Estudio del comportamiento de atractores extraños con Cabri

Alicia Noemí Fayó
Presidente del Grupo XVIII. Investigación en Matemática Educativa
Profesora en la Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad Tecnológica Nacional, Regional General Pacheco
Buenos Aires, Argentina
aliciafayo@ciudad.com.ar

Resumen

Los Atractores resultan ser uno de los temas vigentes en la actualidad, más aun los Atractores Extraños que presentan un desafío inquietante a los matemáticos; permitiendo mostrar a los estudiantes una forma de descripción de situaciones caóticas simples además del método de investigación científica asistido por computadora. Es así que la modelización de los mismos, mediante programas acordes a su estructura, se convierte en una herramienta imprescindible para su interpretación e investigación. Mediante la Geometría Dinámica en Cabri se amplía el desafío convirtiéndolo además en un tema apto para la transposición didáctica. No debemos olvidar tampoco que la descripción de las propiedades, determinación de las condiciones iniciales, y la caracterización del caos, es utilizada por otras ciencias para develar, conjeturar y comprender fenómenos propios de sus campos de investigación. Con Cabri los estudiantes pueden graficar con distintos métodos, geométricos o a partir del cálculo numérico (como el método de resolución de Runge y Kutta de cuarto orden para la resolución aproximada de sistemas dinámicos). Desde ya sabemos que otros programas pueden obtener la representación de miles de puntos (se mostrarán gráficos en Matlab), donde además existen procedimientos estructurados para que ingenieros y especialistas los apliquen sin necesidad de hacer muchas preguntas. Cabri permitirá apreciar la construcción paso a paso de este método, y en consecuencia observar parámetros y valores que sus descubridores determinaron con precisión para poder hallar los atractores. Esa construcción permite la comprensión del tema por parte del estudiante que se inicia, induciéndolo a conjeturar y redescubrir las propiedades de los Atractores Extraños.

Introducción

Antecedentes: El precursor del descubrimiento de los fractales fue Jules Henri Poincaré (1854-1912). Uno de los matemáticos más importantes del siglo XIX y comienzos del XX. Tenía un conocimiento profundo de las ciencias pero además una gran capacidad y sencillez para trasmitir los conceptos. Su mente brillante sintetizaba varios aspectos de la Matemática y de la Física. Con referencia al tema que nos convoca, estudió las ecuaciones diferenciales y funciones. Dos matemáticos también franceses, Gastón Julia y Pierre Fatou hacia 1918 continuaron con sus estudios sobre funciones especiales. Gastón Julia fue uno de los primeros en estudiar los fractales y en explicar cómo se pueden crear a partir de una función compleja. A partir de 1974 el Dr. Benoît Mandelbrot que trabajaba en el Centro de Investigación Thomas John Watson de IBM, utilizó la computadora digital, en auge por aquellos tiempos, para realizar sus experimentos. Retomó el estudio realizado por Juliá. Hoy, Mandelbrot es considerado el padre de la geometría fractal. En honor a él, al igual que a Julia, los conjuntos que investigaron fueron denominados respectivamente con sus nombres. Comienzan a sorprender de esta manera los resultados que se obtienen mediante funciones iterativas. En ambos casos se estudió la función compleja $f(z) = z^2+c$, utilizando distintas semillas. Por otra parte, surgió en el siglo XX otro estudio independiente del anterior, se trata de sistemas dinámicos especiales a los que se les adjudicó el nombre de extraños y después de cierto tiempo se descubrió que ambos temas estaban vinculados. Como se sabe los sistemas matemáticos útiles para modelar los fenómenos de las ciencias naturales, emplean en sus ecuaciones varias variables y parámetros. En un principio se supuso que con las ecuaciones continuas y derivables se podía obtener una modelización correcta de los fenómenos, pero muchos de ellos no cumplían con este objetivo. El descubrimiento de funciones iterativas, es decir funciones que a partir de un punto inicial del dominio hallan su imagen y llevan a este valor como nuevo elemento del dominio del que vuelven a calcular su imagen, o de sistemas de ecuaciones diferenciales donde en cada instante se puede ubicar el punto imagen surgen nuevos conceptos y características que cumplen con el anhelo de muchas ciencias para que la matemática modelice sus estudios. Pero la sorpresa fue que al calcular la dimensión de estos sistemas resultó que tienen dimensión fractal. De ahí la vinculación entre ambas caracterizaciones.

Presentación

Los sistemas dinámicos atractores extraños

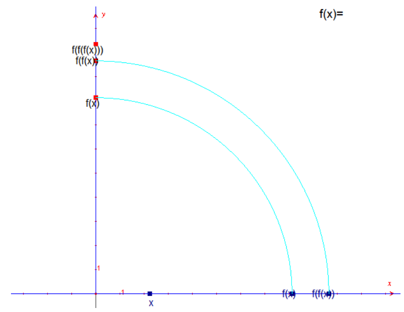
En primer lugar se deben aclarar visualmente algunos conceptos ¿Qué es una función iterativa?.

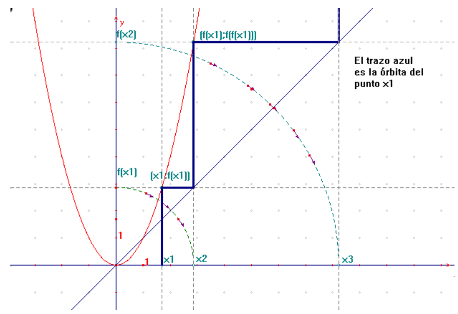
$$(x; f(x)),\ (f(x); f(f(x))), \ldots$$

Para su comprensión se procede a mostrar en primer lugar una función simple que $f(x)$, luego se representa un punto x. A su abscisa se la somete a esa expresión para buscar la imagen en la función.

Luego se representa la curva correspondiente a $f(x)$. Se observa qué representan los puntos considerados en la iteración de la función. Todos los puntos representativos de las imágenes quedan sobre la curva. Se realiza una construcción auxiliar. Con segmentos, se une cada valor del dominio con su imagen y se destaca que la bisectriz del primer cuadrante, cumple un papel muy importante para facilitar la búsqueda de la órbita.

Se puede considerar un segmento menor desde la bisectriz hasta la imagen y de esa manera





no se necesita representar los segmentos desde el punto x del dominio hasta su imagen, cosa que hace muy complicada y desprolija la representación. Esa escalerita que queda representada se llama órbita del punto x.

A continuación se aborda el tema:

En primer lugar se debe reconocer que el tema debe ser encarado desde dos puntos de vista: el cualitativo y cuantitativo. Pero aquí sólo se tendrá en cuenta el primer aspecto ya que es el que corresponde al estudio con software de representación dinámica.

Para la introducción en el tema se aclara la diferencia entre sistemas discretos y continuos.

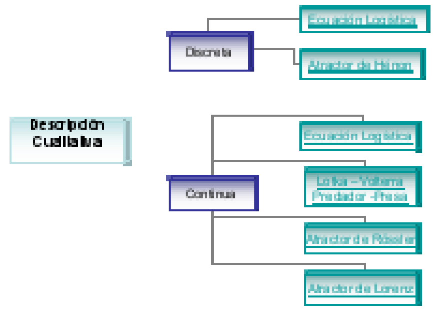
Los sistemas discretos son aquellos en los que una o varias variables toman valores en intervalos determinados de tiempo. En cambio en los sistemas continuos las variables son funciones del tiempo que obedecen a ecuaciones diferenciales.[1] En los sistemas dinámicos existen variables dinámicas como la posición, la velocidad, etc., pero además, existen variables estáticas que son los parámetros (o constantes).

En este cuadro se observa que la ecuación logística está considerada en las dos clasificaciones. Esta ecuación en su aspecto discreto ayudará a comprender los otros sistemas.

Ecuación Logística

Pierre Verhulst (1804 - 1849) fue un matemático belga que en 1839, introdujo la solución de la ecuación logística, en la teoría de la dinámica del crecimiento de una población, dando una interpretación a los estudios realizados por su amigo Adolphe Jacques Quetelet (1796 - 1874) del que se puede citar el siguiente pensamiento que ayudará a comprender

[1] Yorke, James A. Gregori, C.Ott, E. Science . Octubre 1987 Vol 238 (pág 16)



cual era la problemática que los inspiraba: “cuando una población puede desarrollarse libremente sin obstáculos, crece según una progresíón geométrica; si el desarrollo tiene lugar en medio de obstáculos de toda especie, tiende a detenerse y, a mantenerse en forma uniforme si la situación social no cambia, la población no aumenta de una manera indefinida, sino que tiende cada vez más a hacerse estacionaria”. (*Sur l'homme* (1845)).

Si se considera en términos matemáticos un factor de crecimiento que llamamos c y que $f(x)$ se llama x_1 se puede escribir de la siguiente manera para las funciones iterativas

$$x_1 = cx_0$$

En la siguiente iteración

$$x_2 = cx_1$$

En la próxima

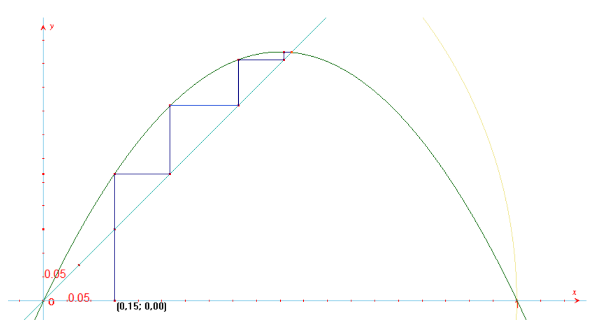
$$x_3 = cx_2 = c^2 x_1$$

Esto significa que si c es mayor que 1, hay un crecimiento que no tiene barreras.

Verhulst encuentra una forma para expresar una barrera.

Esas ecuaciones son consideradas a su vez por Robert May, que las normaliza, es decir, que considera la función variando en un dominio entre 0 y 1 pero agrega una restricción más, el factor de crecimiento puede valer hasta 4.

En Cabri la representación es la siguiente:



La Ecuación logística de François Verhulst normalizada por Robert May tiene la siguiente expresión:

$$x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$$

¿Qué se puede observar aquí? Los llamados puntos fijos. Estos son los primeros atractores que se descubren. Por ejemplo si c vale 2,1 qué pasa si el valor inicial de la población es distinto. Recordando que x representa el valor inicial de la población, se puede estudiar la variación de la órbita de ese punto.

Se observa que se acercan a un punto y quedan en equilibrio. Traducido es que una vez que la población alcanza estos valores parece llegar a la estabilidad. Pero no hay que conformarse con valores establecidos, se hace crecer a c. ¿Cuál es el comportamiento?

Se encuentra otro tipo de atractor, un ciclo atractor y finalemente cuando c supera el valor 4, comenzamos a introducir el concepto "Caos".

Atractor de Michel Hénon

A continuación se realiza la descripción de un sistema sencillo en dos dimensiones descubierto por el físico francés Michel Hénon, nacido en París en 1931, a quien se le debe uno de los atractores extraños más reveladores y simples.

Durante su tesis doctoral en 1960 empezó a trabajar con el tema de cúmulos globulares y las consecuencias de la llegada de una tercera estrella a un sistema binario, que desencadenaron en lo que Hénon bautizó como "colapso gravotérmico".

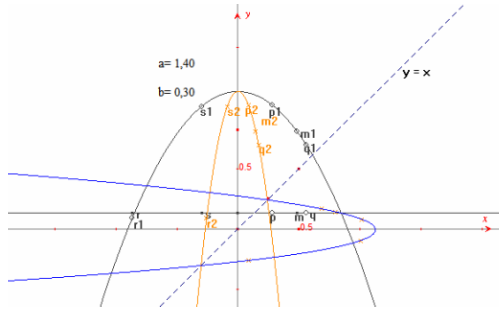
Trabajó en el Instituto de Astrofísica de París y 5 años más tarde que Lorenz diera a conocer sus trabajos, Hénon descubrió un sistema dinámico capaz de explicar las oscilaciones sufridas por ciertos entes astronómicos que se desviaban ligeramente de la trayectoria elíptica predicha por las leyes que rigen la Astronomía.

Transformaciones de Hénon

- Alargamiento
$$H_1(x, y) = (x, y + 1 - ax^2)$$
- Contracción
$$H_2(x, y) = (bx, y)$$
- Reflexión o plegado
$$H_3(x, y) = (y, x)$$

Se analiza el Atractor de Michel Hénon, basado en tres transformaciones sencillas, el que permite ir abordando temas como el alargamiento, contracción y plegado, en un atractor extraño.
$$H(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx)$$

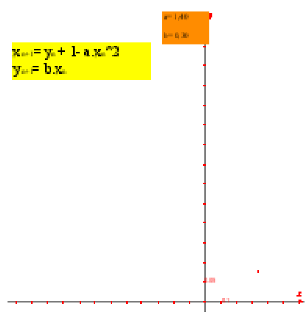
$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_{n^2}$$
$$y_{n+1} = bx_n$$



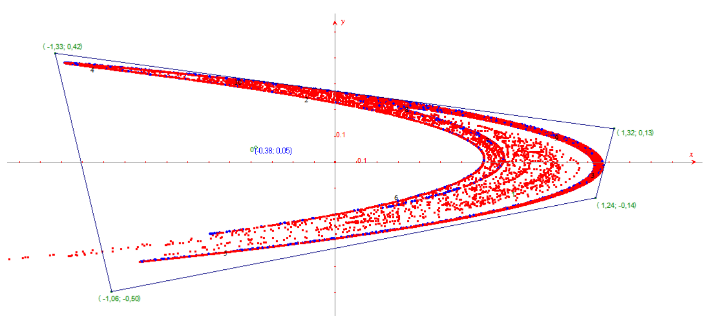
Se aprovecha este momento para mostrar una de las diferencias con otros software. Se observa que para representar en otros software debimos aprender a programar, salvo que las ecuaciones no estén ya consideradas en módulos especiales del programa, lo cual hace todavía más lejana ;la construcción del concepto.

En Cabri se representa primero la iteración de 2 D en 2 D. Es decir se iteran las coordenadas de un punto del plano. Son sometidas a un sistema de dos ecuaciones y de allí se obtiene el punto imagen.

Se continúa iterando.



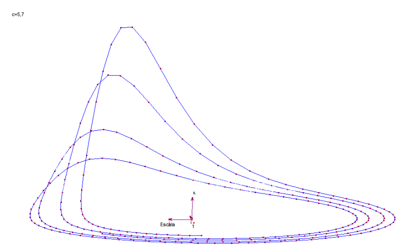
Para hacer un poco más rápida la representación y no agotar los recursos de la memoria de la computadora se puede proceder de esta manera: una pequeña trampita permite estudiar cómo se comportan estos puntos. Se les da traza a cada uno de los que forman parte de la órbita del punto inicial. Luego se cambia la posición del punto inicial y se observa la dependencia de dicha órbita del cambio de las condiciones iniciales.



Se coloca el punto inical fuera del cuadrilátero marcado y nuevamente se puede iniciar la construcción del concepto de “Caos”. Por esta cualidad de ser caóticos, se les adjudica a estos Atractores el nombre de Extraños.

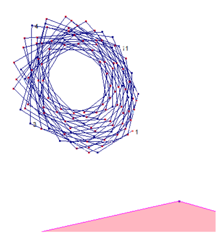
Atractor de Rössler

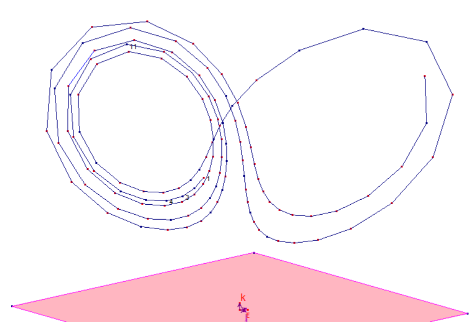
Finalmente se realiza el estudio en base al método de Runge - Kutta de cuarto orden para resolución del valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias para lograr, la representación del **Atractor de Rössler** en 3 dimensiones. Se obtiene la representación utilizando una terna adecuada en el programa Cabri II PLus.



Atractor de Edward Lorenz

A esta altura se está capacitado para abordar el estudio más importante. E. Lorenz descubrió el famoso “Efecto Mariposa”. Realizando un trabajo análogo al anterior (Atractor de Rössler) se puede llegar a representar el Atractor de Lorenz en el espacio. Para ello nuevamente se utiliza la terna adecuada en Cabri II Plus.





Bibliografía

[1] SPIEGEL, MURRAY, R. *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1983.

[2] HABERMAN, R. *Mathematiclas Models, Mechanical Vibrations, Population Dynamics and Traffic Flow* (Siam, 1988). Secciones 48-53.

[3] ARROWSMITH, D.K. Place, C.M.: *Ordinary Differential Equations*. Chapman and Hall 1982. Secciones 3.8-3.9.

[4] LORENZ, E. *Deterministic non-periodic flow, Journal of the Atmospheric Sciences*. 20, 1963, pages. 130-141.

[5] CRUTCHFIELD, J., FARMER, J., PACKARD, N., SHAW, R. *Caos*. Ed. Labor

[6] AGUILERA, N. *Un paseo por El Jardín de los Fractales*. Ed. Red Olímpica, 1995.

[7] AGUILERA, N. *Introducción a la computación en Matemática usando Mathematica*. Ed. Red Olímpica, 1995.

[8] AGUILERA, N. *Invitación al Cálculo con computación usando Mathemática*. Ed. Red Olímpica. 1998.

[9] NAKAMURA, S. *Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab*. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. 1997.

[10] ETTER, D. *Solución de Problemas de Ingeniería con Matlab*. Ed. Prentice Hall. 2° edición, 1997.

[11] PEITGEN, H., JÜRGENS, H., SAUPE, D. *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*. Springer Verlag, 1992.

[12] GREBOGI, C., EDWARD, Y., JAMES A. *Chaos: Strange Attractors, and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear Dynamics*. Science. 238, 1987, Págs. 585-718.

[13] RAÑADA, A. *Movimiento caótico. Investigación y ciencia*. 114, 1986. Págs. 12-23.

[14] OTERO, D. *Métodos Determinísticos y/o Estadísticos (o como convivir con el caos). Apuntes editados en la UTN.* 2000. Págs. 17-20.

[15] ABRAMSON, N. *Information Theory and Coding*. Versión española *Teoría de la información y codificación.*

[16] REY, P., BABINI, J. *Historia de la Matemática*. Vol 2. Del Renacimiento a la Actualidad. Ed Codisa. Barcelona. España. 1986.

[17] RICHARD, M. *Historia de la Matemática*. Ed. Paidos. 2000.

[18] MANDELBROT, B. *La geometría fractal de la naturaleza*. Matemas 49. Trd.López Llosa. Tusquets Editores.1997. Pág 31.

[19] GUZMÁN, M. *Aventuras Matemáticas, Una aventura hacia el caos y otros episodios*. Ed. Pirámide.1997. 223-224.

Páginas Web visitadas

http://fractales.org/caos/henon.shtml sobre Michel Hénon
http://www.revistapersona.com.ar/11Ramella02-2.htm Quetelec y Verhust Lotka
http://www.arrakis.es/˜chaman/fractales/feingen.htm Feigenbaum
http://www.connectedglobe.com/tbrf/feigenb.htm
www.inamori-f.or.jp/KyotoPrizes/contents_e/ laureates/profile/co_07infedward.html
www.txtnet.com/mathlib/pdf/puisscontinu.pdf. 03. Apprivoiser L.Infini