Investigación en Didáctica de la Matemática

Homenaje a Encarnación Castro

Luis Rico
María C. Cañadas
José Gutiérrez
Marta Molina
Isidoro Segovia
(Eds.)

Colección «Didáctica de la Matemática»

Diseño de portada: José L. Lupiáñez

Edición promovida por el grupo de investigación «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico»

Los capítulos de este libro han superado una revisión por pares.

Este libro debe ser citado como:
Rico, L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.) (2013).
Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro.
Granada, España: Editorial Comares.

Editorial Comares, S.L.
Gran Capitán, 10 – Bajo
18002 Granada
Telf.: 958 465 382 • Fax: 958 272 736
E-mail: libreriacomares@comares.com
http://www.editorialcomares.com
http://www.comares.com

ISBN: 978-84-9045-095-6 • Depósito legal: Gr. 1.788/2013

Fotocomposición, impresión y encuadernación: COMARES

RELACIÓN DE AUTORES

Abraham Arcavi
Weizmann Institute of Science (Israel)

Lorenzo J. Blanco Nieto
Universidad de Extremadura (España)

Rafael Bracho López
Universidad de Córdoba (España)

María C. Cañadas Santiago
Universidad de Granada (España)

José Carrillo Yáñez
Universidad de Huelva (España)

Marcelo Casis Raposo
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile)

Enrique Castro Martínez
Universidad de Granada (España)

Elena Castro Rodríguez
Universidad de Granada (España)

Francisco Javier Claros Mellado
Universidad Carlos III de Madrid (España)

Antonio Codina Sánchez
Universidad de Almería (España)

Luis C. Contreras González
Universidad de Huelva (España)

Moisés Coriat Benarroch
Universidad de Granada (España)

Carlos de Castro Hernández
Universidad Complutense de Madrid (España)

Aurora del Río Cabezas
Universidad de Granada (España)

Ángel Díez Lozano
Universidad de Granada (España)

Paola Donoso Riquelme
Universidad de Granada (España)

Francisco Fernández García
Universidad de Granada (España)

Alejandro Fernández Lajusticia
Universidad de Valencia (España)

Antonio Fernández Cano
Universidad de Granada (España)

José A. Fernández Plaza
Universidad de Granada(España)

Pablo Flores Martínez
Universidad de Granada (España)

Jesús Gallardo Romero
Universidad de Málaga (España)

Francisco Gil Cuadra
Universidad de Almería (España)

Bernardo Gómez Alfonso
Universidad de Valencia (España)

Pedro Gómez Guzmán
Universidad de los Andes (Colombia)

Evaristo González González
Colegio Público Sierra Nevada, Granada (España)

M.ª José González López
Universidad de Cantabria (España)

José Luis González Marí
Universidad de Málaga (España)

José Gutiérrez Pérez
Universidad de Granada (España)

Josefa Hernández Domínguez
Universidad de La Laguna (España)

Ángel A. López
Universidad de Carabobo (Venezuela) y Universidad de Granada (España)

Carmen López Esteban
Universidad de Salamanca (España)

José Luis Lupiáñez Gómez
Universidad de Granada (España)

Antonio Marín del Moral
Universidad de Granada (España)

Alexander Maz Machado
Universidad de Córdoba (España)

Marta Molina González
Universidad de Granada (España)

María Francisca Moreno Carretero
Universidad de Almería (España)

Antonio Moreno Verdejo
Universidad de Granada (España)

Tomás Ortega del Rincón
Universidad de Valladolid (España)

Antonio Luis Ortiz Villarejo
Universidad de Málaga (España)

M.ª Mercedes Palarea Medina
Universidad de La Laguna (España)

Luis Puig Espinosa
Universidad de Valencia (España)

Luis Radford
Universidad Laurentienne (Canadá)

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada (España)

Nuria Rico Castro
Universidad de Granada (España)

Luis Rico Romero
Universidad de Granada (España)

Susana Rodríguez Domingo
Universidad de Granada (España)

Isabel Romero Albaladejo
Universidad de Almería (España)

Juan F. Ruíz Hidalgo
Universidad de Granada (España)

Francisco Ruíz López
Universidad de Granada (España)

María Teresa Sánchez Compaña
Centro de Magisterio María Inmaculada, Antequera (España)

Victoria Sánchez García
Universidad de Sevilla(España)

Isidoro Segovia Alex
Universidad de Granada (España)

Modesto Sierra Vázquez
Universidad de Salamanca (España)

Martín M. Socas Robanya
Universidad de La Laguna (España)

Manuel Torralbo Rodríguez
Universidad de Córdoba (España)

Antonio Tortosa López
Centro de Educación Secundaria y Formación Profesional «S. Ramón y Cajal», Granada (España)

Gabriela Valverde Soto
Universidad Nacional de Costa Rica (Costa Rica)

Danellys Vega Castro
Universidad de Granada (España)

ÍNDICE

Bloque 3
Formación de Profesores e Investigación

ACERCA DE LAS NOCIONES SENTIDO ESTRUCTURAL Y PENSAMIENTO RELACIONAL

About structural sense and relational thinking

Gabriela Valverde[a] *y Danellys Vega-Castro*[b]
[a]Universidad de Costa Rica, [b]Universidad de Granada

Resumen

Uno de los focos de estudio de las investigaciones en Didáctica del Álgebra se centra en las dificultades que enfrentan los individuos cuando deben realizar acciones con expresiones e igualdades, tanto numéricas como algebraicas. En esta línea, encontramos que en la literatura especializada frecuentemente aparecen dos constructos para describir cognitivamente el tratamiento que se hace de tales objetos matemáticos, éstos son el sentido estructural y el pensamiento relacional. En este trabajo se presentan los principios subyacentes a estas nociones, se identifican los contextos matemáticos usados para estudiar estos constructos y se procura establecer puntos comunes y divergentes asociados a las mismas.

Palabras clave: Pensamiento relacional; Sentido estructural.

Abstract

One of the focal points of research in the Didactics of Algebra is the difficulties that individuals face when they have to make actions related to numerical and algebraic expressions and equalities. Regarding these difficulties we found that in the specialized literature two constructs frequently appear for describing the treatment done in those mathematical objects in a cognitive way; they are structural sense and relational thinking. In this paper we present the underlying principles of both notions we identify the mathematical contexts used for studying those constructs and we attempt to establish common and divergent points related to them.

Keywords: *Relational thinking; Structural sense.*

Valverde, G. y Vega-Castro, D. (2013). Acerca de las nociones sentido estructural y pensamiento relacional. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro (pp. 119-125). Granada, España: Editorial Comares.

Introducción

En las investigaciones centradas en estudiar fenómenos relacionados con la enseñanza y aprendizaje del álgebra se hace referencia a diferentes, pero interconectadas, maneras de concebir el álgebra escolar, una de ellas contempla el álgebra como la generalización de relaciones, el estudio de patrones y estructuras; esta perspectiva se denomina álgebra como aritmética generalizada (Molina, 2006). Parte de los estudios que se sitúan en este enfoque destacan que estudiantes de diversos niveles educativos tienen dificultades para concebir expresiones numéricas y algebraicas como un todo, por ejemplo las igualdades, y para reconocer semejanzas en las estructuras de expresiones equivalentes (Arcavi, 2003; Carpenter, Levi, Loef y Koehler, 2005; Hoch y Dreyfus, 2004, 2006; Molina, 2006, 2012; Vega-Castro, 2010; Vega-Castro, Molina y Castro, 2011, 2012). En el contexto de los mismos aparecen los constructos sentido estructural y pensamiento relacional para describir actuaciones idóneas de los estudiantes en diversas actividades algebraicas, en este sentido ambas nociones se pueden visualizar como componentes que caracterizan la competencia algebraica (Molina, 2012).

Pensamiento relacional

El constructo pensamiento relacional ha sido utilizado en diversas áreas del conocimiento para referirse de manera genérica al pensamiento sobre relaciones o conceptos basados en relaciones. No obstante, en este trabajo limitamos la reflexión al contexto de la aritmética, particularmente a la resolución de igualdades y en operaciones con fracciones (Carpenter et al., 2005; Empson, Levi y Carpenter, 2011; Molina, 2006).

Molina (2012) afirma que el pensamiento relacional surge como respuesta a la problemática dada por el énfasis procedimental que caracteriza la enseñanza usual de la aritmética. Tradicionalmente, ésta ha estado vinculada al cálculo de respuestas, y las operaciones básicas han sido generalmente concebidas como procesos que implican hacer algo. En la aritmética, el resultado de los cálculos es el cierre de los mismos, a través de una secuencia de pasos se llega a un solo número. En álgebra, por otro lado, el foco son las relaciones (Carpenter et al., 2005). Incluso la resolución de ecuaciones tiene un carácter distinto que la aplicación de un algoritmo a números, pues una ecuación se resuelve a través de la aplicación de transformaciones sucesivas a la ecuación y la transformación final resulta en una ecuación que expresa una relación (x = uno o varios números), en lugar de un solo número aislado.

Carpenter et al. (2005) han caracterizado el pensamiento relacional como la consideración de expresiones e igualdades en su totalidad en lugar de procedimientos que deben realizarse paso a paso. Según estos autores, el pensamiento relacional implica el uso de las propiedades fundamentales de los números y operaciones para transformar expresiones matemáticas en lugar de calcular una respuesta aplicando una secuencia de procedimientos. Para ilustrar esta noción, Carpenter et al. (2005) plantean la igualdad $8+4=\_+5$, en cuya resolución es posible que los estudiantes hallen el valor faltante sumando 8 y 4 y después buscando el valor que sumado a 5 da como resultado 12. Esta es una solución perfectamente válida del problema que trata apropiadamente con el signo igual como expresión de una relación, sin embargo, la misma se basa en cálculos para llegar a la respuesta. Un estudiante que considere la ecuación como un todo podría haber reconocido que 5 es una unidad mayor que 4, de modo que el número en la caja debe ser una unidad menor que 8. En otras palabras, el estudiante podría usar, al menos implícitamente, la propiedad asociativa de la adición para transformar la ecuación. Además de las tareas matemáticas descritas previamente, encontramos en la literatura otras actividades usadas para estudiar el pensamiento relacional. Así, Molina (2006) considera tareas en las que es preciso manipular las expresiones o construir sentencias basadas en relaciones aritméticas (la relación de mismidad, de no mismidad, diferencia de magnitud entre dos números, correspondencia de dos números mediante una operación). Además, en su investigación considera actividades en las que se requiere estudiar la veracidad de igualdades que contemplan relaciones entre las operaciones, por ejemplo, expresiones del tipo $4\times 7=7+7+7+7$.

Otra de las problemáticas que se abordan en los estudios sobre el pensamiento relacional están asociados a los usos del signo «=» (Carpenter et al., 2005; Molina, 2006, 2012). En este sentido, la literatura expone que la mayor parte de los niños consideran el «=» como el signo que antecede a la respuesta de un cálculo. Comprender el signo igual es una cuestión clave, pero según Carpenter et al. (2005) el pensamiento relacional implica mucho más que utilizar el signo igual apropiadamente.

Más recientemente y desde otro contexto matemático, Empson, Levi y Carpenter (2011) indican que el pensamiento relacional implica el uso de las propiedades fundamentales de las operaciones y de la igualdad para analizar un problema, cuya resolución se puede visualizar como un *esquema de acciones* a realizar u objetivos parciales a lograr para progresivamente simplificar o reducir la expresión hasta alcanzar el objetivo final. Desde esta postura se entiende que el uso de propiedades fundamentales para generar un esquema de acciones de este tipo y transformar la expresión puede ser explícito o estar implícito en la lógica del razonamiento de los niños. Por ejemplo, para calcular $1/2+3/4$ un niño puede pensar que $3/4$ es igual a $1/2+1/4$ y razonar que $1/2$ más otro $1/2$ es igual a 1, después agregar el $1/4$ restante para llegar al número mixto $1\,{}^{1}\!/_{4}$. En el razonamiento expuesto se infiere el uso implícito de la propiedad asociativa de la suma. Esta solución del problema evidencia lo que se conoce como *pensamiento anticipativo*[1], la misma implica flexibilidad de pensamiento en relación con la cantidad $3/4$ y en relación con la operación, teniendo en cuenta ambas situaciones a la vez y no separadamente como pasos a seguir aislados unos de otros. El principio de anticipar las acciones también es señalado por Molina (2006) cuando indica que el pensamiento

[1] Un constructo introducido por Piaget (1960) para caracterizar el uso de estructuras psicológicas que posibilitan coordinar el logro de un objetivo con los objetivos parciales usados para lograrlo.

relacional «es la actividad intelectual (interna) consistente en examinar objetos o situaciones matemáticas…, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objetivo» (p. 62), este propósito se traduce en la búsqueda de una estrategia de solución.

Sentido estructural

La noción de sentido estructural, según cita Vega-Castro, Molina y Castro (2011), surge del análisis del trabajo con expresiones algebraicas, al distinguir entre las posibles actuaciones aquellas que hacen un uso efectivo de la estructura particular de las expresiones y de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. Este constructo se refiere, de forma general, a una colección de habilidades relacionadas con transformar expresiones algebraicas, que permite hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas (Linchevski y Livneh, 1999).

El constructo sentido estructural fue utilizado por vez primera por Linchevski y Livneh (1999). Sin embargo, estas autoras no abordaron la concreción de la noción sentido estructural. Posteriormente, Hoch y Dreyfus (2004, 2006) realizan varias investigaciones centradas en este constructo. Avanzan en la definición del mismo presentando varios descriptores que permiten identificar si un estudiante está utilizando sentido estructural en el contexto del álgebra escolar. En la Tabla 1, procedente de Vega-Castro et al. (2011) se recoge la definición de dichos descriptores y ejemplos de los mismos.

Tabla 1. *Descriptores del sentido estructural procedentes del estudio de Hoch y Dreyfus (2006)*

Descriptor	Definición	Ejemplos de Actuaciones
SS1	Reconocer una estructura familiar en su forma más simple.	Al factorizar $81–x^2$, reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, e identificar los factores $(9–x)(9+x)$.
SS2	Tratar un término compuesto como una única entidad y reconocer una estructura familiar en una forma más compleja.	Al factorizar $(x–3)^4 – (x+3)^4$ tratar los binomios $(x–3)^2$ y $(x+3)^2$ como una sola entidad, reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, e identificar los factores implicados.
SS3	Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.	En las tareas anteriores, aplicar la igualdad notable diferencia de cuadrados $a^2–b^2 = (a–b)(a+b)$ para factorizar dichas expresiones.

Hoch y Dreyfus (2006) realizan una subdivisión a los descriptores SS2 y SS3, mostrados en la Tabla 1, de acuerdo a la complejidad de los términos que componen las expresiones con las cuales se está trabajando, es decir, términos compuestos con productos o potencias o compuestos con suma o resta. Estos autores para promover el sentido estructural proponen tareas que incluyen clasificar, comparar y factorizar expresiones, resolver ecuaciones, y crear nuevos ejemplos con el objetivo de animar a los estudiantes a aprender a buscar y reconocer las estructuras propuestas en su forma más simple, y en formas más complejas, así como diferenciar entre ecuaciones y expresiones.

Como consecuencia de un estudio exploratorio[2] (Vega-Castro, 2010) relacionado con el constructo sentido estructural y después de observar que la definición aportada por Hoch y Dreyfus en 2006 no implicaba la especificidad de las tareas para el trabajo propuesto, las investigadoras realizan una extensión de la caracterización del sentido estructural (Vega-Castro, Molina y Castro, 2012). Deciden añadir como descriptores del sentido estructural los siguientes: reconocer relaciones entre subestructuras, considerar formas alternativas de transformar una expresión algebraica, anticipar la utilidad de transformaciones algebraicas en una expresión e identificar el rango de variación permisible para las variables involucradas. En una ampliación realizada a este estudio exploratorio, aún no publicada, las autoras proponen tareas de comprobar, completar espacios, generalizar y generar expresiones de estructura similar a otras dadas; todas persiguen el propósito de que el alumno perciba las estructuras y subestructuras dentro de una expresión algebraica.

Respecto al término estructura, Molina (2012) reconoce un doble significado del mismo, la estructura externa de una expresión y la estructura interna. La estructura externa se refiere a los términos que componen la expresión, los signos que los relacionan, el orden de los diferentes elementos y las relaciones que existen entre ellos. Por su parte, la estructura interna se refiere al valor de dicha expresión y a las relaciones de los componentes de la expresión con el mismo. Otro trabajo enfocado en el estudio del sentido estructural ha sido realizado por Lüken (2012) quien realiza un estudio con niños de 6 y 7 años de edad. Define sentido estructural temprano como reconocer patrones y estructuras, comprender y usar estructuras, tener capacidad de estructuración espacial.

El pensamiento relacional y el sentido estructural

Las apreciaciones nuestras, respecto a los puntos comunes y divergentes relativos a estos dos constructos no son definitivas e inflexibles; consideramos que conforme se avanza en el estudio de ambas nociones es posible que se llegue a dilucidar aspectos que permitan establecer límites o semejanzas de mayor calado. Compartimos la visión expuesta por Molina (2012) quien expresa que son dos constructos difíciles de definir y concretar; esta circunstancia ha limitado la consecución del objetivo de este trabajo referente a esclarecer los límites y alcances de las nociones pensamiento relacional y sentido estructural.

Ambas nociones se refieren a una manera de considerar las expresiones numéricas y algebraicas, ambas implican ver estos objetos de manera global, considerarlas como

[2] Estudio que ha sido ampliado y profundizado en la tesis doctoral en curso desarrollada por Danellys Vega-Castro bajo la dirección de las doctoras Encarnación Castro y Marta Molina.

totalidades y no como partes integradas por números, operaciones o literales que no mantienen un enlace entre sí. En relación con el pensamiento relacional Molina (2006) indica «se encuentra vinculado con el uso de sentido estructural ya que este sentido incluye la capacidad de considerar las expresiones aritméticas o algebraicas así como la totalidad de la igualdad, sentencia o expresión como entidad» (p. 97). En las acciones que deben realizar las personas cuando han de afrontar tareas como las propuestas en las investigaciones de pensamiento relacional, se reconocen actuaciones propias del sentido estructural. Así Molina (2006) destaca que cuando hay que identificar o establecer relaciones matemáticas es necesario identificar subestructuras.

En cuanto a la caracterización que se desprende de los estudios revisados encontramos que la presencia del pensamiento anticipativo es un elemento común presente en las caracterizaciones de ambos constructos. Considerando que una de las características que definen el aprendizaje con comprensión son las conexiones entre conocimientos, destacamos que los estudiantes que aplican el pensamiento relacional y el sentido estructural, usan un conjunto de principios matemáticos elementales para establecer relaciones y percibir estructuras. Desde este punto de vista, el pensamiento relacional y el sentido estructural se pueden considerar como dos maneras de especificar el tipo de conexiones que son productivas para conseguir un aprendizaje con comprensión.

Agradecimiento

La segunda autora agradece el patrocinio de beca doctoral otorgada por la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) de la República de Panamá.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215-241.

Carpenter, P., Levi, L., Loef, M. y Koehler, J. (2005). Algebra in elementary school: developing relational thinking. *Analyses*, *37*(1), 53-59.

Empson, S., Levi, L., y Carpenter, T. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 49-56). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 305-

312). Praga, República Checa: Charles University in Prague.

LINCHEVSKI, L. y LIVNEH, D. (1999) Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.

LÜKEN, M. M. (2012). School starters' early structure sense. *PNA, 7*(1), 41-50.

MOLINA, M. (2006). *Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

MOLINA, M. (2012). *Proyecto investigador. Plaza de Profesor Titular de Universidad*. Granada, España: Universidad de Granada.

VEGA-CASTRO, D., (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables*. Tesis de Maestría, Universidad de Granada, España.

VEGA-CASTRO, D., MOLINA, M. y CASTRO, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández y J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp. 575-586). Ciudad Real, España: SEIEM.

VEGA-CASTRO, D., MOLINA, M. y CASTRO, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(2), 233-258.