Trigonometría del cuadrado

José Leonardo Bautista
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
jangel@pedagogica.edu.co

Oscar Javier Molina
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
ojmolina@pedagogica.edu.co

Resumen

Este escrito presenta una visión alternativa del estudio de las funciones trigonométricas, enmarcada en una manera diferente de medir ángulos que se basa en el cuadrado, y que consideramos, contribuye a enriquecer el tratamiento didáctico que se le otorga usualmente a este tipo de funciones en la enseñanza secundaria o superior. Así, se presenta un paralelo que permite evidenciar las ventajas que esta trigonometría del cuadrado tiene sobre la circular.

Una trigonometría del cuadrado

La trigonometría vista como una rama de las matemáticas que se encarga de estudiar las relaciones que se definen a partir de ciertos objetos denominados ángulos y de las figuras que se utilizan para medirlos, como circunferencias, elipses, hipérbolas, y en general cónicas, permite un primer acercamiento a un conjunto de funciones especiales que, al ser distintas de las funciones polinómicas o racionales, vienen a mostrar comportamientos y propiedades singulares (periocidad, infinitud de ceros, de máximos, de mínimos, entre otras); sin embargo, usualmente, existe una brecha entre el estudio de funciones, por ejemplo, polinómicas y el estudio de funciones trigonométricas, pues mientras que en las primeras existe una formula para obtener el valor de la imagen dado un valor del dominio, en las últimas no existe formula alguna. Es así, que tal brecha hace que el estudio de las funciones trigonométricas se reduzca a trabajar los métodos algebraicos y geométricos que permiten determinar las imágenes de algunos valores de ángulos especiales y se olvide el estudio de las funciones y sus propiedades, luego *¿por qué no buscar una forma alternativa de abordar la trigonometría?*

En ese sentido, nosotros proponemos no abordar el estudio de la trigonometría desde las funciones trigonométricas circulares, es decir utilizando la circunferencia como figura para medir los ángulos, sino desde un conjunto de funciones análogas, que se definen a partir del cuadrado, y que constituyen la trigonometría del cuadrado.

Es prudente resaltar que se utiliza el software Cabri Geometry para realizar las construcciones de las representaciones gráficas de las funciones trigonométricas del cuadrado, lo cual permite identificar, desde un punto de vista gráfico, algunas de estas relaciones o propiedades.

A continuación, presentamos un paralelo entre estos dos sistemas, la trigonometría circular y la del cuadrado, exaltando las ventajas que este último trae:

Trigonometría circular

Consideramos una circunferencia unitaria (centrada en $(0,0)$ y que interseca al eje x en el punto $(1,0)$), de ecuación

$$x^2+y^2=1$$

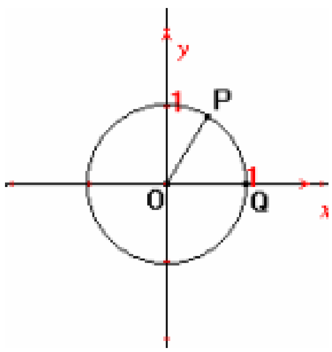


Figura 1

Si P es un punto de tal circunferencia (Figura 1), entonces existen tres formas usuales de medir el ángulo QOP (ó α), que se encuentra en posición estándar (con su vértice en el origen del sistema de coordenadas y siendo uno de sus lados el eje x positivo), a saber:

- Dividir la circunferencia en una cantidad determinada de unidades que se denominan grados (si el número de partes en que se divide la circunferencia es 360), y determinar cuantas de esas divisiones corresponden al arco QP.

- Encontrar el doble del área del sector circular QOP (medida en números reales que se denomina radian), ó

- Determinar la longitud del arco QP que subtiende dicho ángulo (medida en números reales que se denomina radian)

Trigonometría del cuadrado

Las funciones trigonométricas se estudian usualmente a partir de las coordenadas de los puntos que pertenecen a una cónica, bien sea una hipérbola, elipse o como es usual una circunferencia, pero si en lugar de utilizar una cónica se estudia, por ejemplo, un cuadrado, ¿Qué sucede?

Consideremos un cuadrado unitario (centrado en $(0,0)$ y que interseca al eje x en el punto $(1,0)$) con sus lados paralelos a los ejes del plano, y un ángulo QOP en posición estándar, siendo P un punto del cuadrado:

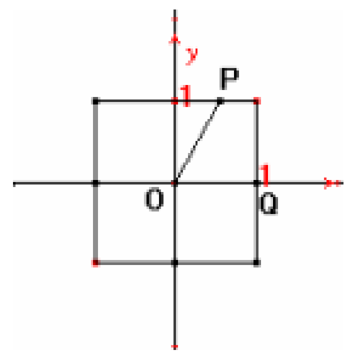


Figura 2

Es de notar, que de manera análoga a la trigonometría circular, en la trigonometría del cuadrado un ángulo puede medirse utilizando cualquiera de las tres formas descritas, es decir por medio de la división del cuadrado en un número determinado de partes (grados), encontrando el doble del área de la figura encerrada por el cuadrado y los rayos OP y OQ ó determinando la distancia que hay entre el punto Q y el punto P en la trayectoria que sigue P sobre el cuadrado (radianes); sin embargo, al querer hacer un paralelo con lo trabajado en la circunferencia, nos interesa la tercer forma.

Nos interesa abordar la tercera forma de medir ángulos, puesto que es la más utilizada para estudiar la trigonometría desde un punto de vista funcional; además, con base en lo dicho:

- Podemos determinar para un ángulo cualquiera, un ángulo coterminal cuya medida está entre 0 y 2π, y
- Podemos definir las coordenadas (x, y) de P (que llamaremos punto Terminal del ángulo) en función del valor de la medida del ángulo α, ya que para cada ángulo α existe un único punto P en la circunferencia tal que $\angle QOP \cong \alpha$; particularmente, si la circunferencia es unitaria, establecemos que[1]

$$cos\,(\alpha) = x \text{ y } sen\,(\alpha) = y$$

Por ejemplo:

α	$cos\,(\alpha) = x$	$sen\,(\alpha) = y$
0	1	0
$\frac{\alpha}{2}$	0	1
π	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
2π	1	0

Es de notar que el valor tanto del coseno (cos) como del seno (sen) de cada una de las medidas de ángulo α dadas, es evidente, por cuanto para cada ángulo α, el punto terminal P se ubica en un eje; sin embargo, esto no siempre ocurre, pues por ejemplo, si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, el punto terminal P hace parte de la recta $y = x$ (figura 3)

Ahora bien, a partir de medir un ángulo de tal forma, observamos que:

- Podemos determinar para un ángulo cualquiera, un ángulo coterminal cuya medida está entre 0 y 8, y
- Podemos definir las coordenadas (x, y) de P (que nuevamente llamaremos punto Terminal del ángulo) en función del valor de la medida del ángulo α, ya que para cada ángulo α (en posición estándar) existe un único punto P en el cuadrado tal que $\angle QOP \cong \alpha$; particularmente, si el cuadrado es unitario, establecemos que

$$ccos\,(\alpha) = x \text{ y } csen\,(\alpha) = y$$

Por ejemplo:

α	$ccos\,(\alpha) = x$	$csen\,(\alpha) = y$
0	1	0
2	0	1
4	-1	0
6	0	-1
8	1	0

Es de notar que de manera análoga a la trigonometría circular, en la trigonometría del cuadrado, encontrar los valores de ccoseno ($ccos$) y cseno ($csen$) para un valor de ángulo α, cuando el punto terminal P pertenece a uno de los ejes, es fácil; pero si 0, 2, 4, 6 y 8 son los valores de ángulo en el cuadrado equivalentes a los valores de ángulo $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y 2π en la circunferencia, respectivamente, entonces ¿qué sucede con los valores de ccoseno y cseno de los ángulos de medida 1 y $\frac{4}{3}$ equivalentes (en tal sentido) a $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$?

[1] Por comodidad en la escritura, asumiremos en adelante que α representa la medida del ángulo α.

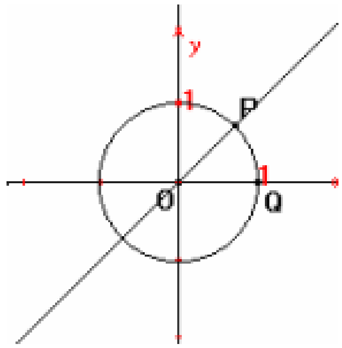


Figura 3

con lo que

$$x = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = y$$

y utilizando la ecuación de la circunferencia unitaria, tenemos que

$$\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \left(sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 1$$

luego

$$2 \cdot \left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 1$$

y finalmente

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y } sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De manera análoga, no son evidentes los valores de las coordenadas del punto terminal P, correspondiente al ángulo $\alpha = \frac{\pi}{3}$, pues si construimos el punto S simétrico a P con respecto al eje y (figura 4)

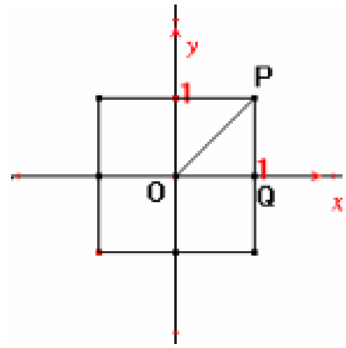


Figura 5

Observando la figura 5, si $\alpha = 1$, entonces tenemos que las coordenadas del punto P son $(1, 1)$, es decir

$$ccos\,(1) = 1 \text{ y } csen\,(1) = 1$$

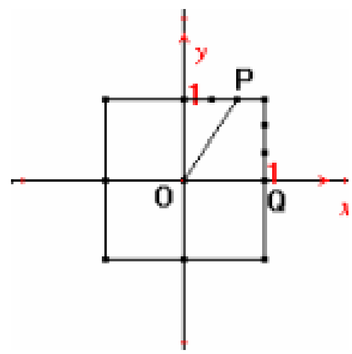


Figura 6

Y de manera similar, si $\alpha = \frac{4}{3}$, a partir de la figura 6 tenemos que

$$csen\left(\frac{4}{3}\right) = 1 \text{ y } ccos\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

De esto podemos notar que, hasta el momento, es más evidente como encontrar los valores $ccos(\alpha)$ y $csen(\alpha)$ en el cuadrado que los valores $cos(\alpha)$ y $sen(\alpha)$ en la circunferencia; pero ¿es posible encontrar una forma general para determinar tales valores?

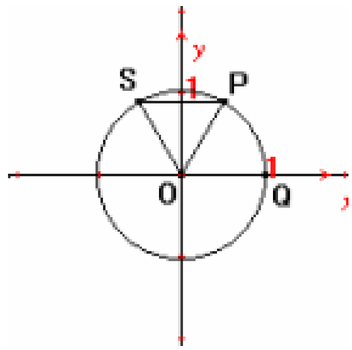


Figura 4

tenemos que el ángulo SOP es $\frac{\pi}{3}$ también y que triángulo SOP es equilátero, con lo que

$$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

y como

$$\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1$$

Entonces

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ y $sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

De estos dos ejemplos puede notarse que no es evidente encontrar los valores del seno y coseno de un ángulo como $\frac{\pi}{4}$ o $\frac{\pi}{3}$, y aún más cuando por ejemplo $\alpha = 1, 7, 9, 3{,}14, \ldots$, ¿Qué hacemos?

Un primer paso para responder dicha pregunta consiste en observar algunos otros valores de ángulo y sus correspondientes valores de ccoseno y cseno:

α	$ccos\,(\alpha)$	$csen\,(\alpha)$
$-\frac{3}{8}$	1	$-\frac{3}{8}$
$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$
$\frac{4}{7}$	1	$\frac{4}{7}$
$\frac{\pi}{6}$	1	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$2,95$	$0,95$	1

Con base en tales valores, podemos afirmar que

α	$ccos\,(\alpha)$	$csen\,(\alpha)$
$-1 \leq \alpha \leq 1$	1	α
$1 \leq \alpha \leq 3$	$2 - \alpha$	1

y de manera similar que

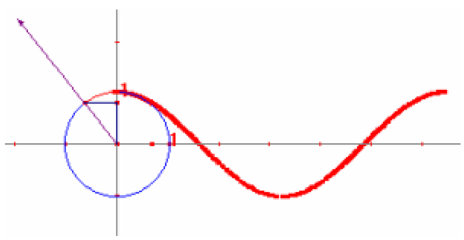
α	$ccos\,(\alpha)$	$csen\,(\alpha)$
$3 \leq \alpha \leq 5$	-1	$4 - \alpha$
$5 \leq \alpha \leq 7$	-1	$\alpha - 6$

Atendiendo a lo anterior, conocido el valor de la medida del ángulo[2] es fácil determinar el valor tanto del ccoseno como del cseno de tal medida.

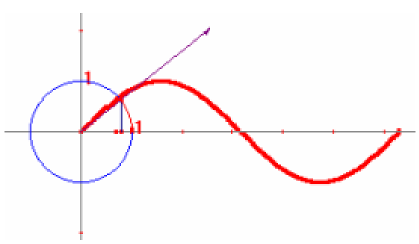
Ahora bien, de manera análoga, utilizando el programa Cabri, es posible obtener una representación grafica de las funciones ccoseno y cseno, veamos

[2]Hay que tener en cuenta que para utilizar tales formulas, dado un valor de ángulo debe encontrase su coterminal con valor en el intervalo $[0, 8]$.

Para ángulos como π, $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}, \ldots$ y sus múltiplos y submúltiplos, denominados ángulos especiales, existen métodos algebraicos para determinar el valor del seno y del coseno, pero en general no existe un método conocido que permita encontrar tales valores para cualquier valor de ángulo, salvo aproximaciones que suministran las series infinitas.
Utilizando un programa como Cabri o Derive, es posible obtener una representación grafica de las funciones coseno y seno, veamos



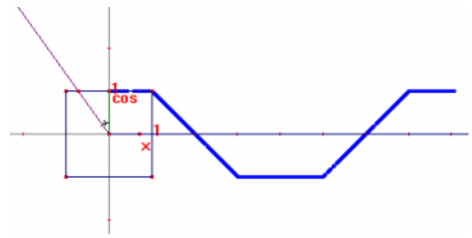
COSENO



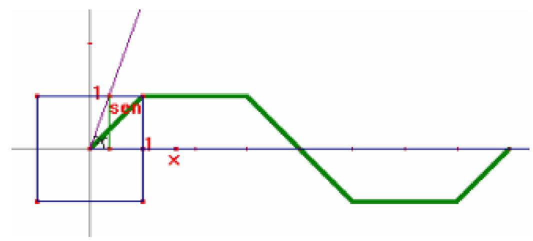
SENO

Es de observar que, tanto coseno como seno son funciones con dominio los números reales y con rango el intervalo $[-1, 1]$, es decir

$$cos : R \to [-1, 1]$$
$$\alpha \mapsto cos(\alpha)$$
$$sen : R \to [-1, 1]$$
$$\alpha \mapsto sen(\alpha)$$



CCOSENO



CSENO

Es de observar que, tanto ccoseno como cseno son funciones con dominio los números reales y con rango el intervalo $[-1, 1]$, al igual que las funciones coseno y seno, es decir

$$ccos : R \to [-1, 1]$$
$$\alpha \mapsto ccos(\alpha)$$
$$csen : R \to [-1, 1]$$
$$\alpha \mapsto csen(\alpha)$$

Estas funciones, presentan algunas propiedades similares a las propiedades del seno y coseno:

- Tanto cseno como ccoseno son periódicas, de periodo 8
- cseno es una función impar
- ccoseno es un función par
- Tanto cseno como ccoseno tienen amplitud 1.

Estas funciones, presentan algunas propiedades interesantes como:

- Tanto seno como coseno son periódicas, de periodo 2π.
- Seno es una función impar.
- Coseno es una función par.
- Tanto seno como coseno tienen amplitud 1.
- Tanto seno como coseno tienen infinitos máximos, mínimos y ceros.
- Son funciones continuas.
- Son funciones infinitamente derivables.
- $cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) = 1$
- $cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen\,(\alpha)$
- $sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos\,(\alpha)$

$\vdots$

- Cuando la circunferencia tiene radio r, se define

$$cos\,(\alpha) = \frac{x}{r} \text{ y } sen(\alpha) = \frac{y}{r}$$

Y todo lo dicho sigue cumpliéndose.
A partir de las funciones seno y coseno, pueden definirse otras funciones especiales por medio de operaciones como multiplicación, división, suma, resta, …, como por ejemplo la función $tan\,(\alpha)$ definida como

$$tan\,(\alpha) = \frac{sen\,(\alpha)}{cos\,(\alpha)}$$

- Tanto cseno como ccoseno tienen infinitos máximos, mínimos y ceros
- Son funciones continuas.
- Son funciones infinitamente derivables no en todos los puntos (*¿En cuáles puntos no lo es?*)
- Atendiendo a que la ecuación del cuadrado es $max\{|x|, |y|\} = 1$ o bien

$$\frac{||x| - |y||}{2} + \frac{|x|}{2} + \frac{|y|}{2} = 1$$

Entonces

$$\frac{||ccos(\alpha)| - |csen(\alpha)||}{2} +$$

$$\frac{|ccos(\alpha)|}{2} + \frac{|csen(\alpha)|}{2} = 1$$

- $ccos(2 - \alpha) = csen(\alpha)$
- $sen(2 - \alpha) = cos(\alpha)$

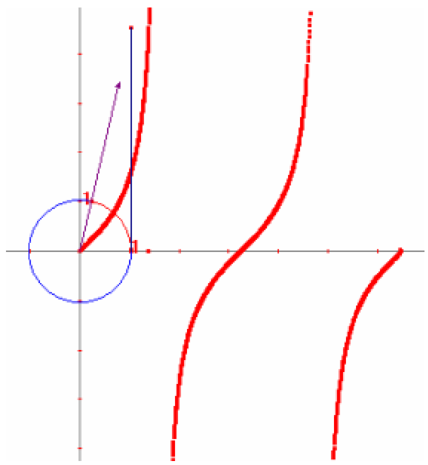
$\vdots$

- Cuando el cuadrado interseca al eje x en $(r, 0)$, está centrado en $(0, 0)$ y tiene sus lados paralelos a los ejes, se define

$$ccos(\alpha) = \frac{x}{r} \text{ y } csen(\alpha) = \frac{y}{r}$$

y todo lo dicho sigue cumpliéndose.
Análogamente al caso de la circunferencia, a partir de las funciones cseno y ccoseno, pueden definirse otras funciones especiales por medio de operaciones como multiplicación, división, suma, resta, …, como por ejemplo la función $ctan(\alpha)$ definida como

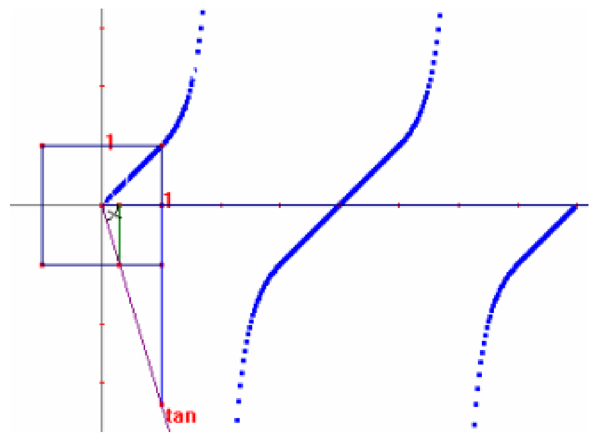
Veamos su representación grafica:



TANGENTE

$$ctan\,(\alpha) = \frac{csen\,(\alpha)}{ccos\,(\alpha)}$$

Veamos su representación grafica:



CTANGENTE

Con lo presentado, hemos querido mostrar que aparecen ciertas dificultades cuando se inicia un estudio de la trigonometría desde las funciones circulares, pues muchas veces, tal estudio se enfoca en tratar de encontrar los valores de las funciones seno y coseno para un ángulo determinado, pero no se da el espacio necesario para trabajar con las funciones como tal: descubriendo sus propiedades, manipulando transformaciones y composiciones, etc., mientras que al abordar un estudio de las funciones trigonométricas partiendo de figuras, como el cuadrado, que no implican mayor dificultad para el manejo de las imágenes, hay más cabida para un estudio desde un punto de vista funcional; además, *¿por qué trabajar directamente con la circunferencia y no hacer un camino similar al que se sigue en geometría, por ejemplo, para aproximar el área de una circunferencia: iniciando con un polígono regular como el cuadrado e ir aumentando paulatinamente el número de lados, para así identificar de una manera más natural el comportamiento que se espera obtener con las funciones circulares?*

Desde un punto de vista didáctico, este camino permite además que se desarrollen aspectos relacionados con el hacer matemáticas en el aula, como la conjeturación y la argumentación de hechos que pueden ser descubiertos por los propios estudiantes, mediante actividades muy bien pensadas que sean retadoras para ellos, pero que al mismo tiempo, estén a su alcance.

Bibliografía

[1] BIDDLE, J. *The square function: An abstract system for trigonometry*. The Mathematics Teacher, Vol. LX, Número 2, 121-123, 1967.

[2] SAN MARTÍN, O., SOTO, J. *Construcción de significados para las razones trigonométricas mediante un aparato virtual diseñado con Cabri*. Universidad Pedagógica Nacional, Centro Pedagógico del Estado de Sonora. www.mat.uson.mx/semana/xiisemana/Memorias/san_martin_oscar_jesus.pdf

[3] DUNKELS, A. *Om Pitágoras Hade Varit Taxichaufför i lulea*. Högskolan i lulea. www.mittag-leffler.se/specialarbeten/dunkels.pdf