Definiciones implícitas y explícitas

Arnold Oostra
Profesor Universidad del Tolima
Becario 2003–2004 de la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia
Ibagué, Colombia
Bogotá D.C, Colombia
oostra@telecom.com.co

Resumen

La dualidad *implícito–explícito* está presente en diversos contextos matemáticos. La lógica la ha abordado de diferentes maneras, como ejemplo principal puede citarse el teorema de Beth. Por otro lado, el siempre fructífero traslado de técnicas y problemas entre disciplinas diversas plantea la posibilidad de un "teorema de Beth algebraico".

Las expresiones implícitas y el problema de su posible equivalencia con una explícita aparecen en la cultura humana desde la más remota antigüedad. Se manifiestan por ejemplo en las adivinanzas, que hoy en día parecen relegadas a los jardines infantiles pero que en algún momento jugaron un papel importante en la mitología, la historia y la literatura [4, 28]. De igual manera, muchos problemas científicos consisten en explicitar una teoría que se encuentra implícita en una masa de datos.

No es extraño entonces que este fenómeno también se manifieste en la matemática y que haya sido estudiado por la lógica. En la primera sección de esta nota se revisa la dualidad implícito–explícito en algunos puntos de la matemática; en la segunda se estudia la versión lógica tradicional del fenómeno, en el contexto del cálculo proposicional clásico; en la tercera se plantean definiciones implícitas y explícitas en un ambiente puramente algebraico. Este trabajo puede verse como una introducción elemental al tema de la tesis doctoral [21], de la cual el artículo [22] a su vez es un resumen.

1. Lo implícito y lo explícito en matemáticas

Aún sin propender una visión dualista de la matemática, es inevitable distinguir en ella una cantidad de "contrastaciones complementarias" o duales: local–global, todo–parte, extrínseco–intrínseco, continuo–discreto, finito–infinito, concreto–abstracto, implícito–explícito. En esta sección se quiere subrayar la presencia de la dualidad implícito–explícito en tres lugares ubicuos de la matemática.

1.1. Funciones lineales

Una función lineal f entre espacios vectoriales de dimensión finita tiene una expresión explícita de la forma $f(\boldsymbol{X}) = A\boldsymbol{X}$ donde A es una matriz. Por otro lado, también está determinada de manera implícita por las condiciones

$$f(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = f(\boldsymbol{X}) + f(\boldsymbol{Y})$$
$$f(\alpha \cdot \boldsymbol{X}) = \alpha \cdot f(\boldsymbol{X})$$

y por sus valores en una base del dominio [13].

Como caso particular interesante, si el campo subyacente es el de los números racionales y el dominio tiene dimensión 1, las dos condiciones de arriba pueden reducirse a la única

$$f(nx) = nf(x)$$

para cada entero n.

1.2. Ecuaciones

Quizás el lugar matemático donde la contrastación implícito–explícito es más explícita es en el fenómeno ubicuo de las ecuaciones.

En algunos textos de trigonometría [16] se distinguen las ecuaciones de las identidades en que las últimas son igualdades válidas para todos los valores de la variable mientras las primeras solo lo son para algunos. Así las ecuaciones trigonométricas llevan implícitas el problema de encontrar la solución, esto es, el conjunto de valores de la variable para los que es válida la igualdad en cuestión.

El problema de encontrar la solución de una ecuación tiene una trayectoria amplia en la matemática. La búsqueda de soluciones por radicales a las ecuaciones algebraicas de grado mayor que 4 preludia la teoría de grupos [1, 11]; el método de eliminación de Gauss, utilizado de muchas maneras en el álgebra lineal finitaria, no es más que un algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones lineales [13, 27]; la teoría de las ecuaciones diferenciales, que tiene tantas aplicaciones y a la que se ha dedicado tanto esfuerzo, en esencia consiste en buscar soluciones para ciertas ecuaciones en las que intervienen derivadas o integrales de las variables, que allí son funciones [9]; el importante teorema de la función implícita del análisis es un criterio suficiente para la solución de ciertas ecuaciones [6, p. 292].

En general, un sistema de ecuaciones —trigonométricas, algebraicas, lineales, diferenciales— o es insoluble o determina de manera unívoca una solución — un ángulo, un elemento, un conjunto de elementos, una superficie. Puede decirse que esta solución está implícita en el sistema de ecuaciones y el problema que este plantea consiste en encontrar una descripción explícita de la misma.

1.3. Definiciones

Un tercer lugar de la matemática que evidencia la dualidad implícito–explícito es el análisis de las definiciones, también ubicuas en esta ciencia.

En un nivel fundamental vale la pena recordar que un conjunto puede definirse por extensión —listando explícitamente sus elementos— o por intensión —expresando una propiedad que los describa con exactitud—.

Por otra parte, la mayoría de las definiciones en matemáticas —como la de triángulo equilátero, la de función derivada o la de grupo— juegan el papel de simples abreviaturas. En algunos casos, sin embargo, una abreviatura de estas no resulta satisfactoria para el trabajo matemático que se quiere desarrollar. Por ejemplo, si se toman los números naturales como

1, 2, 3, etcétera,

con esa definición no se puede hacer aritmética o teoría de números. En cambio han demostrado tener mucha más utilidad la conocida definición de Dedekind y Peano [24], su versión sintética —categórica— propuesta por Lawvere [15] y la primera definición publicada de los números naturales, debida a Peirce [25, 26, 20]. Estas definiciones no son abreviaturas sino consisten en el enunciado de una lista de propiedades que pueden ser satisfechas por una sola estructura —salvo isomorfismos, claro está—, que es entonces el pensado sistema de los números naturales.

Hace unos 2300 años Euclides procuró dar definiciones satisfactorias de *punto*, *línea* y *superficie plana*, del estilo "un punto es..." [10]. En 1899 David Hilbert escribió:

> Pensemos tres distintos sistemas de entes: a los entes del *primer* sistema los llamamos *puntos*... a los entes del *segundo* sistema los nombramos *rectas*... a los entes del *tercer* sistema los llamamos *planos*...
>
> Concebimos los puntos, rectas y planos en ciertas relaciones recíprocas... La descripción completa de estas relaciones hecha exactamente y con fines matemáticos resulta de los *axiomas de la Geometría*. [12]

Así, en la presentación de Hilbert los elementos de la geometría euclidiana —puntos, rectas, planos— están determinados de manera unívoca por las relaciones existentes entre ellos, relaciones regidas a su vez por axiomas.

Los números reales están determinados de por lo menos dos maneras esencialmente diferentes. Por un lado, un número real puede definirse como una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales o como una cortadura de números racionales. Por otra parte, el sistema de los números reales es el único campo ordenado y completo.

De la misma manera pueden darse descripciones distintas del espacio topológico de Cantor. Por un lado, este es el subespacio de la recta real —con su topología usual— obtenido al quitar el tercio central del segmento $[0, 1]$ y luego iterar infinitamente este proceso con los segmentos restantes. Por otra parte, este es el único espacio topológico Hausdorff, compacto, totalmente disconexo, con base enumerable y perfecto [29]. El conjunto de Cantor con su orden usual, construido de la misma manera como subconjunto ordenado de la recta real, también puede caracterizarse como el único conjunto ordenado lineal —total—, completo, con suficientes saltos, con enumerables saltos y sin elementos aislados [17].

De los ejemplos citados pueden distinguirse dos clases de definiciones. En un tipo de definición, que podría llamarse explícita, lo definido se iguala a una frase de la teoría en cuestión y esencialmente no es más que una abreviatura. En otro tipo de definición, que podría llamarse implícita, lo definido satisface cierto conjunto de propiedades expresadas en la teoría y la conjunción de estas propiedades lo determina de manera unívoca.

En general, puede decirse que una solución o definición *explícita* consiste en expresar el objeto mediante una palabra o un término del lenguaje correspondiente, mientras una expresión o definición *implícita* resulta cuando ciertas propiedades de un objeto —hipotético—, expresadas en el lenguaje del caso, lo determinan de manera única. También puede decirse que, en general, el problema subyacente —implícito— consiste en pasar de una definición implícita a una explícita.

2. El teorema de Beth

Aunque las definiciones implícitas y explícitas son ubicuas en la matemática, la única rama que ha estudiado este fenómeno de manera explícita es la lógica. De hecho las nociones generales sobre la dualidad implícito–explícito fueron consideradas en la lógica matemática moderna desde sus albores —a principios del siglo XX—, entre otros por Alessandro Padoa. Este matemático italiano enunció lo que después se conoció como el *método de Padoa*: a fin de probar que una relación no está definida explícitamente por ciertas sentencias, basta ver que ellas no la definen implícitamente [23]. En otras palabras, la definibilidad explícita entraña la implícita.

El problema interesante que se planteó entonces fue la implicación en el otro sentido, esto es, ¿toda definición implícita corresponde a una explícita? Fue necesario esperar el desarrollo pleno de la lógica de primer orden —la lógica de predicados— para expresar estas nociones con mayor precisión. Medio siglo después de su formulación implícita, este interrogante fue resuelto de manera positiva por Evert Beth en un notable artículo, comunicado por Heyting y dedicado a Tarski [3], razón por la cual el resultado "la definibilidad implícita entraña la explícita" se conoce como el *teorema de Beth.*

En su versión original, el teorema de Beth se estableció para la lógica de primer orden y así se encuentra en la literatura [2]. En esta nota se presenta la versión proposicional cuya escritura es más diáfana pero que conserva la misma línea de ideas, tanto en las definiciones como en la demostración. Para la notación y las nociones requeridas —tales como la relación de deducción formal $\vdash$ y el teorema de la deducción— puede consultarse el texto [7].

A nivel proposicional, las convenciones sobre la definibilidad implícita y explícita tienen el aspecto siguiente. Sea Σ un conjunto de fórmulas proposicionales que contienen la letra r. Si r' es una letra proposicional que no aparece en Σ, sea Σ' el conjunto de fórmulas obtenidas al sustituir en Σ todas las apariciones de r por r'. El conjunto de fórmulas Σ *define implícitamente* la constante r si se tiene la siguiente consecuencia formal.

$$\Sigma \cup \Sigma' \vdash r \leftrightarrow r'$$

Por otro lado, sea φ una fórmula proposicional que no contiene la letra r. El conjunto de fórmulas Σ *define explícitamente* la constante r mediante la fórmula φ si se tiene la siguiente consecuencia formal.

$$\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow r$$

Si el conjunto de fórmulas Σ define explícitamente a r, de $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow r$ se sigue de inmediato $\Sigma' \vdash \varphi \leftrightarrow r'$ (nótese que la fórmula φ no cambia pues no contiene la letra r) luego $\Sigma \cup \Sigma' \vdash \varphi \leftrightarrow r, \varphi \leftrightarrow r'$ de donde $\Sigma \cup \Sigma' \vdash r \leftrightarrow r'$, es decir, Σ define implícitamente a r. La implicación en el otro sentido es el *teorema de Beth proposicional* que se enuncia a continuación.

Teorema. *Si un conjunto de fórmulas proposicionales define implícitamente una constante entonces también la define explícitamente.*

En la actualidad, el teorema de Beth para la lógica de primer orden suele demostrarse a partir del llamado *lema de interpolación de Craig*. Este resultado a su vez puede demostrarse empleando teoría de modelos —en particular ultraproductos y extensiones elementales [2]— pero también puede probarse con métodos finitarios y puramente deductivos a partir del *teorema de Herbrand* [14]. La siguiente es la versión proposicional del lema de interpolación de Craig, que puede probarse directamente.

Lema. *Si α, β son fórmulas proposicionales con letras en común y tales que $\alpha \vdash \beta$ entonces existe una fórmula φ cuyas letras proposicionales son todas comunes a α y a β y para la cual se tiene lo siguiente.*

$$\alpha \vdash \varphi \qquad\qquad \varphi \vdash \beta$$

Bosquejo de la demostración. A continuación se muestran las ideas de la prueba, sugeridas en [7] y desarrolladas en [14].

Dada cualquier fórmula proposicional θ y letras p, q se define $\theta(p, q)$ como $\theta(p/q \vee \neg q) \vee \theta(p/q \wedge \neg q)$. Aquí $\theta(p/q \vee \neg q)$ es la fórmula que se obtiene de θ sustituyendo todas las apariciones de p por $q \vee \neg q$, de manera que la letra p no aparece en $\theta(p, q)$. Con la ayuda de las "tablas de verdad" se verifica que $\theta \vdash \theta(p, q)$ y con la ayuda del teorema de la deducción se verifica que $\theta \vdash \eta$ implica $\theta(p, q) \vdash \eta(p, q)$.

Ahora en el lema, si todas las letras de α aparecen en β puede tomarse $\varphi = \alpha$. En caso contrario, sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ las letras de α que no aparecen en β y sea q alguna letra común. De manera recurrente se define $\alpha_0 = \alpha$ y $\alpha_{j+1} = \alpha_j(p_{j+1}, q)$. Por la primera observación de arriba se tiene $\alpha_j \vdash \alpha_{j+1}$ luego $\alpha \vdash \alpha_i$ para cada i. Por otro lado se tiene

$\alpha_0 \vdash \beta$ y por la segunda observación $\alpha_1 = \alpha_0(p_1, q) \vdash \beta(p_1, q) = \beta$ (porque p_1 no aparece en β) y así de manera recurrente $\alpha_i \vdash \beta$ para cada i.

Una fórmula que satisface las condiciones del lema es $\varphi = \alpha_n$ pues no contiene ninguna letra p_i luego todas sus letras son comunes a α y a β. $\square$

El teorema de Beth proposicional se demuestra ahora a partir del lema de interpolación de Craig siguiendo exactamente el mismo razonamiento que en la lógica de primer orden.

Demostración del teorema de Beth proposicional. Supóngase que el conjunto de fórmulas Σ define implícitamente la constante r, esto es, supóngase que $\Sigma \cup \Sigma' \vdash r \leftrightarrow r'$.

Si σ denota la conjunción de las (finitas) fórmulas de Σ empleadas en esta deducción y σ' la conjunción de las fórmulas de Σ' usadas, en particular se tiene $\sigma \wedge \sigma' \vdash r \rightarrow r'$. Empleando dos veces el teorema de la deducción se sigue $\sigma \wedge r \vdash \sigma' \rightarrow r'$ luego por el lema de interpolación de Craig, existe una fórmula φ que no contiene a r (pues esta letra no aparece en la fórmula $\sigma' \rightarrow r'$) y para la cual $\sigma \wedge r \vdash \varphi$ y $\varphi \vdash \sigma' \rightarrow r'$.

De nuevo por el teorema de la deducción, a partir de estas relaciones se obtienen, respectivamente, $\sigma \vdash r \rightarrow \varphi$ y $\sigma' \vdash \varphi \rightarrow r'$. Sustituyendo en la segunda todas las apariciones de r' por r, resulta $\sigma \vdash \varphi \rightarrow r$. De donde $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow r$, de suerte que Σ define explícitamente a r mediante φ. $\square$

3. Definibilidad implícita en álgebra

En la segunda mitad del siglo XX, entre muchas otras trasposiciones, la matemática desarrolló puentes entre la lógica y el álgebra en el ambiente del *álgebra universal*. El álgebra universal puede verse simultáneamente como la teoría general de las estructuras algebraicas o como un caso particular —y bien importante— de la teoría de modelos.

El objeto de estudio del álgebra universal son las clases de álgebras. Un *tipo* de álgebra τ es un conjunto de símbolos funcionales a cada uno de los cuales se asigna un número de argumentos; un *álgebra* de tipo τ consiste en un conjunto dotado de operaciones, una por cada elemento del tipo y con la correspondiente cantidad de argumentos. Un *término* de tipo τ es una combinación de proyecciones y de símbolos de operación; una *identidad* es una igualdad entre términos; una *cuasi-identidad* es una implicación cuyo antecedente es una conjunción de identidades y cuyo consecuente es una identidad. Una identidad o una cuasi-identidad es válida en un álgebra si allí vale esa fórmula sustituyendo los símbolos por las operaciones del álgebra y las variables por elementos arbitrarios del álgebra. Una *variedad* es una clase de álgebras del mismo tipo axiomatizadas por un conjunto de identidades, una *cuasivariedad* es una clase de álgebras axiomatizada por cuasi-identidades. Para —muchos— más detalles, véase [5].

A partir de las ideas generales sobre definibilidad explícita e implícita en la matemática y tomando como referencia las definiciones en la lógica de primer orden, pueden proponerse las siguientes convenciones en el contexto del álgebra universal. Estas definiciones se inspiran en las ideas propuestas en [8], en el contexto de las lógicas algebrizables.

Sea K una clase de álgebras de tipo τ y sea ∇ un símbolo de operación con n argumentos que no pertenece a τ.

- La operación ∇ está definida *implícitamente* por un conjunto de cuasi-identidades si en cualquier álgebra $\boldsymbol{A}$ de K existe a lo más una operación $\nabla^{\boldsymbol{A}}$ que las satisface.
- La operación ∇ está definida *explícitamente* por un término t en el lenguaje de las álgebras si en toda álgebra $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ donde existe la operación $\nabla^{\boldsymbol{A}}$, ella coincide con $t^{\boldsymbol{A}}$.

Se nota que en ninguno de los casos se exige que la operación exista en todas las álgebras de la clase. A continuación se muestran algunos ejemplos que ilustran las convenciones de arriba, para la justificación o la ampliación de los detalles véase la tesis [21].

Ejemplos.

1. En la variedad de los *semirretículos* $(S; \wedge)$ la identidad siguiente define implícitamente una operación constante 1, llamada *elemento máximo* en las álgebras donde existe.
$$x \wedge 1 = x$$
Sin embargo, puede probarse que no hay ningún término constante en esta variedad. Es decir, esta operación no es explícita.

2. En la variedad de los *retículos distributivos acotados* $(R; \wedge, \vee, 1, 0)$ las identidades siguientes definen implícitamente una operación c, con un argumento, llamada *complemento*.
$$x \wedge c(x) = 0$$
$$x \vee c(x) = 1$$
En un álgebra de esta variedad existe la operación c si y solo si se trata de un *álgebra booleana*. Sin embargo, en este vocabulario no hay ningún término igual a c luego esta operación tampoco es explícita.

3. En la variedad de los *semigrupos* $(S; \cdot)$ las identidades siguientes definen implícitamente una operación constante 1, el *elemento neutro*.
$$x \cdot 1 = x$$
$$1 \cdot x = x$$
Se prueba que en esta variedad no hay ningún término constante luego la operación no es explícita. Un semigrupo posee esta operación si y solo si es un *monoide*.

4. En la variedad de los monoides $(M; *, 1)$ las identidades siguientes definen implícitamente una operación I, el *inverso*.

$$x * I(x) = 1$$
$$I(x) * x = 1$$

Esta operación no es explícita pues no hay ningún término igual a I. Los monoides en los que existe esta operación son los *grupos*.

5. En las *álgebras de Heyting* $(H; \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ [19] las identidades siguientes definen implícitamente una operación N con un argumento.

$$x \wedge N(x) = 0$$
$$x \wedge N(x \wedge y) = x \wedge N(y)$$
$$N(0) = 1$$

Esta operación está definida explícitamente por un término, a saber $N(x) = x \to 0$. De hecho, N existe en todas las álgebras de Heyting.

6. En las álgebras de Heyting las identidades siguientes definen implícitamente una operación D.

$$x \vee D(x) = 1$$
$$x \vee D(x \vee y) = x \vee D(y)$$
$$D(1) = 0$$

Aunque estas identidades son duales a las del ejemplo anterior, en este caso la operación que definen no es explícita. La razón es que la operación D no es compatible con todas las congruencias de las álgebras donde existe.

7. Las identidades siguientes corresponden a los axiomas del cálculo proposicional modal **S5** —sin regla de necesitación— [Sierra 2001].

$$\Box(x \to y) \to (\Box x \to \Box y) = 1$$
$$\Box x \to x = 1$$
$$\Box\Box x = \Box x$$
$$\neg\Box\neg x = \Box\neg\Box\neg x$$

Sin embargo ellas no definen implícitamente un conectivo en las álgebras booleanas ni en las álgebras de Heyting. Pues en cualquiera de estas álgebras —si tienen tres o más elementos— existen por lo menos dos operaciones que validan estas identidades.

8. En las álgebras de Heyting las identidades siguientes definen implícitamente una operación S con un argumento.

$$(S(x) \to x) \to S(x) = 1$$
$$S(x) \to (y \vee (y \to x)) = 1$$

Puede probarse que esta operación S es compatible pero que no es explícita, pues no es igual a ningún término en las álgebras de Heyting.

Precisadas las nociones de definibilidad implícita y explícita en el contexto del álgebra universal, cabe la pregunta si allí vale un resultado similar al teorema de Beth de la lógica de primer orden. De los ejemplos es claro que la respuesta varía de una clase de álgebras a otra. También es evidente que entre las condiciones necesarias para que una operación implícita sea un término está la de ser compatible, dado que todo término lo es. Así se llega al siguiente interrogante.

Pregunta. *¿En cuáles cuasivariedades toda operación compatible definida implícitamente por cuasi-identidades está definida explícitamente por algún término?*

Los ejemplos muestran que en las variedades de los semirretículos, los retículos distributivos acotados, los semigrupos, los monoides y las álgebras de Heyting, la respuesta a este interrogante es negativa. En cambio, es posible demostrar que la respuesta es positiva en la variedad de las álgebras booleanas [21].

Otras variedades estudiadas en la tesis [21] —véase también el artículo [22]— son la de los grupos abelianos y la de los grupos en general. Allí se establece que en la variedad de los grupos abelianos, en la variedad de los grupos abelianos con operadores de división y en general en la variedad de los módulos sobre un anillo arbitrario, toda operación compatible definida implícitamente por identidades está definida explícitamente por algún término. Es decir, en estas clases de álgebras se tiene cierto "teorema de Beth algebraico". En cambio en la cuasivariedad de los grupos abelianos sin torsión no toda operación implícita es explícita. Respecto a la variedad de los grupos, se prueba que toda operación compatible *con un solo argumento* definida implícitamente por identidades está definida explícitamente por un término, pero acerca de las operaciones con más argumentos aún no hay una respuesta concluyente.

Bibliografía

[1] ALBIS, V. *Temas de Aritmética y Álgebra*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1984.

[2] BELL, J., SLOMSONAND, A. *Models and Ultraproducts: An introduction*. North-Holland, Amsterdam, 1971.

[3] BETH, E. *On Padoa's method in the theory of definition*. Indagationes Math. 15. 1953. 330–339.

[4] BORGES, J. *El jardín de los senderos que se bifurcan*. 1941. Recopilado entre otros en: Jorge Luis Borges, *Ficciones*. La Oveja Negra, Bogotá, 1984.

[5] BURRIS, S., SANKAPPANAVAR, H. *A Course in Universal Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 78. Springer-Verlag, New York, 1981. Disponible en varios sitios de Internet:
http://www.thoralf.uwaterloo.ca/htdocs/ualg.html
http://www.math.sc.edu/∼mcnulty/alglatvar/burrissanka.pdf

[6] CAICEDO, J. *Cálculo Avanzado: Introducción*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2005.

[7] CAICEDO, X. *Elementos de Lógica y Calculabilidad*. Una Empresa Docente, Bogotá, 1990.

[8] CAICEDO, X. *Implicit connectives of algebraizable logics*. Studia Logica, 78. 2004. 155–170.

[9] DERRICK, W., GROSSMAN. S. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. Fondo Educativo Interamericano, México, 1984.

[10] Euclides. *Elementos*. Traducción de María Luisa Puertas Castaños. Planeta-DeAgostini, Madrid, 1996.

[11] FRALEIGH, J. *A First Course in Abstract Algebra*. Third edition. Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 1982.

[12] HILBERT, D. *Fundamentos de la Geometría*. Reimpresión de la traducción de Francisco Cebrián 1953 de la séptima edición alemana 1930. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1996.

[13] HOFFMAN, K., KUNZE, R. *Álgebra Lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1973.

[14] JARA, DIEGO. *El teorema de completitud de Gödel y el lema de interpolación de Craig, via el teorema de Herbrand*. Trabajo de Grado (Matemáticas). Universidad de los Andes, Bogotá, 1995.

[15] LAWVERE, W. *An elementary theory of the category of sets*. Proc. Nat. Acad. Sci. 52. 1964. 1506–1511.

[16] NILES, N. *Trigonometría Plana*. Segunda edición. Limusa, México, 1982.

[17] OOSTRA, A. *La topología del orden y el conjunto ordenado de Cantor*. Trabajo de grado (Matemáticas). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1991.

[18] OOSTRA, A. *Conectivos en topos*. Tesis de Maestría (Matemáticas). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1997.

[19] OOSTRA, A. *Álgebras de Heyting*. XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1997.

[20] OOSTRA, A. *Acerca del artículo* On the Logic of Number*, de Charles S. Peirce*. Boletín de Matemáticas - Nueva Serie. X. (2003) 13–20.

[21] OOSTRA, A. *Operaciones implícitas en variedades ecuacionales*. Tesis Doctoral (Matemáticas). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2006.

[22] OOSTRA, A. *Operaciones implícitas en cuasivariedades*. Boletín de Matemáticas - Nueva Serie XIII. 2006, por aparecer.

[23] PADOA, A. *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque*. Bibliothèque du Congrès International de Philosophie III. 1900. 309–365.

[24] PEANO, G. *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*. Bocca, Turin, 1889.

[25] PEIRCE, C. *On the logic of number*. American Journal of Mathematics 4, 1881. 85–95.

[26] PEIRCE, C. *Sobre la lógica del número*. Traducción de Lina María Bedoya. Boletín de Matemáticas - Nueva Serie X. (2003) 1–12.

[Sierra 2001] SIERRA, M. *Inferencia Visual para las Lógicas Normales*. Universidad EAFIT, Medellín, 2001.

[27] TAKAHASHI, A. *Álgebra Lineal*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1993.

[28] TOLKIEN, J. *The Hobbit, or, There and Back Again*. George Allen & Unwin, London, 1937. Traducción al español: J. R. R. Tolkien, *El Hobbit*. Minotauro, Barcelona, 1983.

[29] WILLARD, S. *General Topology*. Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 1970.