Aspectos del pensamiento geométrico escolar y sus divergencias con el pensamiento algebraico

María Falk de Losada
Universidad Antonio Nariño
Directora, Olimpiadas Colombianas de Matemáticas
Bogotá D.C, Colombia
mariadel@uan.edu.co

Resumen

Resumen. Se consideran importantes diferencias entre el pensamiento geométrico y el algebraico, en especial el logro de la generalidad y el empleo de la intuición fundamental, y se exploran características específicas y propias del pensamiento geométrico evidenciado por niños y jóvenes en la solución de problemas y central para el desarrollo efectivo del pensamiento matemático escolar, escalando niveles de dificultad para presentar problemas aptos para estudiantes con mayor interés en matemáticas.

Palabras introductorias

Antes de comenzar nuestras consideraciones, queremos dejar en claro que nuestro interés en esta charla es explorar el desarrollo del pensamiento matemático - y en particular el pensamiento geométrico y algebraico - en el contexto de la matemática escolar, ocasionalmente consultando hechos y características de la matemática elemental, para ilustrar cómo el pensamiento desarrollado en el contexto de la solución de problemas - por ejemplo, al estilo de las olimpiadas de matemáticas - puede contribuir a desarrollar y enriquecer el pensamiento matemático del estudiante y cómo es imprescindible que esto incluya el desarrollo real y efectivo de su pensamiento geométrico.

Nuestra estrategia para sustentar esto último se basa en mostrar divergencias claras entre estos dos aspectos del pensamiento matemático al nivel de la matemática escolar e intentar de alguna forma presentar instancias donde se exhiben aspectos del pensamiento geométrico para de ellas extrapolar para mostrar que la falta de cualquiera de los dos produce una especie de "discapacitado matemático" que no puede desenvolverse con solidez ni en la matematica escolar ni en la matemática universitaria.

Se puede decir, entonces, que nuestro presupuesto al hablar sobre el aprendizaje de la matemática, es que la meta fundamental y última del mismo, es en efecto el desarrollo del pensamiento matemático.

Mirando el panorama actual en educación matemática en Colombia se percibe a nivel intuitivo que, iniciada una nueva tendencia o al menos un nuevo vocabulario en educación matemática, el vocabulario de las competencias matemáticas, estamos en el mismo peligro de siempre de trivialización de los conceptos matemáticos y ahora se intensifica con la trivialización de lo que se considera pensamiento matemático. Sin ahondar en absoluto en el tema de competencias, quiero tratar de mostrar o precisar aspectos del pensamiento matemático - y en particular del pensamiento geométrico - que considero fundamentales para que un joven pueda llegar a dominar y usar formas matemáticas de pensar.

Incluir el pensamiento geométrico dentro de esquemas más generales

Desde los pitagóricos y durante siglos se explotaba lo que se percibía como una correspondencia biunívoca entre la geometría y la aritmética - álgebra, bien conocida; esto implicó en la matemática occidental un proceso paulatino de inversión de los papeles entre álgebra y geometría que, junto con muchos autores, hemos explorado y descrito en varias ocasiones anteriores.

Históricamente, hay al menos dos intentos importantes por subsumir la geometría dentro de otros sistemas matemáticos. El primero de ellos, la introducción de un método general en geometría por Descartes, la llamada geometría analítica, fue originalmente un intento, no de mostrar que los teoremas geométricos pueden demostrarse algebraicamente, sino que los problemas de construcción geométricos podrían resolverse por el método analítico, colocando a la geometría en la esfera del álgebra como solución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones. Aquí se solucionan lo que Euclides mismo llamó problemas en oposición a proposiciones (o teoremas).

Segundo, el planteamiento de líderes del pensamiento matemático como son los Bourbakí, es: la matemática trata de estructuras, estudia sistemas formales con elementos, operaciones, transformaciones e identifica los invariantes bajo las operaciones entre los elementos de interés de cada estructura. Este punto de vista ha llevado al estudio de la geometría escolar en términos de espacios vectoriales, transformaciones lineales y sus invariantes, ubicando la geometría elemental como parte de lo que se denomina con frecuencia el álgebra abstracta. Aquí se solucionan problemas usando resultados demostrables desde la teoría.

Y es pertinente subrayar que los grandes problemas geométricos clásicos de construcción - como la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo - recibieron solución definitiva dentro del álgebra abstracta, en efecto, en la teoría de Galois.

Nuestra charla pretende mostrar, sin embargo, que hay problemas cuya solución requiere pensamiento netamente geométrico y que ello enriquece y consolida la forma de pensar matemática del estudiante desde los niveles elementales. Dadas las restricciones de espacio, miraremos tres o cuatro instancias en que esto se da.

Algunas divergencias entre el pensamiento algebraico y el geométrico vistas desde la pedagogía y la epistemología

¿Cómo se llegó a considerar el problema?

Nuestro punto de partida es pedagógico; y nuestras inquietudes pedagógicas tienen al menos dos orígenes en la experiencia. No tendremos en cuenta otras consideraciones importantes, como puede ser la de buscar una mejor forma de motivar o interesar al estudiante.

- La primera de ellas concierne el hecho, fácil de documentar, que cuando se trabaja la solución de problemas originales y retadores, algunos estudiantes tienden a tener mayor éxito al principio con problemas de aritmética, otros con problemas de álgebra, otros con problemas de combinatoria y finalmente algunos con problemas de geometría. No parece ser cuestión de conocimiento, de saber necesariamente, más álgebra o más geometría, sino de estar en capacidad de generar procesos y estrategias de solución, en resumen, de pensar mejor, pensar más o más sólidamente, algebraica o geométricamente.

- En segundo lugar, hace algunos años con la Profesora Myriam Acevedo de la Universidad Nacional exploramos formas en que el dominio de la matemática superior que aprende un futuro maestro en la universidad, podría realmente profundizar su entendimiento de la matemática escolar y enriquecer la manera en que llegará enseñar o los ambientes de aprendizaje que construirá para sus estudiantes.

Construcción de significado en el álgebra: trayectoria histórica

Con respecto de este segundo punto, nuestras indagaciones y reflexiones nos llevaron a escribir el libro Recorriendo el álgebra: desde la resolución de ecuaciones al álgebra abstracta", en el cual trazamos el proceso histórico de construcción de significado para los conceptos algebraicos - y los sistemas numéricos - y lo utilizamos para cubrir temas del álgebra tradicional y dar sentido, profundizar y ampliar los temas que tradicionalmente se abordan en la matemática escolar. (Adicionalmente, mostramos como esto condujo el álgebra ineludiblemente hacia el álgebra abstracta.)

Para dar sólo un ejemplo, pudimos interpretar el papel histórico de problemas como el siguiente que todavía se encuentran en los textos de álgebra, y que no parecen tener ninguna finalidad clara.

- Dada una ecuación polinómica encontrar otra ecuación polinómica cuyas raíces sean iguales a cinco más que las raíces de la ecuación original.

Se puede ver que éstos tienen su origen en problemas epistemológicos relacionados con la necesidad de rendir cuentas acerca de la existencia de diferentes sistemas numéricos, de construir significado para nuevos números. Descartes explora la solución de problemas como éste para sustentar su posición epistemológica en la cual propone que no hay diferencias de naturaleza entre los números negativos y los positivos, vistos desde el álgebra y la solución de ecuaciones polinómicas.

Fortalecidas con esta experiencia intrigante y exitosa, nos propusimos llevar a cabo un proceso similar que diera cuenta de la construcción de significado de los conceptos geométricos de una forma que informara y orientara la geometría escolar.

De inmediato tropezamos con unas diferencias profundas, que aparentemente impiden que se les dé a los conceptos geométricos un tratamiento similar al que dimos a los conceptos algebraicos. Al parecer tanto el proceso como los resultados de la construcción de significado para los conceptos geométricos divergen fundamentalmente del proceso y resultados algebraicos.

Una de estas diferencias concierne a la facilidad con que se puede considerar el caso genérico - y general - en geometría y la gran dificultad que se tuvo en la historia de la matemática para llegar a una situación similar en contextos algebraicos, una vez que se demostrara que existen ecuaciones polinómicas cuyas raíces no son construibles con regla y compás.

Dificultades con la construcción de significado en la aritmética y el álgebra escolares

Uno de los problemas más persistentes de la educación matemática es el hecho de que la mayoría de los estudiantes, guiados probablemente por la manera han conocido la matemática, no concibe la matemática como algo que debe tener significado y sentido, sino como una colección de símbolos, reglas, procedimientos de forzosa y universal aplicación, que hay que manipular mecánicamente. Es la ausencia de significado lo que provoca, en este escenario, una manipulación errónea según supuestas reglas que algunas veces se han llamado errores del pensamiento sintáctico, o sea, el pensamiento que se fija en la forma mas no en el significado (la semántica).

Todos conocemos estos errores, unos ejemplos de los cuales se encuentran a continuación.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+b^2\\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d} &= \frac{a+c}{b+d}\end{aligned}$$

Ahora bien, éste último ejemplo fue colocado a propósito, porque en efecto hay situaciones en las cuales esta "regla" es apropiada. Supongamos que decimos que yo estuve jugando ajedrez con un amigo un fin de semana y que el sábado gané 3 de 7 partidos $\left(\frac{3}{7}\right)$ y el domingo 2 de 5 partidos $\left(\frac{2}{5}\right)$. En total en el fin de semana gané 5 de 12 $\left(\frac{5}{12}=\frac{3+2}{7+5}\right)$ partidos. En esta situación totalizar (lo que normalmente se asocia con sumar) se hace correctamente sumando los numeradores e independientemente los denominadores de las dos fracciones que representan los resultados parciales que se obtuvieron. Igualmente, no tiene sentido, en este contexto, aplicar el algoritmo usual de suma de fracciones. ¿Por qué?

Sin embargo, en el desarrollo de una investigación sobre el uso positivo del error, presentamos esta situación a estudiantes de secundaria y del primer semestre universitario. Solamente uno de más de 20 grupos de estudiantes aceptaron este proceder como el adecuado para la situación presentada. Todos los demás grupos insistieron en que había que sumar las dos fracciones como sigue,

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{5}=\frac{15+14}{35}=\frac{29}{35},$$

aunque sea claro que ninguno de los números que aparecen, ni el numerador 29 ni el denominador 35, tiene sentido en este caso, no gané 29 de 35 partidos, ni la razón que corresponde a mis resultados totales, $\frac{5}{12}$ tiene relación alguna con la respuesta obtenida aplicando ciegamente el algoritmo. Esta insistencia de los estudiantes demuestra plenamente, en la gran mayoría de los casos, que los procedimientos que aplicados en matemáticas no tienen sentido para ellos. Ellos los miran como reglas de forzosa aplicación, sin lógica (razón de ser) ni significado, reglas que se memorizan y se aplican mecánicamente.

Esta situación no sólo es la principal fuente del error en matemáticas, sino también limita las posibilidades de avance hacia la matemática superior, porque sin construir significado para los conceptos no hay experiencias ricas en la matemática elemental sobre las cuales se puede construir un sólido entendimiento de ella. Finalmente hay que considerar que esta falta de significado imposibilita totalmente que el alumno pueda resolver problemas en matemáticas, problemas originales, porque éstos requieren que se atribuyan significado apropiado a todos los conceptos y elementos que intervienen en ellos, y de allí identificar la forma en que se enlazan y poder comenzar a construir una solución particular a cada problema.

Construcción de significado en la geometría: trayectoria histórica

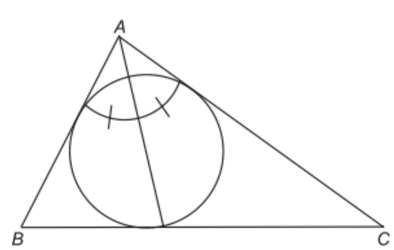
El proceso de construcción de significado en geometría sigue una trayectoria bien distinta al proceso que se dio al interior del álgebra. En este último caso la solución de ecuaciones llevó a sistemas de números cada vez más alejados de los números de medir y contar, o sea, de los números que se encuentran en la cotidianidad. Como ya hemos comentado, el proceso lleva a un análisis de la estructura de diferentes conjuntos de números (particularmente de los cuerpos de extensión de los racionales) y su relación con los grupos de permutación de las raíces de una ecuación.

En la historia de la geometría, en cambio, los entes geométricos a estudiar son de alguna manera dados desde un principio por medio de la abstracción a partir de la percepción. En el proceso de construcción de significado, hay alguna reflexión acerca de lo que significan palabras como “círculo” - en Platón, por ejemplo - y la discusión lleva a rechazar el círculo trazado o percibido (la luna llena, por ejemplo) como el objeto del pensamiento matemático a favor de lo que él llama la idea perfecta de círculo que existe en el mundo de las formas o ideas puras y de las cuales las percepciones y representaciones de nuestra experiencia participan imperfectamente (son como sombras comparadas con los objetos correspondientes). Las definiciones matemáticas y todo lo que se desprende de ellas como teoremas, entonces, pretenden corresponder a la idea perfecta y no se refieren a los objetos físicos de la percepción en sí. Esta es una discusión filosófica bonita, pero matemáticamente elemental.

Ahora bien, con ello de todas maneras se hace una geometría dinámica y difícil, a saber, gran parte de la geometría griega. Aunque se diferencia entre la idea y la representación, se legitima la representación como una sombra imperfecta de la idea perfecta y por lo tanto esta representación es de todas maneras permitida cuando se indaga acerca de la verdad geométrica. Esto conlleva a la práctica milenaria de argumentar a partir de la figura trazada siempre que ésta sea genérica. La idea es trazar una figura que representa las condiciones dadas en un problema o las hipótesis de un teorema, pero que no tenga o no se le atribuyen propiedades adicionales que van más allá de las condiciones dadas, o sea, sin añadir condiciones.

Dificultades en la construcción de significado en la geometría escolar

La matemática griega tenía bien en claro la exigencia de trazar y referirse únicamente a figuras genéricas y parece apenas obvio. En el aprendizaje de la geometría, en cambio, con muchísima frecuencia se da lo contrario. Por ejemplo, si trazo un triángulo y el círculo inscrito en el triángulo cuyo centro es el punto de concurrencia de las bisectrices, es común que el estudiante suponga, erróneamente por cierto, que la bisectriz interseca el lado opuesto exactamente en el punto de tangencia del incírculo con ese lado.



[Su suposición es válida en el caso del triángulo isósceles, pero no se da en general como es fácil de demostrar, pues la bisectriz pasa por el centro del círculo y si llegara al punto de tangencia entonces sería perpendicular al lado en ese punto, pero si es bisectriz y también perpendicular, los dos triángulos formados serían congruentes, y por lo tanto los dos lados AB, AC serían congruentes, que es lo que afirmamos. Este es el equivalente en álgebra, frente al problema de resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, de poner $a = 1$,$b = 2$,$c = 1$ y buscar las soluciones de $x^2 + 2x + 1 = 0$.] Entonces, si se traza una figura genérica de un triángulo cualquiera es imperativo cuidar que no se introduzcan suposiciones adicionales que la convierta en caso particular. Entre estudiantes se presentan de manera rampante errores de este tipo.

Generalidad en la argumentación geométrica y en la algebraica

Veamos nuevamente cuál es la analogía en el álgebra escolar para la figura genérica. Resulta que históricamente no aparece hasta que la introduce Francois Viète hacia finales del siglo XVI. Es el uso de coeficientes literales en las ecuaciones polinómicas. Cualquier ecuación con coeficientes numéricos es un caso especial, como nuestro caso del triángulo isósceles. No nos permite ver las relaciones generales. Consideremos la ecuación cúbica $x^3 - 7x + 6 = 0$. Si se es un matemático del Renacimiento que no ha aceptado aún la idea de que puedan existir números negativos, esta ecuación sólo tiene dos raíces, 1 y 2, y a partir de ellas las relaciones entre coeficientes y raíces, las llamadas relaciones de Vieta, son casi imposibles de delucidar.

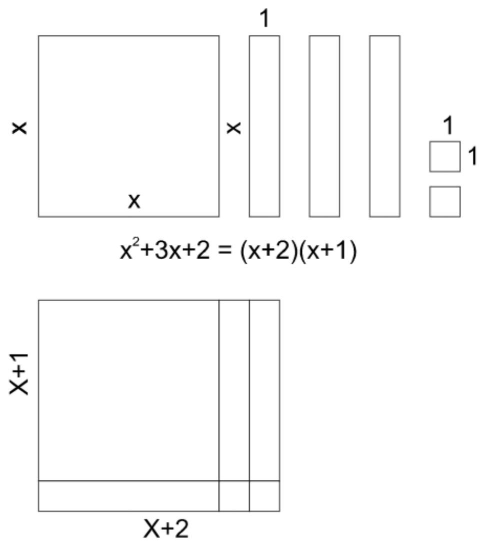
El primer punto de diferenciación, entonces concierne la posibilidad de contemplar el caso general.

Pero desde la antigüedad en la geometría se poseía la forma de representar el caso general por medio de una figura genérica; esto permite avanzar teóricamente.

Asimetría de los papeles de la geometría y el álgebra en la didáctica

El segundo punto de divergencia concierne diferencias a nivel de la solidez de las intuiciones.

La pedagogía y la didáctica matemáticas contemporáneas buscan explorar y explotar los paralelos y convergencias del pensamiento algebraico y el geométrico, representados por ejemplo en las demostraciones sin palabras, los modelos geométricos para situaciones algebraicas, como el modelo de rompecabezas que representan situaciones de factorización, las gráficas de funciones polinómicas, etc. Todos éstos traen el supuesto que la situación geométrica facilita el acercamiento intuitivo al álgebra y estimula la comprensión.



Por el contrario, la sabiduría popular (léese la experiencia como maestro o profesor) demuestra que los modelos algebraicos de situaciones geométricas (fijarse en las fórmulas para áreas o volúmenes, por ejemplo) trivializan e inclusive inducen al error.

Veamos un ejemplo. En un problema de llenar una caja empacando bloques en ella, donde la caja tiene dimensiones $4 \times 11 \times 6$ y son bloques de $1 \times 8 \times 3$, hay estudiantes que simplemente multiplican para hallar el volumen de la caja y el volumen de cada bloque, en este caso 264 y 24 unidades cúbicas respectivamente, y si el volumen de la caja es divisible por el volumen de un bloque concluir que sí es posible. Adicionalmente, es evidente que la divisibilidad corresponde a una condición necesaria, pero no es suficiente, y son argumentos geométricos (cómo disponer los bloques) los que permitirán terminar de resolver el problema.

Aportes y características específicos del pensamiento geométrico

En esta segunda sección exploraremos aspectos propios del pensamiento geométrico, que lo destacan y que no están presentes en el pensamiento algebraico. Es decir, quizás nuestro problema puede reformularse en estos términos.

¿Por qué no es dable una reducción de la geometría al álgebra en la matemática escolar?

¿Qué es lo que se pierde irremediablemente?

Esta charla, entonces, en parte constituye un intento por responder estas preguntas explorando algunas de las divergencias entre el pensamiento algebraico y el geométrico, desde varios puntos de vista, y en especial, desde el análisis del pensamiento que utilizan los jóvenes al resolver problemas para ellos retadores.

Y, como seguramente no tendremos tiempo para mirarlos todos, vamos a mencionarlos aquí:

- estrategias de subdivisión y recomposición,
- estrategias de trazado de construcciones auxiliares,
- estrategias de coloración y conteo,
- estrategias de cambio de dimensión.

Medición en la matemática escolar y la matemática elemental: estrategias de subdivisión y recomposición

La medición es un punto de encuentro donde, de acuerdo con la forma en que lo enseñamos, se buscan métodos y fórmulas que permiten calcular, por ejemplo, el área de una figura geométrica o el área debajo de una curva que representa una función. Y en nuestra discusión en este aparte nos limitaremos a considerar problemas de área.

De acuerdo con nuestros intereses, intentemos mirar la artimetización o algebraización de la medición, e inclusive su utilización en la solución de un problema sencillo, y confrontarla con la solución del mismo problema, dentro de la geometría misma.

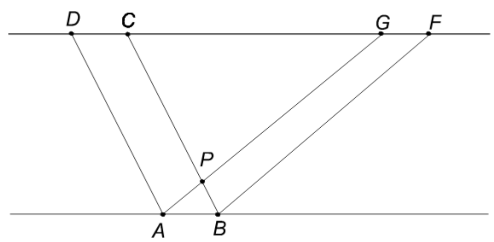
En primer lugar, recordemos que el problema central de la geometría griega frente al problema de medición de figuras es el de la cuadratura. Nos hablan mucho del problema de la cuadratura del círculo, todos hemos oido hablar de él, pero éste es indicativo de toda una colección de problemas que de alguna forma resumen el tratamiento griego de la medición de figuras geométricas.

Cuando miramos estos problemas y sus soluciones originales, nos damos cuenta que los resultados que se presentan se expresan en términos de equivalencia de áreas, no en términos de fórmulas que permiten sencillos cálculos aritméticos. Todo esto nos parece "curioso" pero es indicativo del real pensamiento geométrico sin reducirlo a la aritmética.

Una lección de Euclides

Consideremos una de las proposiciones euclidianas del Libro I de los Elementos. La demostración euclidiana es genial. La proposición nos dice que dos paralelogramos con la misma base y entre las mismas paralelas, son iguales (en área).

La demostración parte de dos paralelogramos $ABCD$ y $ABFG$, tales que los lados BC y AG se intersecan en el punto P, mostrando que los triángulos AGD y BFC son iguales (congruentes) por LLL, usando el hecho de que los lados opuestos de un paralelogramo son iguales. Y por lo tanto son iguales en área (no muy bien diferenciados los dos usos de la palabra "iguales" por Euclides). Entonces, si a cada una de estas áreas les sumamos el área del triángulo ABP y restamos el área del triángulo PGC segurián siendo iguales las áreas. Pero éstas corresponden a las áreas del paralelogramo $ABCD$ y $ABFG$ de modo que los dos paralelogramos tienen área igual.



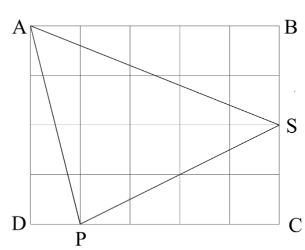
Es evidente que esta proposición euclidiana es "equivalente" a la fórmula que usualmente se enseña al estudiante de primaria, que el área de un paralelogramo es igual a base por altura, pero no es lo que queremos ver aquí.

Nos interesa el pensamiento usado en la demostración. Se demuestra que dos figuras tienen la misma área, comenzando por dos áreas que se pueden demostrar son iguales con base en proposiciones anteriores, descomponiendo la figura y sumando y restando las áreas de figuras de la descomposición.

Algunos problemas y soluciones de la geometría escolar

1. Encontramos este mismo tipo de solución a un problema de áreas usado espontáneamente por varios estudiantes de la escuela primaria.

   El problema es presentado como sigue. Se tiene una retícula $ABCD$ de 4×5 tal como se muestra en un diagrama y sobre ella un triángulo con los vértices que se indican en el diagrama. Hallar el área del triángulo.

   Creo que la gran mayoría de nosotros, con claridad de conceptos y conocedores de las fórmulas apropiadas, resolveríamos el problema de la siguiente manera.

   No conocemos ni la longitud de la base ni la altura del triángulo ASP, de modo que no podemos calcular directamente el área aplicando la fórmula que conocemos (reducir a un problema aritmético). Sin embargo, sabemos que la retícula mide 4×5 o sea tiene un área de 20 unidades cuadradas. El área del triángulo ASP es igual al área de la retícula menos las áreas de los triángulos rectángulos PDA, ABS y SCP.

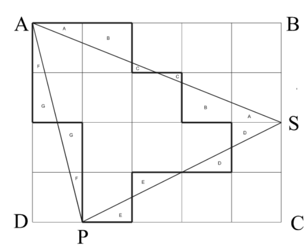
Conocemos las longitudes de las bases y alturas de estos triángulos, luego podemos calcular sus áreas, dando que el área del triángulo ASP es igual a

$$4 \cdot 5 - \frac{2 \cdot 5}{2} - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} = 20 - 5 - 4 - 2 = 20 - 11 = 9.$$

Bueno, hicimos una descomposición de la retícula, usamos una combinación del pensamiento geométrico y el algebraico - aritmético.

Pero varios estudiantes, tal vez inspirados por la misma retícula, por el hecho de que se expresa área en términos de unidades cuadradas y por el haber construido significado para el área de una figura en términos de unidades cuadradas, usaron estrategias mucho más "geométricas" y similares a las estrategias del pensamiento euclidiano cuando resolvieron este problema. La estrategia es encontrar, por descomposición e igualdad (congruencia e igualdad de áreas) una figura enteramente compuesta por cuadrados que tenga la misma área que el triángulo ASP. Bastaría entonces contar los cuadrados que la componen para calcular su área, y ésta a su vez sería igual al área del triángulo ASP.

Una de las descomposiciones que encontraron los estudiantes de la escuela primaria se presenta en el siguiente diagrama, donde se han señalado las áreas iguales que se suman y restan a la figura para determinar una figura de la misma área compuesta por cuadrados.



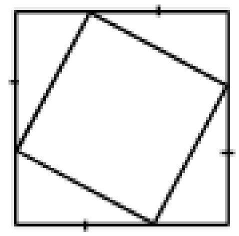
Se sigue que el área es 9 unidades cuadradas.

La solución del estudiante da pleno significado geométrico a la expresión del área de una figura en términos de unidades cuadradas. La solución también utiliza la misma idea euclidiana de basarse en la región común que comparten las dos figuras, sumando y restando regiones con áreas iguales, muy de acuerdo con el pensamiento geométrico detrás de la demostración euclidiana. Finalmente, es un método que puede generalizarse. De hecho, nos es posible identificar en él, el uso implícito de la pendiente de una recta, lo cual garantiza la igualdad de ángulos y la congruencia de las regiones triangulares señalados.

2. Igualmente en las pruebas de las Olimpiadas para la escuela secundaria, se encuentran problemas cuya solución invita a usar el mismo tipo de pensamiento. Consideremos el siguiente.

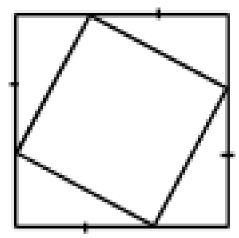
Prueba Clasificatoria Nacional Primer Nivel 1998 (Pcnpn98)

Se triseca (divide en tres partes iguales) cada lado del cuadrado mayor del diagrama. Las esquinas (vértices) del cuadrado inscrito son puntos de trisección, tal como se muestra. La razón entre el área del cuadrado inscrito y el área del cuadrado mayor es

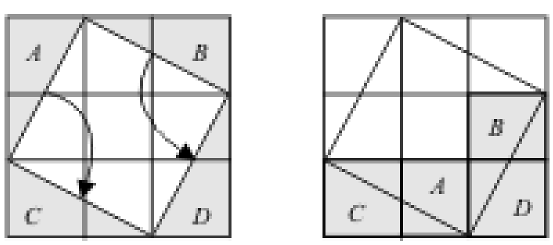


(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (E) $\frac{7}{9}$

Solución. (B) **Primera solución.** Si se supone que la longitud del lado del cuadrado mayor es $3\,cm$, el área del ese cuadrado es $9\,cm^2$. Cada uno de los cuatro triángulos rectángulos tiene un área de $\frac{1}{2}(2)(1) = 1\,cm^2$. El área del cuadrado inscrito es igual al área del cuadrado mayor menos el área total de los cuatro triángulos rectángulos, o sea, $9 - 4(1) = 5\,cm^2$. La razón buscada es $\frac{5}{9}$.



Segunda solución.



Bien	"A"	"B"	"C"	"D"	"E"	" "
14.38	15.80	14.38	18.43	16.36	10.68	24.22

Ahora bien, para dar mayor peso matemático o importancia dentro del desarrollo del pensamiento matemático a las soluciones que se han presentado a estos dos problemas relacionados, podemos preguntar si ellas son generalizables. ¿Cuáles serían las condiciones para poderlos generalizar? ¿Cuáles generalizaciones se pueden hacer en cada caso?

- La primera descomposición considera la descomposición de la retícula en cuatro regiones triangulares, y se usa el hecho que tanto el área de la retícula total como las áreas de tres de las cuatro regiones tiangulares son fáciles de calcular, permitiendo hallar el área de la cuarta.

- La descomposición y recomposición de regiones congruentes para calcular el área contando el número de unidades cuadradas contenidas en la figura.
- La división de los lados del cuadrado en la misma razón y el cálculo del área del cuadrado cuyas vértices son estos puntos de subdivisión.

3. Busquemos ahora resultados generales relacionados con otro enfoque.

   Analicemos un problema relacionado con los anteriores, pero ya con otro "semblante", y veamos como estrategias del pensamiento geométrico pueden ser de utilidad, mientras que el pensamiento algebraico por sí solo complica el problema hasta volverlo inconquistable. De hecho, su solución requiere pensar tanto algebraica como geométricamente. No intentaremos formular el problema de la forma más general posible, sino en una forma que permite que el estudiante lo analice.

   Se tiene un rectángulo $PQRS$ y un triángulo cuyos vértices están sobre los lados del rectángulo. Demuestre que el área del triángulo no puede ser mayor que la mitad del área del rectángulo.

   Consideremos dos casos.

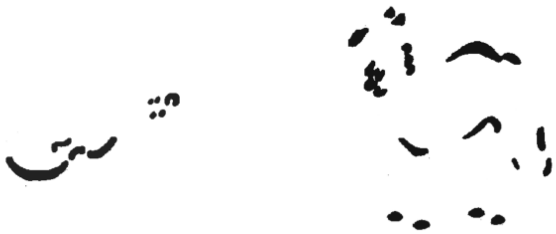
   - Hay dos vértices del triángulo sobre el mismo lado del rectángulo. En este caso podemos acotar de inmediato tanto la longitud de la base del triángulo como su altura. Un sencillo planteamiento y operación con desigualdades permite terminar la demostración.
   - No hay dos vértices sobre un mismo lado del rectángulo. Entonces, debe haber dos vértices que están en lados opuestos del rectángulo, y uno que esté en un lado perpendicular a ellos.

   ¿Cómo procederemos a resolver el problema en este caso? ¿Por qué es necesario que el estudiante haya desarrollado estrategias del pensamiento geométrico como las descritas en el problema original para resolverlo?

Pensamiento visual y pensamiento geométrico: estrategia de trazar construcciones y líneas auxiliares

Una de las características principales del pensamiento visual es la posibilidad de reconocer objetos aunque los veamos imperfectamente sin todos sus detalles.

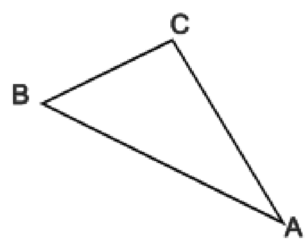
De allí son clásicos los ejemplos recreativos donde el pensamiento visual - basado en el conocimiento construido a partir de la experiencia cotidiana - permite completar (reconocer) una figura dibujada a medias como éstasstas .



Nos parece que ésta es la facultad del pensamiento geométrico detrás de la estrategia de construcción de líneas auxiliares - basado en el conocimiento construido en el contexto en experiencias y actividades anteriores - que llevan a la solución de un problema geométrico.

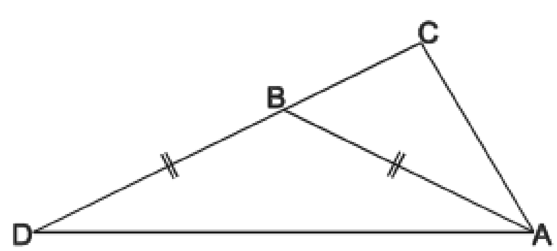
La geometría euclidiana tiene ejemplos elegantísimos del trazado de líneas y construcciones .ªuxiliares”en la demostración de sus teoremas. Uno de mis favoritos se encuentra en la demostración euclidiana de la desigualdad triangular.

En un triángulo, la suma (de las longitudes) de dos de sus lados es mayor que (la longitud de) el tercer lado.



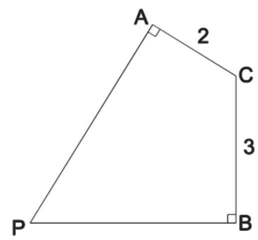
Veamos la demostración de Euclides.

Dado el triángulo ABC, AB, BC es mayor que AC. Extiéndase CB hasta el punto D tal que BD sea igual a BA. Trazar DA. Entonces, como $BD = BA$, en el triángulo ABD el $\angle BAD = \angle BDA$, de donde, $\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC > \angle BDA$. Entonces, en el triángulo ACD el $\angle ADC < \angle DAC$, y por lo tanto, por una proposición ya demostrada, el lado opuesto AC es menor que el lado opuesto DC, pero $DC = DB + BC = AB + BC$, o sea, el lado $AC < AB + BC$, como queríamos.

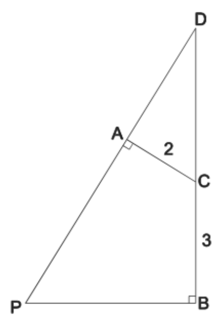


Ahora veamos como este mismo tipo de razonamiento es apropiado en problemas olímpicos del nivel de dificultad correspondientes a las primeras rondas de participación amplia.

- Un punto C está situado en el interior de un ángulo de $60°$ a una distancia de 2 y 3 unidades de los lados del ángulo. Determinar la distancia entre el punto y el vértice del ángulo.



Podemos imaginarnos varias formas de resolver este problema, usando trigonometría o geometría analítica. Pero una de las formas más sencillas, usa una construcción.



Sean A, B los pies de las perpendiculares trazadas desde C a los lados del ángulo. Extendiéndo el lado PA del ángulo y trazando BC hasta que se interseque con PA en D. Tenemos que el triángulo DPB es rectángulo con ángulo en P de $60°$. Entonces, $PB = \frac{1}{\sqrt{3}}PB$. Pero el triángulo DCA es también rectángulo con un ángulo de $60°$, de donde, $CD = 2CA = 4$ y $DB = 7$. Entonces, $PB = \frac{7}{\sqrt{3}}$ y

$$PC^2 = PB^2 + BC^2 = \frac{49}{3} + 9 = \frac{76}{3},$$

y $PC = \sqrt{\frac{76}{3}}$. El estudiante usa una idea muy similar a la de Euclides, para resolver en forma elegante y sencilla el problema.

Tal y como con el pensamiento visual se puede reconocer algo visto parcialmente, sólo si conoce de antemano ese "algo", de manera similar en el pensamiento geométrico nos podemos dar a la tarea de trazar líneas auxiliares (completar "mas" la figura) si conocemos de su existencia y estamos en capacidad de pensar en su posible relevancia.

Si analizamos nuestros ejemplos, podríamos decir que buscamos usar teoremas y propiedades de los triángulos - ya conocidos -, tanto para ayudarnos a sustentar una nueva propiedad fundamental (Euclides) como resolver un problema que contiene un pequeño reto.

Todo ello a su vez se remonta a la estrategia pilar y fundamento del pensamiento matemático - base tanto del pensamiento formal como de solución de problemas - la de lograr posicionarse en el“caso anterior”.

Imaginación geométrica, subdivisión, rompecabezas y problemas de combinatoria: estrategias de coloración

1. Empecemos por un problema clásico.

   - Se tienen 10 puntos en el interior de un cuadrado de lado 3. Demostrar que existe un par de estos puntos tales que la distancia entre ellos no es mayor que $\sqrt{2}$.

   Hay infinitas posibilidades en cuanto a la distribución de los 10 puntos, lo cual nos indica que un análisis de casos no es apropiado y debemos aplicar alguna proposición general para poder controlar la situación. El principio de las casillas es nuestra herramienta, y basta pensar en subdividir el interior del cuadrado en nueve cuadrados unitarios (nuestras casillas), aplicar el principio para concluir que necesariamente hay dos puntos en el mismo cuadrado unitario (la misma casilla), y, como la mayor distancia entre dos puntos que pertenecen a un cuadrado unitario, es $\sqrt{2}$, concluimos que existen dos puntos tales que la distancia entre ellos no es mayor que ese valor.

2. Consideremos un segundo problema clásico, añadiendo un nuevo elemento clave.

   Entre los primeros ejercicios lógicos del pensamiento se encuentra la clasificación; es la base lógica previa al lenguaje.

   Además, uno de los primero juegos lógicos que presentamos a los niños son los llamados “bloques lógicos”, e igualmente allí pretendemos ejercer la clasificación basada en tres propiedades geométricas - la forma, el tamaño y el grosor - y una cuarta propiedad - el color.

   Lo que pretendemos mostrar en lo que sigue es que el color o la coloración es un mecanismo que permite diferenciar objetos geométricos - en estos casos bidimensionales - aportando una nueva posibilidad a la argumentación acerca de ellos y en particular a la solución de problemas de geometría combinatorial cuya solución requiere imaginación geométrica en la subdivisión y/o coloración de regiones planas o espaciales.

   - Demostrar que si se quitan dos esquinas consecutivas de un tablero de ajedrez, es posible recubrir el tablero que queda con fichas dominó (cada ficha recubre dos casillas del tablero), y si se quitan dos esquinas opuestas del tablero ya no es posible recubrirlo con fichas.

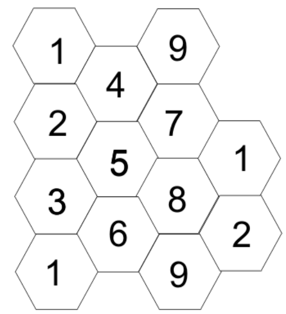
   La idea que se usa se basa en el color de las casillas de las esquinas. ¨Cómo sería la solución?

Ahora, veamos un problema relacionado que sería interesante proponer a nuestros estudiantes en el año 2007.

- Dado un conjunto S de 2007 puntos en el plano tales que la distancia entre cada par de ellos es al menos 1, demostrar que S tiene un subconjunto de 223 puntos tales que la distancia entre cada par de ellos es al menos $\sqrt{3}$.

Si queremos usar una idea como el anterior, tenemos que pensar en subdividir el plano, y resulta que aquí no es obvio como se debe hacer.

La solución que vamos a ver consiste en subdividir el plano en hexágonos de diámetro 1, como se muestra a la derecha.



Adicionalmente, se colorean estos hexágonos de nueve colores, indicados en la figura con los números de 1 a 9. Ahora bien, ¿cómo se puede usar esta configuración para terminar de resolver este problema?

Nótese que el punto crucial es diseñar las casillas subdividiendo el plano y usando la imaginación geométrica y la coloración.

Presentamos a continuación dos problemas que utilizan variaciones de estas ideas, donde es esencial pensar en armar rompecabezas (recuerden nuestro modelo de factorización) y/o hallar una subdivisión apropiada, colorear y contar.

3. - Olimpiada de Corea, 2000. Considere las siguientes figuras en forma de L, cada una compuesta por cuatro cuadrados unitarios.

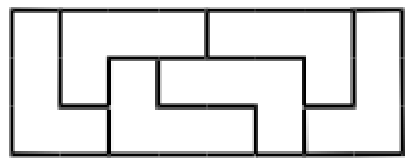
Sean m y n enteros mayores que 1. Demostrar que un rectángulo $m \times n$ puede ser recubierto con tales figuras si y sólo si mn es múltiplo de 8.

Veamos la solución de un estudiante.

En primer lugar, si $8|mn$, hay dos casos a considerar.

Primero, que m y n son ambos pares. Entonces, se debe tener que 4 es divisor de uno de ellos, digamos m, y 2 divisor de n. Pero entonces, podemos unir dos piezas para formar un rectángulo de 2×4, y con una cantidad de estos rectángulos recubrir un rectángulo de $m \times n$.

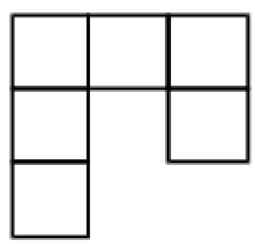
Segundo, uno de m, n es impar. En este caso, podemos suponer que m es impar y que $8|n$. Ahora, como $m, n > 1$, mostremos que se puede recubrir un rectángulo de 3×8.



Ahora bien, si $m = 3$ hemos terminado (basta unir regiones como ésta, una a continuación de otra), y si m es impar mayor que tres, basta recubrir la región de dimensiones $(m - 3) \times n$ como en la primera parte, y está demostrado.

El problema que se considera a continuación está relacionado con el anterior, pero además requiere argumentos de coloración.

4. - Olimpiada Internacional (IMO), 2004. Se define un gancho como sigue. Es una figura compuesta por seis cuadrado unitarios como se muestra en el diagrama

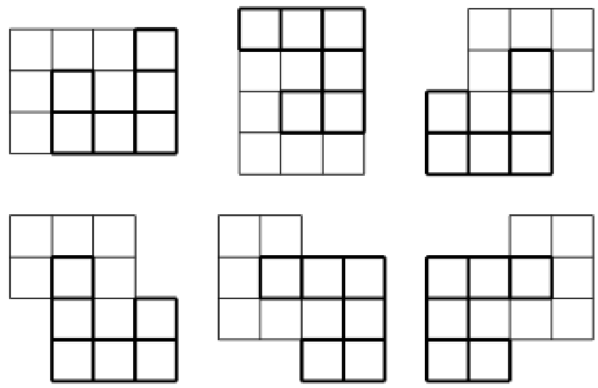


o cualquiera de las figuras que se obtienen de ésta aplicando rotaciones o reflexiones a ella.

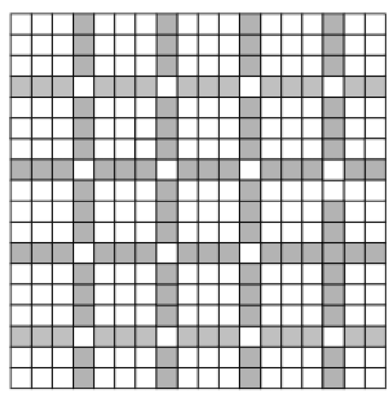
Determinar todos los rectángulos $m \times n$ que pueden ser recubiertos por ganchos de tal modo que

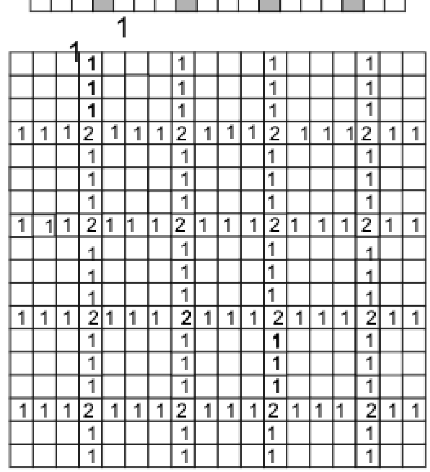
- El rectángulo debe recubrirse sin dejar espacios descubiertos y sin que se traslapen los ganchos.
- Ninguno de los ganchos puede proyectarse sobre una región exterior al rectángulo.

Se comienza observando las diferentes formas en que se pueden unir dos "ganchos" (imaginación geométrica).



Se puede resolver el problema usando varias diferentes formas de colorear un tablero o porciones de el. Se ofrecen varias coloraciones presentadas por los estudiantes que participaron en el evento.





Dejamos a nuestra audiencia la oportunidad de terminar de resolver el problema.

Estrategias de cambio de dimensión

Como un problema de actualidad consideremos los códigos de corrección de errores.

Estos son lo opuesto de los códigos secretos. Los códigos secretos tienen el propósito de esconder información. Los códigos de corrección de errores tienen el propósito de proteger información transmitida y asegurar que se recibe tal como se envió. Esto se puede plantear en el contexto de un juego en el cual hay un equipo compuesto por un transmisor y un receptor y hay un oponente saboteador que intenta alterar el mensaje transmitido de tal modo que el receptor reciba información falsa. Hay que limitar el poder del saboteador, porque con poderes ilimitados es claro que podrá alterar toda la información y no se puede garantizar nada. Como aplicación real, estamos simplificando el problema, consideremos la transmisión de información digital - como por ejemplo por FAX - y el 'saboteador' es el ruido electrónico que puede alterar los datos transmitidos.

Poniendo el problema en un contexto manejable, supongamos que se van a transmitir 15 dígitos binarios (0's o 1's) en total y que el saboteador puede alterar a lo más uno de estos dígitos (es decir, puede alterar uno o ninguno). La pregunta: ¨es cuántos de estos dígitos pueden dedicarse a la información en sí y cuántos se usarán para protección de la información?

Históricamente hablando, el primer sistema que se usó (publicado en 1948 y evidentemente empleado durante la segunda guerra mundial) dedicaba 5 de los 15 dígitos a información y 10 a protección. La idea es sencilla (casi infantil). Se transmiten los mismos 5 dígitos del mensaje tres veces una tras otra. Si el saboteador no ha alterado ningún dígito, entonces se recibirá la misma sucesión de 5 dígitos repetida tres veces y se sabrá que el mensaje consta precisamente de estos 5 dígitos. Si el saboteador ha alterado 1 dígito, esto sólo puede afectar una de las copias. De todas maneras habrá dos copias iguales de los mismos 5 dígitos y éstos constituirán el mensaje transmitido. Es claro que esto no es muy eficiente.

1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0

0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0

Mejoramiento en la misma dimensión

Ahora mi amigo Andy Liu, uno de los solucionadores de problemas más reconocido en el mundo y que trabaja en la ciudad de Edmonton en Alberta, Canadá, cuenta como él presentó este problema a los estudiantes de su club de matemáticas preguntándoles si ellos podrían idear un sistema mejor, o sea, un sistema que dedica un mayor número de los 15 dígitos a información y un número menor a protección. Un estudiante de octavo grado tuvo la siguiente idea en 1985, y escribió su idea en un artículo que se publicó en *Mathematics Magazine*. El estudiante se dió cuenta que podía transmitir 7 dígitos de información y dedicar 8 a protección. Su idea seguía un poco los lineamientos del primer esquema. Se transmiten los 7 dígitos de información, seguidos por los mismos 7 dígitos, el último dígito es un 0 si el mensaje de 7 dígitos contiene un número par de 1's y es un 1 si el mensaje de 7 dígitos contiene un número impar de 1's.

Ahora bien, al recibir el mensaje se miran los últimos 8 dígitos. Si el número de 1's es par, se sabe que el mensaje correcto está en los dígitos en los puestos ocho a catorce, y si el número de 1's es impar, se sabe que el mensaje correcto está en los primeros 7 dígitos. ¿Por qué?

1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0

1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0

Nótese que esta solución que mejora el sistema usado por el Ejército de los Estados Unidos durante la segunda guerra mundial, no contiene razonamiento espectacular ni avanzado. Usa un chequeo (comprobación) de paridad e incluye un dígito de chequeo de paridad.

Mejoramiento significativo pasando a otra dimensión

En 1997 un estudiante de sexto grado de escuela de Taiwan, tuvo una charla con Andy Liu en el contexto de la Olimpiada Internacional de Matemáticas para la Escuela Primaria que se realiza anualmente en Hong Kong. Este estudiante después de trabajar el problema que Andy le dio, a saber, el de diseñar un sistema que dedica más de 7 de los 15 dígitos a información (y por ende menos de 8 a protección), pensó en un sistema que dedica 9 dígitos a información y 6 a protección. Para ello empleó pensamiento geométrico de la siguiente manera.

En lugar de representar los datos en una dimensión, como una cadena de dígitos, se disponen 9 dígitos en un arreglo de 3×3,

0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	0	

Luego se hace un chequeo de paridad en cada fila y en cada columna y se añaden estos 6 dígitos al mensaje, un 0 si la respectiva fila o columna tiene un número par de 1's y un 1 si el número de 1's es impar.

Para identificar el cambio que ha hecho el saboteador, o para determinar que no hizo ningún cambio se mira cada uno de los dígitos de chequeo de paridad. Si hay uno solo de éstos que está mal, esto significa que ese es el dígito que cambió el saboteador. Si no hay ninguno errado, ¿qué hizo el saboteador? Si dos de los dígitos de chequeo de paridad están errados, ¿pueden corresponder ambos a filas o a columnas? ¿Por qué? Entonces, si hay dos dígitos de chequeo de paridad errados, ¿qué se puede determinar sobre lo que hizo el saboteador? Determinar el mensaje en cada uno de los siguientes casos.

1	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0
1	1	1	

1	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1
1	0	1	

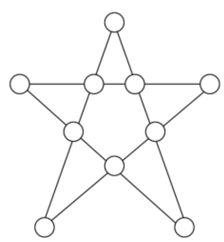
1	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1
1	0	1	

Ahora, se introduce una idea geométrica interesante en esta solución - el cambio de dimensión -, pero no requiere de conocimientos avanzados ni de creatividad espectacular.

Sin embargo, Andy le dijo al estudiante que se fijara en que la cantidad de 1's entre los 6 dígitos de chequeo siempre tiene que ser par. ¿Por qué? Esto significa que se está gastando al menos un dígito en protección que puede dedicarse a la transmisión de información. ¿Por qué? El estudiante se propuso, entonces, diseñar un sistema en el cual se dedican 10 dígitos a información y sólo 5 a protección.

Mejoramiento en dos dimensiones - imaginación geométrica pura

Después de un rato el estudiante ya tenía la idea. Ahora dispuso la información como sigue:



Las diez posiciones señaladas contienen dígitos de información. Se añade un dígito de chequeo de paridad para cada una de las 5 líneas a, b, c, d, e del diagrama (se coloca un 0 si el número de 1's es par y un 1 si es impar).

1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0

0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0

Ahora bien, ¿cuáles son los criterios que se aplican a este diagrama. Si cuando se recibe el mensaje, todos los dígitos de chequeo de paridad son correctos, entonces no ha habido ninguna interferencia del saboteador. Si se cambia un dígito de los 10 de información, como cada dígito de información está en dos líneas, habrá dos dígitos de chequeo incorrectos.

¿Qué ha hecho el saboteador si solamente uno de los dígitos de chequeo es incorrecto? Identifiquemos el error en el siguiente caso.

1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0

0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0

Pero éste no es el mejor diseño, pues resulta que si se hace un chequeo de paridad sobre los dígitos de chequeo de paridad el número de 1's tiene que ser par. ¿Por qué? Esto significa que sobra un dígito de chequeo, pues si tengo estos cuatro dígitos de chequeo 0010, sé que el quinto debe ser 1, así que el diseño no es óptimo.

Hasta aquí llegaron las consideraciones del estudiante taiwanés de sexto grado, pues no pudo idear el diseño que incluye 11 dígitos de información y sólo 4 de protección. Sin embargo, en lo que hemos visto es claro cómo el pensamiento geométrico enriquece el diseño y contribuye a la optimización. Es por ello que se puede afirmar que hay pensamiento geométrico detrás de los códigos de corrección de errores, que se usan para tecnologías de transmisión de señales dígitales, para asegurar la fidelidad de éstas.

El poder algebraico

De hecho, la solución definitiva del problema requiere de un paso de la idea de usar parejas a la idea de usar cuádruplas - y ello no es fácilmente representable en la intuición geométrica. El último esquema del pequeño estudiante taiwanés usa un conjunto de cinco elementos (las líneas de la estrella) e identifica los dígitos transmitidos con parejas de ellas (subconjuntos de dos elementos), como se observa en el diagrama siguiente que contiene la misma información que el último diagrama.

a	a	a	a	b	b	b	c	c	d	a				
b											b			
	c			c			d					c		
		d			d								d	
			e			e		e	e					e
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0

Si usamos un conjunto de cuatro elementos y todos sus subconjuntos no vacíos, podemos presentar un diseño que dedica 11 de los 15 dígitos a información y sólo 4 a protección. La idea se ilustra en el diagrama siguiente.

a	a	a	a		a	a	a				a			
b	b	b		b	b			b	b			b		
c	c		c	c		c		c		c			c	
d		d	d	d			d		d	d				d
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0

Ahora bien, podemos ver que algunos de los últimos 4 dígitos de protección son errados, donde un 0 en la columna de las a indica que hay un número par de 1's en las columnas donde aparece el elemento a, etc. ¿Cuál es el dígito que cambió el saboteador?

En efecto, este esquema donde entre 15 dígitos transmitidos hay 11 de información y sólo 4 de protección existe desde 1950, pero los autores del esquema no dan ninguna pista sobre cómo llegaron a la idea de las cuádruplas. Nuestro tratamiento del problema, en cambio, da la progresión de las nociones hasta el resultado final. Los ejemplos intermedios entre el sistema original de 5 y 10 hasta el sistema de 11 y 4 son pedagógicamente valiosos porque explican el ingenio de este último diseño y muestran cómo se progresa desde ideas que usan la paridad a ideas geométricas que usan la paridad, de modo cada vez más eficiente, hasta el último modelo donde se toma la idea de parejas introducida por consideraciones geométricas (de dos dimensiones) y se lleva a subconjuntos de un conjunto de cuatro elementos.

Para finalizar, notamos que no es posible obtener un mejor resultado que 11 dígitos de información y 4 de protección. Esto se debe a que es posible alterar cualquiera de los 15 dígitos transmitidos o es posible no alterar ninguno de ellos. Es decir, hay 16 eventos posibles y los dígitos de protección tienen que distinguir entre ellos y decirnos exactamente cuál es el mensaje que se quiere transmitir. Pero entre 4 dígitos binarios se presentan un total de $2^4 = 16$ posibilidades, así cada uno de los 4 dígitos de protección es necesario para identificar la alteración hecha. Entonces, 11 dígitos de información es el número máximo posible.

Palabras de conclusión

Nuestro escrito ha considerado - con la ayuda de algunos problemas elementales - aspectos propios del pensamiento geométrico que sutentan la conclusión que el pensamiento geométrico elemental no es completamente reducible al algebraico, ni puede ser sustituido por éste. Para lograr desarrollar toda la riqueza del pensamiento matemático del estudiante, las experiencias y oportunidades para resolver problemas no estándar y no rutinarios puede empoderar el pensamiento geométrico a desarrollar estrategias elegantes, poderosas, ingeniosas y atractivas que a su vez pueden motivar, fascinar y encariñar al estudiante frente a la matemática.