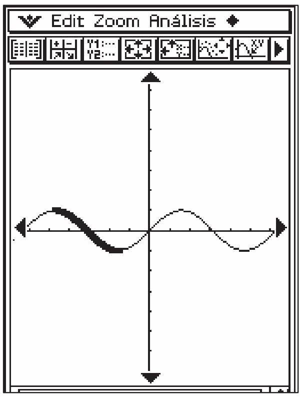


Figura 3. *Se considera la función* $f(x) = sen(x)$, *la región subrayada corresponde con un intervalo en el cual la tercera derivada* f *es mayor que cero.*

En este trabajo se comparte la idea de De Gandt: “Las bases intuitivas que hicieron posible construir el análisis se han vuelto superfluas lógicamente, pero siguen siendo un auxilio precioso y quizás indispensable. La enseñanza y la práctica de las matemáticas deberían permitir que se refinara y educara la intuición cinemática y geométrica, en lugar de rechazarla…” (De Gandt, 1999, p. 65).

En la actualidad hay diversas investigaciones de corte cognitivo que discuten la factibilidad de planteamientos en ese sentido, por ejemplo Fischebein (1987), discute acerca del papel de la intuición en los aprendizajes, y mucha de su reflexión se centra entorno a los conocimientos matemáticos:

> La intuición no es la principal fuente de conocimientos evidentes y verdaderos, pero parece serlo, porque éste es exactamente su papel: crear aparición de certeza, conferir a distintas interpretaciones o representaciones un carácter de certeza intrínseca e incuestionable (Fischbein, 1987, p. 12, nuestra traducción)
>
> […] Nosotros pensamos mejor con lo perceptible, con lo prácticamente manipulable, con lo familiar, con lo que se le puede controlar su comportamiento, con la validez implícita, que con lo abstracto, lo que no se puede representar, lo incierto, lo infinito (Fischbein, 1987, p. 122, nuestra traducción).

Este estudio implicará diversas investigaciones, en principio el esclarecimiento de las relaciones matemáticas entorno a las *formas gráficas*, las cuales se discuten más adelante en este documento (y que fueron discutidas en el taller), y posteriormente las concernientes a la Matemática Educativa, que se tienen contempladas para investigaciones futuras. Esta es una investigación en proceso, para acotar el estudio se decidió limitar la investigación a la función seno y extenderla hasta los polinomios, la discusión del taller giró entorno a los primeros resultados, las propiedades encontradas entre la función $sen(x)$ y sus respectivas derivadas. El motivo de elegir a la función seno para el inicio del estudio es porque es una función de variación acotada, situación que facilita el estudio a través de representaciones gráficas.

Explorando la función $f(x) = sen(x)$

El método seguido en este trabajo y en el taller fue la exploración gráfica y la reflexión algebraica, la primera se hacía con ayuda de un graficador en el que se trazaba la gráfica de la función $f(x)$ y su derivada del orden en estudio.

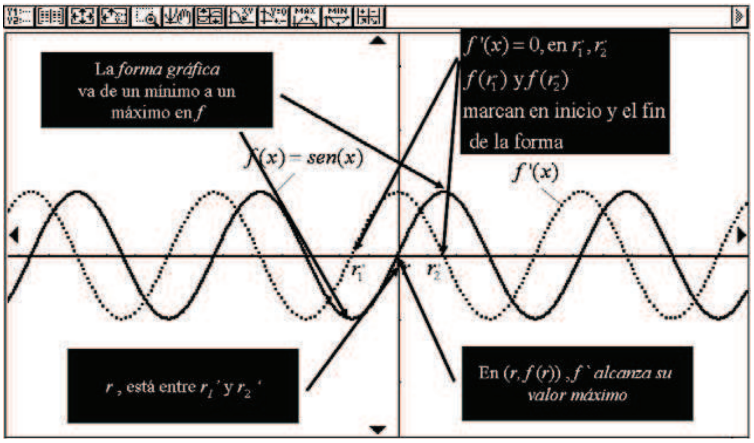
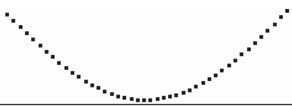
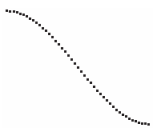


Figura 4. *En ella se muestra a la función f, a su primera derivada (f'), una de las regiones en la cual se cumple que* $f'(x) > 0$ *y se resaltan las propiedades entorno al comportamiento gráfico de f en tal región.*

En la siguiente tabla se concentran algunas de las propiedades encontradas al estudiar la segunda, tercera y cuarta derivada:

Propiedad común en las formas gráficas para la 2ª, 3ª y 4ª derivada		
Un punto sobre *f,* entre más cerca esté de el punto mínimo de la *forma gráfica* o de su punto de inflexión (según sea el caso) tendrá mayor segunda derivada.		
Formas gráficas para la 2ª, 3ª y 4ª derivada		
Segunda derivada 	Tercera derivada 	Cuarta Derivada 

La *forma gráfica* va de un punto de inflexión a otro, donde f es cóncava hacia arriba.	La *forma gráfica* va de un punto máximo a un mínimo consecutivo.	La *forma gráfica* va de un punto de inflexión a otro, donde f es cóncava hacia abajo.

Una discusión detallada entorno a estas propiedades y su extensión a polinomios de raíces simples se está desarrollando actualmente.

Comentarios finales

Con base en el rastreo histórico de las ideas que dieron origen al concepto de derivada, se puede argumentar que un primer acercamiento al estudio del cálculo diferencial debería incluir un análisis de la variación del movimiento y quizá de otros fenómenos. Este análisis podría desarrollarse en un contexto numérico, porque la historia muestra que es la forma natural en que se desarrolló; y además el manejo de objetos aritméticos puede ser una base intuitiva que fomente el entendimiento de estos conceptos en los estudiantes.

Con respecto a las formas gráficas y sus propiedades, actualmente se estudia la posibilidad de incorporarlas como un medio para apreciar la derivada de orden superior y brindar nuevos significados a este concepto.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., Farfán, R.M., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R.A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R., Molina, J.G. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 18, pp. 463-468). CLAME: México.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Holanda: Reidel.

De Gandt, F. (1999). Matemáticas y realidad física en el siglo XVII (de la velocidad de Galileo a las fluxiones de Newton). (C. Bidón-Chanal, Trad.). En F. Guénard y G. Lelièvre (Eds.), *Pensar la Matemática* (pp. 41-68). Barcelona, España: Tusquets Editores.

Newton, I. (1687). *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*. Jussu Soc; Regiæ ac Typis J. Strater, Londini.

Newton, I. (1711). *Analysis per quantitum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis*. Ex officina Pærsoniana, Londini.