ALGUNAS SUMAS EN LA TABLA PITAGÓRICA DE MULTIPLICAR

Haydee Jiménez Tafur
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
jimenezhaydee@gmail.com

Diana Domínguez Patiño
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
anaidlucia@gmail.com

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
caluque@uni.pedagogica.edu.co

Resumen

Presentamos algunos resultados obtenidos con niños entre 11 y 16 años que asistieron al Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en el I semestre de 2006. La actividad con los niños inicia con la tabla pitagórica de multiplicar, proponiéndoles que realicemos algunas sumas en ella. Sumamos filas, diagonales y gnomones, y con ello obtenemos la suma de los primeros n números naturales, pares, impares, triangulares, cuadrados y cúbicos.

1. La tabla pitagórica

Ubiquemos las tablas de multiplicar correspondientes a cada número natural, en una sola tabla que llamaremos la tabla pitagórica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	...
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	...
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	...
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	...
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	...
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	...
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	...
9	18	27	26	45	54	63	72	81	90	99	108	...
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	...
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	...
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabla 1

2. Suma de filas

Iniciemos nuestra actividad sumando los números por filas; primero sumemos los primeros 2 números de la fila 1, los primeros 3 números, los primeros 5, los primeros 10 y así sucesivamente, como en la siguiente lista:

$$\begin{aligned}
1+2&=3\\
1+2+3&=6\\
1+2+3+4&=10\\
1+2+3+4+5&=15\\
1+2+3+4+5+6&=21\\
1+2+3+4+5+6+7&=28\\
1+2+3+4+5+6+7+8&=36\\
1+2+3+4+5+6+7+8+9&=45\\
1+2+3+4+5+6+7+8+9+10&=55
\end{aligned}$$

con unos pocos casos nos damos cuenta de que debemos buscar una forma que sirva para todos los casos.

¿Hay alguna manera de sumar los primeros 500 números naturales sin hacer todos los cálculos?

$$1+2+3+4+5+6+\cdots+500= \ ?$$

Un método consiste en colocar en una fila los números naturales y en una segunda fila escribir la misma suma pero con los sumandos en el orden opuesto y sumar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & 500\\
500 & + & 499 & + & 498 & + & 497 & + & \cdots & + & 1\\
\hline
501 & + & 501 & + & 501 & + & 501 & + & \cdots & + & 501
\end{array}$$

Notamos que en todos los casos la suma es la misma, y ésta se repite 500 veces, es decir, la suma total es (500)(501); pero como se realiza una doble suma, hay que dividir el resultado entre dos, con lo que obtenemos que:

$$1+2+3+4+5+6+\cdots+500=\frac{(500)(501)}{2}$$

Observamos que éste procedimiento se puede emplear para hallar la suma de los primeros n números naturales, sin importar que tan grande sea n, o sea:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & n\\
n & + & n-1 & + & n-2 & + & n-3 & + & \cdots & + & 1\\
\hline
n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1
\end{array}$$

Entonces,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Los números que obtenemos al realizar estas sumas parciales para cada número natural n, se conocen como *números triangulares*, debido a la disposición geométrica que de ellos hacían los pitagóricos

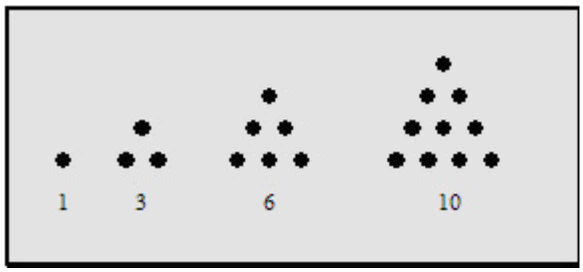

Figura 1

Los primeros de ellos son:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, \ldots$$

Localicemos ahora los números triangulares en la tabla 1, marcándolos[1] con negrilla y observemos:

1	2	**3**	4	5	**6**	7	8	9	**10**	11	12	...
2	4	**6**	8	**10**	12	14	16	18	20	22	24	...
3	6	9	12	**15**	18	**21**	24	27	30	33	36	...
4	8	12	16	20	24	**28**	32	**36**	40	44	48	...
5	10	15	20	25	30	35	40	**45**	50	**55**	60	...
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	**66**	72	...
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	...
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	...
9	18	27	26	45	54	63	72	81	90	99	108	...
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	...
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	...
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabla 2

Tratemos ahora de relacionar los números triangulares con la fila y la columna en que se

[1] La elección de la fila y la columna en donde marcamos los números es una sugerencia del profesor.

encuentran; notamos que:

$$\begin{aligned}
3 &= 1 \times 3\\
6 &= 2 \times 3\\
10 &= 2 \times 5\\
15 &= 3 \times 5\\
21 &= 3 \times 7\\
28 &= 4 \times 7\\
36 &= 4 \times 9\\
45 &= 5 \times 9\\
55 &= 5 \times 11
\end{aligned}$$

Como en los factores, cada número distinto de 1 está repetido, podemos hacer con ellos dos grupos:

$$\begin{aligned}
3 &= 1 \times 3 & \qquad 6 &= 2 \times 3\\
10 &= 2 \times 5 & 15 &= 3 \times 5\\
21 &= 3 \times 7 & 28 &= 4 \times 7\\
36 &= 4 \times 9 & 45 &= 5 \times 9\\
55 &= 5 \times 11 & 66 &= 6 \times 11
\end{aligned}$$

El primer grupo corresponde a las sumas de números naturales con un número par de términos, es decir:

$$\begin{aligned}
1+2 &= 1 \times 3 & \qquad n &= 2\\
1+2+3+4 &= 2 \times 5 & n &= 4\\
1+2+3+4+5+6 &= 3 \times 7 & n &= 6\\
1+2+3+4+5+6+7+8 &= 4 \times 9 & n &= 8
\end{aligned}$$

El primer factor es $\frac{n}{2}$, el segundo es $(n+1)$ y su producto es $\frac{n}{2}(n+1)$, lo que significa que, si n es par:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

El segundo grupo corresponde a las sumas de números naturales con un número impar de términos:

$$\begin{aligned}
1+2+3 &= 2 \times 3 & \qquad n &= 3\\
1+2+3+4+5 &= 3 \times 5 & n &= 5\\
1+2+3+4+5+6+7 &= 4 \times 7 & n &= 7\\
1+2+3+4+5+6+7+8+9 &= 5 \times 9 & n &= 9
\end{aligned}$$

En este caso, el segundo factor es n, el primero es $\frac{n+1}{2}$ y su producto es $n\frac{(n+1)}{2}$, lo que significa que, si n es impar:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Hemos obtenido el mismo resultado por caminos distintos.

Consideremos ahora la segunda fila, queremos sumar los primeros n números pares ¿serán útiles los mismos métodos anteriores?

Apliquemos primero el segundo método, marcando con negrilla en la tabla 1 las sumas de los dos primeros términos, de los tres primeros, etc., una en cada fila para poderlas relacionar con el número de sumandos, en la siguiente forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
2	4	**6**	8	10	12	14	16	18	20	22	24	...
3	6	9	**12**	15	18	21	24	27	30	33	36	...
4	8	12	16	**20**	24	28	32	36	40	44	48	...
5	10	15	20	25	**30**	35	40	45	50	55	60	...
6	12	18	24	30	36	**42**	48	54	60	66	72	...
7	14	21	28	35	42	49	**56**	63	70	77	84	...
8	16	24	32	40	48	56	64	**72**	80	88	96	...
9	18	27	26	45	54	63	72	81	**90**	99	108	...
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	**110**	120	...
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	**132**	...
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabla 3

A diferencia del caso anterior, aquí no hay dos números en cada columna y sólo tenemos una situación:

$$2+4=6=2\times 3 \qquad n=2$$
$$2+4+6=12=3\times 4 \qquad n=3$$
$$2+4+6+8=20=4\times 5 \qquad n=4$$
$$2+4+6+8+10=30=5\times 6 \qquad n=5$$
$$2+4+6+8+10+12=42=6\times 7 \qquad n=6$$

El primer factor es n, el segundo es $n+1$ y su producto es $n(n+1)$, lo que significa que, para todo número natural n:

$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$$

El primer método también es aplicable aquí, pues

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
2 & + & 4 & + & 6 & + & 8 & + & \cdots & + & 2n \\
2n & + & 2(n-1) & + & 2(n- 2) & + & 2(n- 3) & + & \cdots & + & 2 \\
\hline
(2n + 2) & + & (2n + 2) & + & (2n + 2) & + & (2n + 2) & + & \cdots & + & (2n + 2)
\end{array}$$

El sumando $2n + 2$ aparece n veces, por tanto la suma total es

$$n(2n + 2) = 2n(n + 1),$$

que corresponde al doble de la suma que estamos buscando, entonces

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2\frac{n(n + 1)}{2} = n(n + 1)$$

Un método alternativo consiste en multiplicar por 2 en ambos lados de la igualdad, la fórmula que nos da la suma de los primeros n números naturales:

$$2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 2\frac{n(n + 1)}{2}$$

obteniendo el mismo resultado

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1).$$

Para encontrar la suma de los primeros n números múltiplos de 3, es decir, los correspondientes a la fila 3 de la tabla 1, podemos utilizar los tres métodos anteriores:

marcar las sumas con negrilla en la tabla, sumar la fila con ella misma en orden inverso o multiplicar la suma de los primeros números naturales por 3. El primer método nos da:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	...
3	6	**9**	12	15	**18**	21	24	27	30	33	36	...
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	...
5	10	15	20	25	**30**	35	40	**45**	50	55	60	...
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	...
7	14	21	28	35	42	49	56	**63**	70	77	**84**	...
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	...
9	18	27	26	45	54	63	72	81	90	99	**108**	...
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	...
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	...
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabla 4

Y si relacionamos estas sumas con la fila y la columna en que se encuentran, notamos que:

$$
\begin{aligned}
9 &= 3+6 = 3\times 3\\
18 &= 3+6+9 = 3\times 6\\
30 &= 3+6+9+12 = 5\times 6\\
45 &= 3+6+9+12+15 = 5\times 9\\
63 &= 3+6+9+12+15+18 = 7\times 9\\
84 &= 3+6+9+12+15+18+21 = 7\times 12
\end{aligned}
$$

y como en cada columna a partir de la 6, hay dos números, podemos separar los resultados en dos grupos, reordenando la igualdad, el primero correspondiente a las sumas de números múltiplos de 3, con un número par de términos, es decir:

$$
\begin{aligned}
3\times 3 &= 3+6 = 9 && n=2\\
5\times 6 &= 3+6+9+12 = 30 && n=4\\
7\times 9 &= 3+6+9+12+15+18 = 63 && n=6\\
9\times 12 &= 3+6+9+12+15+18+21+24 = 108 && n=8
\end{aligned}
$$

El primer factor es $n+1$, el segundo es $\frac{3n}{2}$ y su producto es $(n+1)\frac{3n}{2}$. O sea que si n es par

$$3+6+9+12+\cdots+3n = (n+1)\frac{3n}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$$

El segundo grupo corresponde a las sumas de números múltiplos de 3, con un número impar de términos, es decir:

$$
\begin{aligned}
3\times 6 &= 3+6+9 = 18 && n=3\\
5\times 9 &= 3+6+9+12+15 = 45 && n=5\\
7\times 12 &= 3+6+9+12+15+18+21 = 84 && n=7\\
9\times 15 &= 3+6+9+12+15+18+21+24+27 = 135 && n=9
\end{aligned}
$$

El primer factor es n, el segundo factor es $\frac{3(n+1)}{2}$ y su producto es $n\frac{3(n+1)}{2}$, es decir, si n es impar:

$$3+6+9+12+\cdots+3n = n\frac{3(n+1)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}.$$

En los dos casos hemos obtenido el mismo resultado ¡como debe ser!

El segundo método también es aplicable aquí:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
3 & + & 6 & + & 9 & + & 12 & + & \cdots & + & 3n\\
3n & + & 3(n-1) & + & 3(n-2) & + & 3(n-3) & + & \cdots & + & 3\\
\hline
(3n+3) & + & (3n+3) & + & (3n+3) & + & (3n+3) & + & \cdots & + & (3n+3)
\end{array}
$$

El sumando $3n+3$ aparece n veces, por tanto la suma total es

$$n(3n+3) = 3n(n+1),$$

que corresponde al doble de la suma que estamos buscando, entonces

$$\begin{aligned} 2(3+6+9+12+\cdots+3n) &= 3n(n+1) \\ 3+6+9+12+\cdots+3n &= \frac{3n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Y si aplicamos el último método, multiplicar por 3 en ambos lados de la igualdad, en la fórmula que nos da la suma de los primeros n números naturales,

$$3(1+2+3+\cdots+n) = 3\frac{n(n+1)}{2}$$

conseguimos de nuevo

$$3+6+9+12+\cdots+3n = \frac{3n(n+1)}{2}.$$

Ya podemos intuir una expresión para la suma de los primeros n múltiplos de k, observando las expresiones obtenidas:

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 2+4+6+8+\cdots+2n &= \frac{2n(n+1)}{2} \\ 3+6+9+12+\cdots+3n &= \frac{3n(n+1)}{2} \\ 4+8+12+16+\cdots+4n &= \frac{4n(n+1)}{2} \\ &\vdots \\ k+2k+3k+4k+\cdots+nk &= \frac{kn(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

3. Suma de gnomones

Los pitagóricos nos enseñaron a utilizar los gnomones[2] en tablas para obtener resultados interesantes, miremos que ocurre en la tabla 1 al utilizarlos:

[2]La palabra *gnomon* significó en Babilonia, una varilla vertical cuya sombra marcaba la hora. En la época de Pitágoras significaba una escuadra de carpintero y esta es la forma del *gnomon* que muestra la tabla 1. También significó lo que queda de un cuadrado al cortar otro cuadrado más pequeño en una de sus esquinas. Más tarde, con Euclides, su significado se amplió a lo que queda de un paralelogramo al cortar otro más pequeño en una de sus esquinas, siempre que éste fuera semejante al primero.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	n
2	**4**	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	...	$2n$
3	6	**9**	12	15	18	21	24	27	30	33	36	...	$3n$
4	8	12	**16**	20	24	28	32	36	40	44	48	...	$4n$
5	10	15	20	**25**	30	35	40	45	50	55	60	...	$5n$
6	12	18	24	30	**36**	42	48	54	60	66	72	...	$6n$
7	14	21	28	35	42	**49**	56	63	70	77	84	...	$7n$
8	16	24	32	40	48	56	**64**	72	80	88	96	...	$8n$
9	18	27	26	45	54	63	72	**81**	90	99	108	...	$9n$
10	20	30	40	50	60	70	80	90	**100**	110	120	...	$10n$
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	**121**	132	...	$11n$
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	**144**	...	$12n$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
k	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$	$6k$	$7k$	$8k$	$9k$	$10k$	$11k$	$12k$	...	kn

Tabla 5

Gnomon No.	Números que conforman el gnomon
1	1
2	2 4 2
3	3 6 9 6 3
4	4 8 12 16 12 8 4
5	5 10 15 20 25 20 15 10 5
6	6 12 18 24 30 36 30 24 18 12 6
7	7 14 21 28 35 42 49 42 35 28 21 14 7
⋮	
n	

Tabla 6

¿Cómo encontramos los números de un gnomon n?

Hallemos los números para el gnomon 8 y notémoslo G_8; para ello contamos sólo con una información: el número 8, por tanto observemos en los casos anteriores como del número del gnomon obtenemos los números que lo forman.

En la tabla 6 observamos que cada gnomon tiene un número impar de elementos:

En G_1 hay 1 elemento

En G_2 hay 3 elementos

En G_3 hay 5 elementos

En G_4 hay 7 elementos

En G_5 hay 9 elementos

En nuestro caso, G_8 tiene 15 números, que podemos escribir como:

$$2(8) - 1 = 16 - 1 = 15$$

y en general G_n tiene $2n - 1$ elementos.

El primer elemento de cada gnomon corresponde al número del mismo, luego el primer número de G_8 es el 8.

¿Cómo obtenemos los siguientes números de G_8? Tengamos en cuenta que sólo contamos con el número del gnomon y el primer número de éste.

Revisando los casos anteriores obtenemos lo siguiente,

$$G_5 = 5 \underbrace{\quad}_{5} 10 \underbrace{\quad}_{5} 15 \underbrace{\quad}_{5} 20 \underbrace{\quad}_{5} \mathbf{25} \quad 20 \quad 15 \quad 10 \quad 5$$
$$G_6 = 6 \underbrace{\quad}_{6} 12 \underbrace{\quad}_{6} 18 \underbrace{\quad}_{6} 24 \underbrace{\quad}_{6} 30 \underbrace{\quad}_{6} \mathbf{36} \quad 30 \quad 24 \quad 18 \quad 12 \quad 6$$
$$G_7 = 7 \underbrace{\quad}_{7} 14 \underbrace{\quad}_{7} 21 \underbrace{\quad}_{7} 28 \underbrace{\quad}_{7} 35 \underbrace{\quad}_{7} 42 \underbrace{\quad}_{7} \mathbf{49} \quad 42 \quad 35 \quad 28 \quad 21 \quad 14 \quad 7$$

Donde los números pequeños indican las diferencias entre cada par de números consecutivos del gnomon; es decir, que para obtener los otros números del gnomon, sumamos al anterior el número del gnomon, hasta llegar a un número que corresponde con el cuadrado del primer número del gnomon, luego volvemos a ubicar los números que teníamos pero de manera descendente. Siguiendo con nuestro ejemplo tenemos:

$G_8 = 8 \underbrace{\quad}_{8} 16 \underbrace{\quad}_{8} 24 \underbrace{\quad}_{8} 32 \underbrace{\quad}_{8} 40 \underbrace{\quad}_{8} 48 \underbrace{\quad}_{8} 56 \underbrace{\quad}_{8} \mathbf{64} \;\; 56 \;\; 48 \;\; 40 \;\; 32 \;\; 24 \;\; 16 \;\; 8$ De manera general para encontrar los $2n - 1$ números de G_n, tenemos que:

El primer número es n y corresponde al número del gnomon, después hallamos los primeros múltiplos de n hasta llegar a uno que resulta ser el cuadrado del número n, luego volvemos a ubicar los múltiplos que teníamos anteriores a n^2 pero de manera descendente, esto es:

$$G_n = n \quad 2n \quad 3n \quad \ldots \quad (n-1)n \quad n^2 \quad (n-1)n \quad \ldots \quad 3n \quad 2n \quad n.$$

Teniendo la expresión que nos permite conocer a todos los números que conforman un gnomon, ahora podemos sumarlos:

En G_1 no tenemos que sumar, pues sólo está el número 1.

En G_2 encontramos:

$$\begin{aligned} 2+4+2 &= 8 \\ 2+4+2 &= 2(2)+2^2 \\ &= 2^2+2^2 \\ &= 2(2^2) \\ &= 2^3 \end{aligned}$$

En G_3:

$$\begin{aligned} 3+6+9+6+3 &= 27 \\ (3+6)+9+(6+3) &= 32+32+32 \\ &= 3(3^2) \\ &= 3^3 \end{aligned}$$

En G_4:

$$\begin{aligned} 4+8+12+16+12+8+4 &= 64 \\ (4+12)+(8+8)+(12+4)+16 &= 42+42+42+42 = 4(42) = 43. \end{aligned}$$

De manera general en el gnomon G_n tenemos

$$\begin{aligned} G_n &= n+2n+3n+\cdots+(n-1)n+n^2+(n-1)n+\cdots+3n+2n+n \\ &= n(1+2+\cdots+(n-1))+n^2+n(1+2+\cdots+(n-1)) \\ &= n^2+(1+2+\cdots+(n-1))(2n) \\ &= n^2+\frac{n(n-1)}{2}2n \\ &= n^2+n^2(n-1) \\ &= n^3. \end{aligned}$$

Si la suma de cada gnomon es un número cúbico, entonces podemos hallar la suma de los primeros n números cúbicos, sumando los primeros n gnomones consecutivos:

1	2	3	4	5	6	7	...
2	**4**	6	8	10	12	14	...
3	6	**9**	12	15	18	21	...
4	8	12	**16**	20	24	28	...
5	10	15	20	**25**	30	35	...
6	12	18	24	30	**36**	42	...
7	14	21	28	35	42	**49**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Tabla 7

O sea que

$$\begin{aligned}
1^3+2^3 &= 1+(2+4+2)\\
1^3+2^3+3^3 &= 1+(2+4+2)+(3+6+9+6+3)\\
1^3+2^3+3^3+4^3 &= 1+(2+4+2)+(3+6+9+6+3)\\
&\quad +(4+8+12+16+12+8+4)
\end{aligned}$$

Pero esta suma la podemos realizar de otra forma, sumando los n primeros números de cada fila y luego sumando las n primeras filas, y la primera parte de este problema ya está resuelta, por tanto la suma de los primeros n números cúbicos es:

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots+n^3 &= 1+2+3+\cdots+n\\
&\quad +2+4+6+\cdots+2n\\
&\quad +3+6+9+\cdots+3n\\
&\quad +\cdots\\
&\quad +n+2n+3n+\cdots+n^2.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots+n^3 &= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n(n+1)}{2}+\frac{3n(n+1)}{2}+\cdots\\
&\quad +\frac{n^2(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)}{2}(1+2+3+\cdots+n)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

El número triangular $\frac{n(n+1)}{2}$ suele simbolizarse como T_n, luego el resultado anterior lo podemos escribir como

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots+n^3=(T_n)^2.$$

Una manera alternativa para obtener este resultado es:

$$\begin{aligned}
1^3+2^3 &= 1+(2+4+2)=1+8=9=32\\
1^3+2^3+3^3 &= 1+(2+4+2)+(3+6+9+6+3)=1+8+27=36=62\\
1^3+2^3+3^3+43 &= 1+(2+4+2)+(3+6+9+6+3)\\
&\quad +(4+8+12+16+12+8+4)=1+8+27+64=100=102\\
1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 &= 1+8+27+64+125=225=152
\end{aligned}$$

Al observar las potencias obtenidas anteriormente, tenemos que las bases corresponden a los números triangulares, luego escribiendo de otra forma tenemos:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 &= (T_2)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 &= (T_3)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= (T_4)^2 \end{aligned}$$

Entonces conjeturamos que la suma de los primeros n números cúbicos es:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + n^3 = (T_n)^2.$$

4. Suma de diagonales

Retomemos la tabla 1 y estudiemos sus diagonales, buscando encontrar la manera general de hallar los números que pertenecen a cada diagonal y la suma de cada una de ellas, así:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	...
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	...
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	...
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	...
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	...
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	...
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	...
9	18	27	26	45	54	63	72	81	90	99	108	...
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	...
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	...
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabla 8

Escribamos los números que conforman cada diagonal:

No. Diagonal	
1	1
2	2 2
3	3 4 3
4	4 6 6 4
5	5 8 9 8 5
6	6 10 12 12 10 6
7	7 12 15 16 15 12 7
8	8 14 18 20 20 18 14 8
9	9 16 21 24 25 24 21 16 9
10	10 18 24 28 30 30 28 24 18 10
11	11 20 27 32 35 36 35 32 27 20 11
$\vdots$	
n	

Tabla 9

¿Cómo encontramos los números de una diagonal n que llamaremos D_n? Tengamos en cuenta que para hallar los números que conforman una diagonal sólo contamos con el número de la diagonal.

En la tabla 9 notamos que el primer término de la diagonal es el número que la identifica y si la diagonal es par, al primer número de la diagonal le sumamos el par anterior a él, al resultado le sumamos el par anterior al sumado en el primer caso y así sucesivamente hasta llegar a sumar 2, luego volvemos a ubicar los números que teníamos pero de manera descendente.

Si la diagonal es impar, al primer número de la diagonal le sumamos el impar anterior a él, al resultado le sumamos el impar anterior al sumado en el primer caso y así sucesivamente hasta llegar a sumar 1, luego volvemos a ubicar los números que teníamos, excluyendo el obtenido en el último caso, pero de manera descendente.

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 1\\
D_2 &= 2\underbrace{\quad}_{0}2\\
D_3 &= 3\underbrace{\quad}_{1}4\ 3\\
D_4 &= 4\underbrace{\quad}_{2}6\underbrace{\quad}_{0}6\ 4\\
D_5 &= 5\underbrace{\quad}_{3}8\underbrace{\quad}_{1}9\ 8\ 5\\
D_6 &= 6\underbrace{\quad}_{4}10\underbrace{\quad}_{2}12\underbrace{\quad}_{0}12\ 10\ 6\\
D_7 &= 7\underbrace{\quad}_{5}12\underbrace{\quad}_{3}15\underbrace{\quad}_{1}16\ 15\ 12\ 7
\end{aligned}
$$

De manera general, si tenemos una diagonal par D_{2n}, el primer número de la diagonal es $2n$, para encontrar el siguiente número, a $2n$ le sumamos el par anterior a él, $2(n-1)$, luego al resultado que obtenemos le sumamos el par anterior a $2(n-1)$, es decir $2(n-2)$, a este nuevo resultado le sumamos el par $2(n-3)$ y así sucesivamente hasta llegar a sumar el par 2, luego repetimos de manera descendente los números que teníamos:

$$
\begin{aligned}
D_{2n} = {}&2n\\
&2n+2(n-1)\\
&[2n+2(n-1)]+2(n-2)\\
&[2n+2(n-1)+2(n-2)]+2(n-3)\\
&\dots\\
&[2n+2(n-1)+2(n-2)+2(n-3)+\cdots+2(3)]+2(2)]\\
&[2n+2(n-1)+2(n-2)+2(n-3)+\cdots+2(3)+2(2)]+2(1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[2n+2(n-1)+2(n-2)+2(n-3)+\cdots+2(3)+2(2)]+2(1)\\
&[2n+2(n-1)+2(n-2)+2(n-3)+\cdots+2(3)]+2(2)\\
&\dots\\
&[2n+2(n-1)+2(n-2)]+2(n-3)\\
&[2n+2(n-1)]+2(n-2)\\
&2n+2(n-1)\\
&2n.
\end{aligned}
$$

De manera similar hallamos los números que conforman una diagonal impar D_{2n-1}, donde el primer número corresponde a $2n-1$, el segundo número se consigue sumándole a $2n-1$ el impar anterior a él, es decir, $2(n-1)-1$, al resultado que obtenemos le sumamos el impar anterior a $2(n-1)-1$, que es $2(n-2)-1$, a este nuevo resultado le sumamos el impar $2(n-3)-1$ y así sucesivamente hasta llegar a sumar 1, luego repetimos los números que conseguimos, sin incluir el último que obtuvimos, de manera descendente.

$$\begin{aligned}
D_{2n-1} = 2n-1 \\
&(2n-1)+(2(n-1)-1) \\
&\ldots \\
&[(2n-1)+(2(n-1)-1)]+(2(n-2)-1) \\
&[(2n-1)+(2(n-1)-1)+(2(n-2)-1)]+(2(n-3)-1) \\
&[(2n-1)+(2(n-1)-1)+(2(n-2)-1)+(2(n-3)-1)+\cdots+5]+3 \\
&[(2n-1)+(2(n-1)-1)+(2(n-2)-1)+(2(n-3)-1)+\cdots+5+3]+1 \\
&[(2n-1)+(2(n-1)-1)+(2(n-2)-1)+(2(n-3)-1)+\cdots+5]+3 \\
&\ldots \\
&[(2n-1)+(2(n-1)-1)+(2(n-2)-1)]+(2(n-3)-1) \\
&[(2n-1)+(2(n-1)-1)]+(2(n-2)-1) \\
&(2n-1)+(2(n-1)-1) \\
&(2n-1).
\end{aligned}$$

Ya que tenemos los números que conforman cada diagonal, busquemos ahora una fórmula que nos de su suma. Para abordar este problema, tomemos primero las diagonales impares y luego las diagonales pares.

Sumemos los números que forman cada diagonal impar:

$$\begin{aligned}
SD_1 &= 1 \\
SD_3 &= 3 \underbrace{+}_{1} 4+3 \\
SD_5 &= 5 \underbrace{+}_{3} 8 \underbrace{+}_{1} 9+8+5 \\
SD_7 &= 7 \underbrace{+}_{5} 12 \underbrace{+}_{3} 15 \underbrace{+}_{1} 16+15+12+7 \\
SD_9 &= 9 \underbrace{+}_{7} 16 \underbrace{+}_{5} 21 \underbrace{+}_{3} 24 \underbrace{+}_{1} 25+24+21+16+9 \\
SD_{11} &= 11 \underbrace{+}_{9} 20 \underbrace{+}_{7} 27 \underbrace{+}_{5} 32 \underbrace{+}_{3} 35 \underbrace{+}_{1} 36+35+32+27+20+11
\end{aligned}$$

Observamos que en cada diagonal el número de sumandos es impar y corresponde al número de la diagonal, que se puede expresar de la forma $2n-1$, por ejemplo $D_{11} = D_{(2\times 6)-1}$, además el sumando que no se repite en cada diagonal, es un número cuadrado, en el caso de $D_1 1$, este número es 36 que es 62 y de manera general, en la diagonal D_{2n-1}

este número corresponde a n^2.

La diferencia entre los números que conforman las diagonales aparecen los números impares, por tanto siguiendo con nuestro ejemplo, podemos reescribir D11 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} SD_{11} = 11 & \\ &+ 11 + 9 \\ &+ 11 + 9 + 7 \\ &+ 11 + 9 + 7 + 5 \\ &+ 11 + 9 + 7 + 5 + 3 \\ &+ 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 \\ \\ \\ &+ 11 + 9 + 7 + 5 + 3 \\ &+ 11 + 9 + 7 + 5 \\ &+ 11 + 9 + 7 \\ &+ 11 + 9 \\ &+ 11 \end{aligned}$$

Aquí aparece la suma de los primeros n números impares, esta suma la podemos encontrar de la misma forma que empleamos para hallar la suma de los primeros n números naturales, obteniendo:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 3 & + & 5 & + & 7 & + & \cdots & + & \text{2n - 1} \\ 2n-1 & + & 2(n-1)-1 & + & 2(n-2)-1 & + & 2(n-3)-1 & + & \cdots & + & 1 \\ \hline 2n & + & 2n & + & 2n & + & 2n & + & \cdots & + & 2n \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + (2n-1)) &= (2n)n = 2n^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + (2n-1) &= n^2 \end{aligned}$$

Los *gnomones* también nos permiten descubrir esa relación entre números impares y números cuadrados:

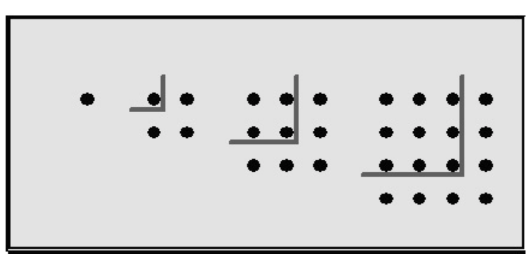

Figura 2

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1+3 = 4 &= 2^2 \\ 1+3+5 = 9 &= 3^2 \\ 1+3+5+7 = 16 &= 4^2 \\ 1+3+5+7+\cdots+(2n-1) &= n^2 \end{aligned}$$

Este resultado nos permite retomar la diagonal 11; vemos que a partir de 36 se repiten los sumandos, o sea que

$$\begin{aligned} SD_{11} &= 11+20+27+32+35+36+35+32+27+20+11 \\ &= 2(11+20+27+32+35)+36 \end{aligned}$$

por tanto trabajaremos con los 5 primeros sumandos:

$$\begin{aligned} SD_{11} &= 11 \\ &\quad +11+9 \\ &\quad +11+9+7 \\ &\quad +11+9+7+5 \\ &\quad +11+9+7+5+3 \end{aligned}$$

Completemos cada sumando para obtener en cada uno de ellos la suma de los 6 primeros números impares, restando la cantidad sumada para que el resultado no cambie:

$$\begin{aligned} &11+(\mathbf{9}+\mathbf{7}+\mathbf{5}+\mathbf{3}+\mathbf{1})-(\mathbf{1}+\mathbf{3}+\mathbf{5}+\mathbf{7}+\mathbf{9}) \\ &11+9+(\mathbf{7}+\mathbf{5}+\mathbf{3}+\mathbf{1})-(\mathbf{1}+\mathbf{3}+\mathbf{5}+\mathbf{7}) \\ &11+9+7+(\mathbf{5}+\mathbf{3}+\mathbf{1})-(\mathbf{1}+\mathbf{3}+\mathbf{5}) \\ &11+9+7+5+(\mathbf{3}+\mathbf{1})-(\mathbf{1}+\mathbf{3}) \\ &11+9+7+5+3+(\mathbf{1})-\mathbf{1} \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} &1+3+5+7+9+11 = 6^2 \\ &1+3+5+7+9 = 5^2 \\ &1+3+5+7 = 4^2 \\ &1+3+5 = 3^2 \\ &1+3 = 2^2 \\ &1 = 1^2 \end{aligned}$$

y $11 = (2\times 6)-1$, tenemos que

$$SD_{11} = D_{(2\times 6)-1} = 2\{5(6^2)-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)\}+6^2$$

Luego para encontrar la suma de la $2n-1$ diagonal, se tiene

$$SD_{2n-1} = 2[(n-1)n^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2)] + n^2$$

Y aquí aparece un nuevo problema[3] , debemos hallar la suma de los primeros n números cuadrados; para encontrarla, utilizaremos la siguiente tabla en la que cada gnomon es un número cuadrado,

$1^2 \leftarrow$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$4 = 2^2 \leftarrow$	1	2	2	2	2	2	2	2	2	...
$9 = 3^2 \leftarrow$	1	2	3	3	3	3	3	3	3	...
$16 = 4^2 \leftarrow$	1	2	3	4	4	4	4	4	4	...
$25 = 5^2 \leftarrow$	1	2	3	4	5	5	5	5	5	...
$36 = 6^2 \leftarrow$	1	2	3	4	5	6	6	6	6	...
$49 = 7^2 \leftarrow$	1	2	3	4	5	6	7	7	7	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabla 4

Por lo tanto la suma de los cuadrados corresponde con la suma de los gnomones:

$$\begin{aligned}
1^2 &= 1 = T_1 \\
2^2 &= (1+2) + 1 = T_2 + T_1 \\
3^2 &= (1+2+3) + (1+2) = T_3 + T_2 \\
&= \vdots \\
n^2 &= (1+2+3+4+\cdots+n) + (1+2+3+\cdots+(n-1)) = T_n + T_{n-1}
\end{aligned}$$

De paso, y sin proponérnoslo hemos encontrado una relación entre números triangulares y cuadrados,

$$n^2 = T_n + T_{n-1},$$

pero volviendo a la suma de los números cuadrados ésta es igual a:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \cdots + T_n) + (T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-1})$$

Nuevamente, nos encontramos con una suma que no conocemos, la suma de los números triangulares.

Ésta la podemos hallar de diversas maneras, una de ellas es usando el paralelepípedo (3-dimensiones)[4]:

[3]Esto es frecuente en la actividad matemática, resolviendo un problema aparecen otros problemas, algunas veces más interesantes que el primero.

[4]Tomado de NELSEN, R. (1993). *Proofs Without Words*. Washington, The Mathematical Association of America. p. 95.

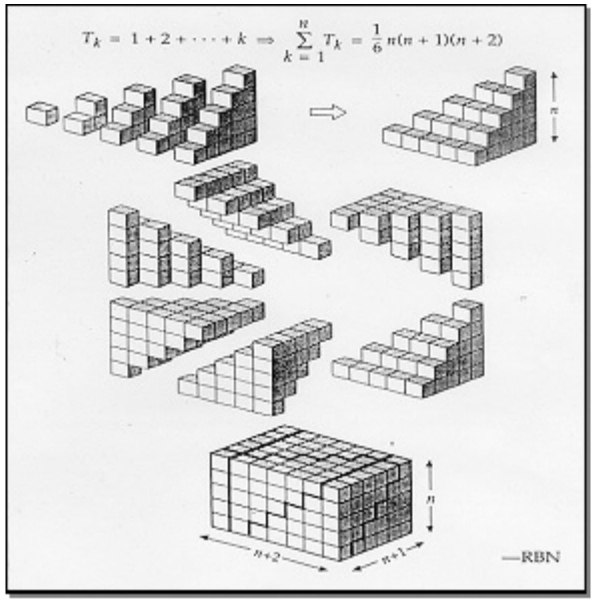

Figura 3

Donde se ensamblan seis copias de una figura que está formada por la suma de los primeros n números triangulares para formar un paralelepípedo de volumen $n(n+1)(n+2)$, o sea

$$6(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \cdots + T_n) = n(n+1)(n+2)$$
$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \cdots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Otra manera es la siguiente[5]:

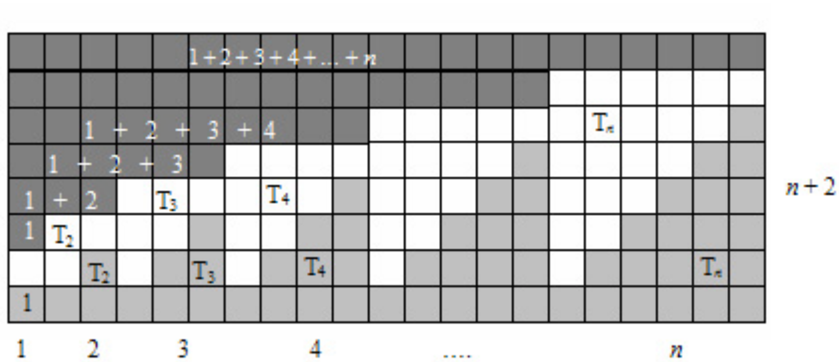

Figura 4

[5]Ibid, p. 94.

Donde observamos que:

$$3(T_1+T_2+T_3+T_4+\cdots+T_n)=(n+2)T_n$$
$$3(T_1+T_2+T_3+T_4+\cdots+T_n)=(n+2)\frac{(n+1)n}{2}$$
$$T_1+T_2+T_3+T_4+\cdots+Tn_{=}\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Resuelto este problema podemos ir en reversa y reemplazar en la suma de los cuadrados,

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=(T_1+T_2+T_3+T_4+\cdots+T_n)+(T_1+T_2+T_3+\cdots+T_{(n-1)})$$

el resultado para los triangulares obteniendo

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

que simplificamos como

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Y con este resultado hallamos la suma de las diagonales impares en la tabla pitagórica,

$$SD_{2n-1}=2[(n-1)n^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2)]+n^2$$

reemplazando,

$$SD_{2n-1}=2\left[(n-1)n^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\right]+n^2.$$

Ahora sumemos las diagonales pares:

$$SD_2=2\underbrace{+}_{0}2$$
$$SD_4=4\underbrace{+}_{2}6\underbrace{+}_{0}6+4$$
$$SD_6=6\underbrace{+}_{4}10\underbrace{+}_{2}12\underbrace{+}_{0}12+10+6$$
$$SD_8=8\underbrace{+}_{6}14\underbrace{+}_{4}18\underbrace{+}_{2}20\underbrace{+}_{0}20+18+14+8$$
$$SD_{10}=10\underbrace{+}_{8}18\underbrace{+}_{6}24\underbrace{+}_{4}28\underbrace{+}_{2}30\underbrace{+}_{0}30+28+24+18+10$$

Vemos que en cada diagonal el número de sumandos es par y corresponde al número de la diagonal, que expresamos de la forma $2n$, por ejemplo $D_{10}=D_{2\times 5}$.

Como podemos observar, en la diferencia entre los números que pertenecen a las diagonales aparecen los números pares, por tanto siguiendo con nuestro ejemplo, podemos reescribir SD10 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} SD_{10} = 10 & \\ & + 10 + 8 \\ & + 10 + 8 + 6 \\ & + 10 + 8 + 6 + 4 \\ & + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 \\ & + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 \\ & + 10 + 8 + 6 + 4 \\ & + 10 + 8 + 6 \\ & + 10 + 8 \\ & + 10 \end{aligned}$$

vemos que a partir de 30 se repiten los sumandos, esto nos permite escribir SD_{10} como

$$SD_{10} = SD_{2\times 5} = 2(10 + 18 + 24 + 28 + 30)$$

y trabajar con los 5 primeros sumandos:

$$\begin{aligned} SD_{10} = 10 & \\ & + 10 + 8 \\ & + 10 + 8 + 6 \\ & + 10 + 8 + 6 + 4 \\ & + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 \end{aligned}$$

Como aparecen sumas de números pares, completemos cada sumando para obtener en cada uno de ellos la suma de los 5 primeros números pares:

$$\begin{aligned} & 10 + (\mathbf{8} + \mathbf{6} + \mathbf{4} + \mathbf{2}) - (\mathbf{2} + \mathbf{4} + \mathbf{6} + \mathbf{8}) \\ & 10 + 8 + (\mathbf{6} + \mathbf{4} + \mathbf{2}) - (\mathbf{2} + \mathbf{4} + \mathbf{6}) \\ & 10 + 8 + 6 + (\mathbf{4} + \mathbf{2}) - (\mathbf{2} + \mathbf{4}) \\ & 10 + 8 + 6 + 4 + \mathbf{2} - \mathbf{2} \\ & 10 + 8 + 6 + 4 + 2 \end{aligned}$$

y como la suma de dos o más números pares da como resultado un número par, entonces

$$\begin{aligned} & 2 = 2 \times 1 \\ & 2 + 4 = 2 \times 3 \\ & 2 + 4 + 6 = 2 \times 6 \\ & 2 + 4 + 6 + 8 = 2 \times 10 \\ & 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 2 \times 15 \end{aligned}$$

Notemos que al escribir los sumandos como un producto, uno de los factores es 2 y el otro es un número triangular, por tanto podemos reescribir los 5 primeros sumandos de SD_{10} como:

$$\begin{aligned} 2 \times 15 - (2 \times 10) &= 2T_5 - 2T_4 \\ 2 \times 15 - (2 \times 6) &= 2T_5 - 2T_3 \\ 2 \times 15 - (2 \times 3) &= 2T_5 - 2T_2 \\ 2 \times 15 - (2 \times 1) &= 2T_5 - 2T_1 \\ 2 \times 15 &= 2T_5 \end{aligned}$$

Entonces la suma de la diagonal 10 es:

$$SD_{10} = D_{2\times 5} = 2[5(2T_5) - 2(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)]$$

Luego para encontrar la suma de la $2n$ diagonal, se tiene

$$SD_{2n} = 2[2nT_n - 2(T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-1})]$$

y como ya sabemos cuál es la suma de los primeros n números triangulares, tenemos que

$$\begin{aligned} SD_{2n} &= 4[nT_n - (T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-1})] \\ SD_{2n} &= 4. \end{aligned}$$

Los resultados aquí expuestos fueron logrados en el aula con la participación de los estudiantes donde el rol del profesor no es el de un buen orador quien expone sin cometer error alguno, no es quien da respuesta a los interrogantes planteados por los estudiantes, no es quien tiene las respuestas a todas las preguntas; es quien ayuda a encontrar en los estudiantes sus propias respuestas, adoptando el papel de guía y constructor del aprendizaje, propone a los estudiantes cuestionamientos a resolver y discutir en el aula, así como situaciones concretas (entendidas éstas como las situaciones a las que el individuo se puede enfrentar con su dominios conceptuales) y abstractas que requieran de actividad matemática permanente.

Bibliografía

[1] LUQUE, C., MORA, L., PÁEZ, J. *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir.* Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. Ediciones Antropos. 2002.

[2] NELSEN, R. *Proofs Without Words.* Washington, The Mathematical Association of America. 1993.