Entre el plano y el espacio la dimensión fractal con Cabri

Alicia Noemí Fayó
Profesora Universidad Tecnológica Nacional
Regional General Pacheco.
Buenos Aires, Argentina
aliciafayo@ciudad.com.ar

Ana Inés Cánepa
Profesora en el Instituto de Educación Superior
Alicia Moreau de Justo
Buenos Aires, Argentina
anikaines@yahoo.com.ar

Resumen

Se trabajará mediante el método Aula – Taller con guías de trabajos prácticos que inducirán a los docentes a investigar en Cabri los temas a desarrollar.
El taller está dirigido para docentes de nivel medio, terciario que deseen incorporar el relevante tema de Fractales en la curricula
Mediante la observación de un video sobre Fractales y lectura de textos sobre el tema se invitará a los asistentes a recorren este nuevo mundo que permite desde la simplicidad de un elemento geométrico llegar a formas intrincadas y enigmáticas.

Primer Encuentro:

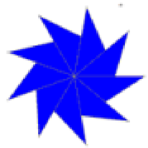
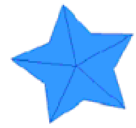
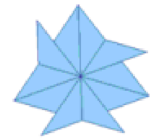
Transformaciones en el Plano

Para introducirnos en el tema que nos convoca hemos pensado en primer lugar en recordar algunos detalles sobre las transformaciones en el plano y el espacio.

Mosaicos de Penrose

El físico inglés Roger Penrose es uno de los más destacados matemáticos de nuestro tiempo. En la década de los 70 se interesó en resolver un problema clásico de las matemáticas: cómo cubrir totalmente un plano con figuras diferentes, sin que éstas se encimen ni queden huecos entre ellas, y donde además los patrones creados por las figuras no se repitan. Algunas de las figuras que utiliza Perose y va modificando son las siguientes. Los invitamos a representarlas, la Estrella de mar, la Sierra circular y el Asterix.

El físico inglés Roger Penrose es uno de los más destacados matemáticos de nuestro tiempo. En la década de los 70 se interesó en resolver un problema clásico de las matemáticas: cómo cubrir totalmente un plano con figuras diferentes, sin que éstas se encimen ni queden huecos entre ellas, y donde además los patrones creados por las figuras no se repitan. Algunas de las figuras que utiliza Perose y va modificando son las siguientes. Los invitamos a representarlas, la Estrella de mar, la Sierra circular y el Asterix.

		
Sierra circular	Estrella de mar	Asterix

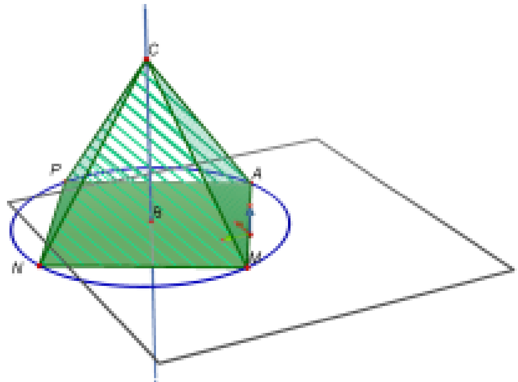
Actividad Nº1.

1. Determinamos una semirrecta. [**botón 5**]
2. Marcamos un Punto sobre objeto [**botón 2**].
3. Con la opción Número [**botón 10**], editamos el valor **36**, correspondientes a **36º**.
4. Rotamos [botón 6] la semirrecta respecto del origen **36º**.
5. Marcamos un punto sobre esta última semirrecta.
6. Determinamos un triángulo [**botón 3**], tomando como vértices el origen y los puntos pertenecientes a las semirrectas.
7. Ocultamos las semirrectas [**botón 11**].
8. Sometemos al triángulo a las transformaciones necesarias. Para conocer cómo se utilizan, se pulsa en el botón 6 la transformación deseada y se pide Ayuda en el último menú. En la parte inferior de la pantalla se despliega una explicación sobre el modo de uso de la herramienta.

Como sabemos, los movimientos del plano son funciones biyectivas del plano en sí mismo (aplicaciones). Además también recordamos que conservan las relaciones de pertenencia y orden.

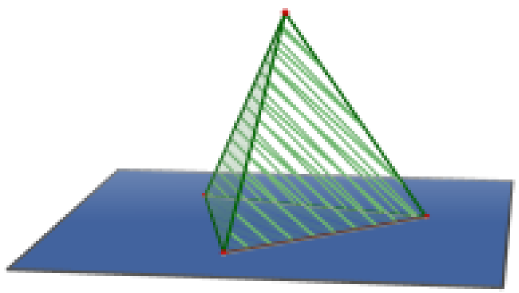
Transformaciones en el Espacio
Entorno Cabri 3D

Construcción de una Pirámide recta de base cuadrada mediante transformaciones en el espacio.
A continuación describimos la construcción.
Creamos dos puntos A y B [botón 2, Puntos], sobre el plano de base. Construimos la recta m con la opción perpendicular [botón 5, Construcciones relativas], al plano de base por el punto B.
Construimos la circunferencia con la opción Circunferencia [botón 3,Curvas] teniendo por eje (recta perpendicular al plano de la circunferencia y pasante por el centro) esta recta es pasante por el punto A.



Construimos los otros tres vértices del cuadrado inscripto en la circunferencia a partir del vértice A (utilizamos simetría central y la intersección recta /circunferencia).
Creamos un punto M sobre la recta perpendicular al plano de la circunferencia y pasante por el centro; el punto M será el vértice de la pirámide.
Creamos los cuatro triángulos, caras laterales de la pirámide con rotación. Cambiamos el color y definimos el tipo de superficie.

Actividad Nº2.



Construcción de un tetraedro regular mediante transformaciones en el espacio.
Una vez terminada la construcción la hacemos girar automáticamente.

Segundo Encuentro:
Cálculo de la Dimensión. Introducción

Una breve síntesis histórica nos ayudará conocer cómo se desencadenaron los descubrimientos y se llegó a la discusión de determinar la dimensión de los "monstruos".
"La distinción entre el infinito potencial y actual[1] procede de Aristóteles. En los tiempos medievales la noción de infinito vuelve a asomar, ya sea con la introducción del cero como símbolo operatorio, ya sea en el tratamiento de series convergentes, pero es en el siglo del auge de los métodos infinitesimales cuando el infinito recobra actividad, aunque en forma siempre imprecisa, ya sea en las brumas "metafísicas"que rodean a los conceptos básicos del cálculo infinitesimal, ya sea amparado por el éxito de las aplicaciones de este cálculo". "La teoría cantoriana legitima este infinito actual, este infinito que está "en la naturaleza de las cosas", que hasta entonces había estado reprimido de modo que sólo pudiera emerger a la conciencia matemática el infinito potencial, el infinito como devenir. Y así como el siglo XIX legisló sobre el infinito potencial, Cantor con su teoría de conjuntos legislará, jerarquizará y clasificará el infinito actual"[2].

[1] Capítulo V.Babini, J. Historia de la Ciencia. *La Ciencia en tiempos de la Academia y el Liceo* Centro Editor de América Latina. [pág 53].

[2] Rey Pastor, J. Babini, José. Historia de la Matemática. Vol 2. Del Renacimiento a la Actualidad. Ed Codisa. Barcelona. 1986. [Pág 196-197]

A fines de ese siglo se habían engendrado una colección de monstruos matemáticos como funciones continuas sin tangentes... El cambio de punto de vista de lo analítico a lo geométrico mostró a los matemáticos que lo que parecía ser una horrible mezcolanza tenía mucha semejanza con la aparente mezcolanza del mundo natural[3].
Es en este momento que surgen los fractales geométricos mediante una iteración infinita de un proceso. Lo que llama la atención es que el comienzo de ese proceso es sencillo. Sin embargo al irse repitiendo infinitamente se llega a formas de gran complejidad.

¿Qué es la dimensión?

Según las palabras de Mandelbrot. "Cualquiera que escriba un tratado matemático sobre la teoría de la dimensión está asumiendo que dicha teoría es única. Pero en mi opinión lo más importante es que un concepto amplio como el de dimensión presenta diversas facetas matemáticas que, aparte de ser conceptualmente distintas, dan distintos resultados numéricos". "Poincaré presenta una elaboración muy elocuente y a la larga muy fructífera de las ideas de Euclídes en sus artículos de 1903[Poincaré 1905, Cáp. II, sec.3] y 1912 [Poincaré 1913, parte 9]"
"Para dividir el espacio hacen falta unos cortes llamados superficies; para dividir las superficies hacen falta unos cortes llamados curvas; y un punto no se puede dividir pues no es continuo. Como las curvas se pueden dividir por cortes no continuos son continuos de dimensión 1, como las superficies se pueden dividir por cortes continuos de dimensión 1, son continuos de dimensión dos; finalmente, el espacio se puede dividir por cortes continuos de dos dimensiones, con lo que es un continuo de dimensión tres.[4]. A esta dimensión se la llamará "dimensión topológica".

El primer paso de un análisis riguroso de la dimensión fue hecho por Cantor el 20 de junio de 1877 en una carta a Dedekind.
Generación geométrica de fractals
Comenzaremos por una construcción muy sencilla para observar cómo se genera un fractal.

Actividad Nº1. El Tamiz de Sierpinski

Waclaw Sierpinski [1882-1969] fue un matemático polaco. Hizo el doctorado en Krakóv. En 1907 se interesó en la teoría de conjuntos. Se encontró con el teorema que admite que un punto del plano puede ser especificado con una simple coordenada. Llamó tanto su atención que le escribió a Banachiewicz, preguntándole cómo era posible este hecho, la respuesta fue una sola palabra "Cantor", a partir de allí siguió estudiando la teoría de Conjuntos. Escribió sobre la teoría de los números y especialmente sobre los irracionales.
Observando sus diseños podemos decir que:
En la dimensión 1, el fractal más simple de Sierpinski es el "Conjunto de Cantor".
En la dimensión 2, los 4 fractales más conocidos son el triángulo o tamiz, el cuadrado [o tapiz, carpeta], el pentágono y el hexágono.

[3]Richard Mankiewicz. Historia de la Matemática. Ed. PAIDOS.2000.
[4]Mandelbrot, Benoît . La Geometría Fractal de la naturaleza. Matemas 49. Trd.López Llosa. Tusquets Editores.1997.[Pág 31, 571]

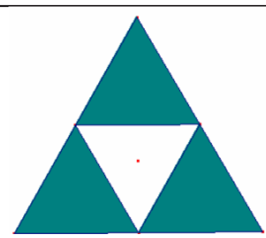
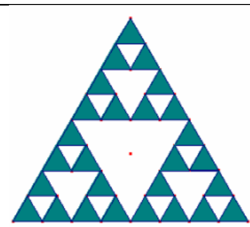
En la dimensión 3, el fractal de Sierpinski más célebre es la esponja de Sierpinski-Menger [Karl Menger 1902 - 1985: matemático americano], atractor de 20 homotecias de razón 1/3 centradas en los vértices y aristas del cubo de dimensión fractal, y en el que cualquier corte en sus figuras o cuerpos por las bases medias o ejes de simetría nos permiten ver el "Conjunto de Cantor"...
Alrededor de 1915 Sierpinski estudió los fractales de dos dimensiones.
Construcción: Para construir el tapiz se procede de la siguiente manera.

Actividad Nº2.

Construimos un triángulo equilátero. Marcamos los puntos medios [botón 5] de los lados, redefinimos los triángulos que quedan determinados por lo vértices y dichos puntos como se muestra en la figura [botón 3].
Se rellenan con color [botón 11].

Definimos la macro Sierpinsky.

OI: triángulo inical.
OF: los tres triángulos construidos.

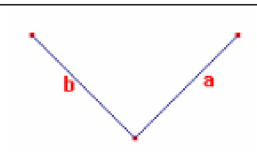
	1° Etapa: Se suprime el triángulo abierto que tiene como vértices los puntos medios del triángulo inicial. Quedan 3 triángulos semejantes al primero con razón $\frac{1}{2}$ del inicial.
	2° Etapa Sobre cada triángulo resultante se procede de igual manera. Podemos aplicar la macro Sierpinsky.

Construcción de "El Dragón"de Harte-Heightway

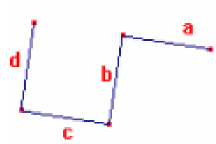
Este dragón fue investigado en primer lugar por el físico John Heighway, Bruce Banks, y William Harter. Fue descripto por Martín Gardner en su Mathematical Games column of Scientific American donde admite que Harter usaba el dragón como un diseño que cubría un folleto preparado para un seminario en la NASA. Algunas de sus propiedades fueron publicadas primero por Chandler Davis y Donald Knuth.
Su construcción es simple. Se describe cómo se obtiene: se repiten sucesivamente los lados de una poligonal como la que se muestra en la figura pero se van alternando entre la derecha y la izquierda.

Actividad N°3.

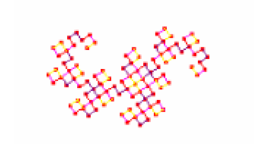
Primera construcción correspondiente al cuadro de la izquierda.
Determinamos un segmento $\overline{AB}$ [botón 3].
¿Cómo podemos hacer para construir sobre él dos segmentos congruentes que formen ángulo recto?.
Definimos una macro que llamaremos Ángulo recto.
OI: segmento $\overline{AB}$
Ocultamos el segmento.
OF: los lados del ángulo recto.



a.



b.



Segunda construcción

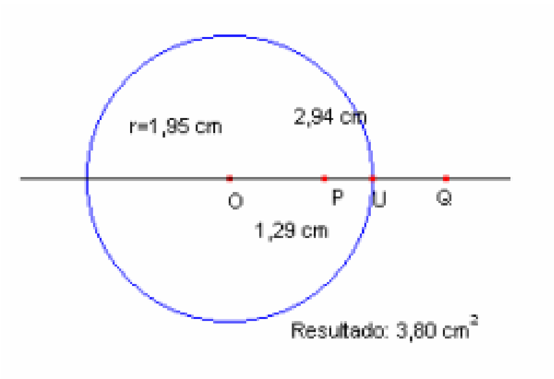
Determinamos un segmento.
Aplicamos la macro Angulo recto al segmento, debe quedar como la figura a. Nuevamente en cada uno de los segmentos volvemos a aplicar la macro y queda una figura como b. Pintamos con diferentes colores los segmentos. [botón 11]

Creación de la Macro:
OI: Angulo recto.
OF: Poligonal d c b a

Inversión

Antes de pasar a otros fractales, recordaremos otra casi transformación llamada inversión[5]

[5]Extraído del Libro de: Roger Cuppens. Avec Cabri-Géomètre II jouez... et faites de la Géométrie!. Tome 1 A.P.M.E.P. 2002. Traducción para los alumnos de la Licenciatura: Prof. Alicia Noemí Fayó.



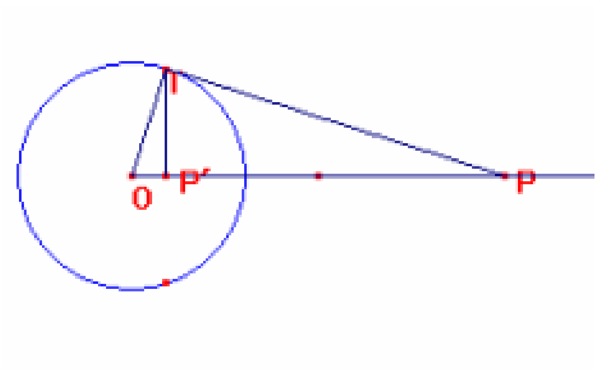
Su definición dice lo siguiente:
Sea c una circunferencia de centro O y radio r. Si P es un punto no coincidente con el centro O, el punto Q de la recta OP que verifica

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = r^2$$

es el trasformado del punto P en la inversión de circunferencia c.

La opción Inversión se encuentra en el botón 6. Se puede verificar, utilizando los útiles Distancia y Longitud y la Calculadora, que el punto dado por la opción del menú Inversión cumple esta propiedad.
También lo podemos construir de la siguiente manera: ¿Cómo se encuentra la imagen de un punto P a través de la inversión sin el menú?

Actividad Nº4.



Determinamos:
P exterior a la circunferencia.
PT tangente a la circunferencia en T.
TP′⊥ OP [botón 5]

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP'}}$$

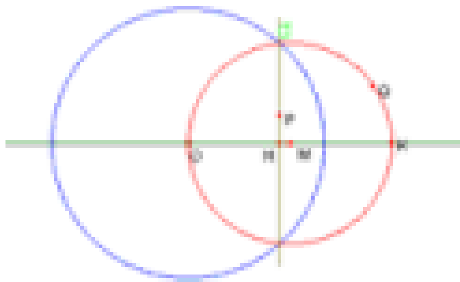
$$OP \times OP' = r^2$$

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{r}} = \frac{\overline{r}}{\overline{OP'}}$$

Nota : Se dice que:
P se invierte en P′,
O es centro o polo de la inversión
r^2 es potencia de la inversión.

Análogamente para los casos: P interior a la circunferencia y P perteneciente a la circunferencia.

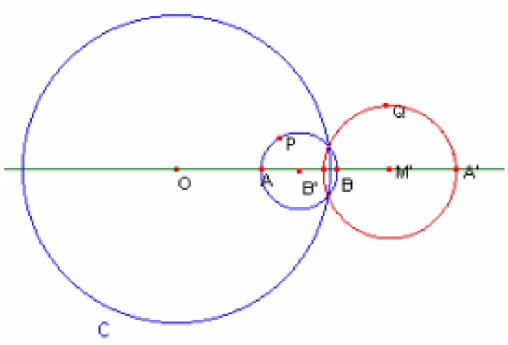
Actividad Nº5. Inversa de una recta



Analicemos los diferentes casos:
La recta no pasa por el centro de la circunferencia.
La recta pasa por el centro de la circunferencia.
Para estudiar la trasformada de una recta d no pasante por el punto O:
Determinamos un punto P perteneciente a la recta d.

Hallamos el inverso de P que llamamos Q.
Hallamos el lugar geométrico[botón 5] del punto Q cuando el punto P se desplaza en la recta.
Se verifica entonces que la distancia MQ no varía mientras P recorre la recta d.
2. Desplacemos la recta d hasta hacerla pasar por el centro O.
Inversa de una circunferencia
Dado que la inversión es involutiva, se deduce inmediatamente de lo que precede que la inversa de una circunferencia pasando por el centro de la circunferencia de inversión es una recta.

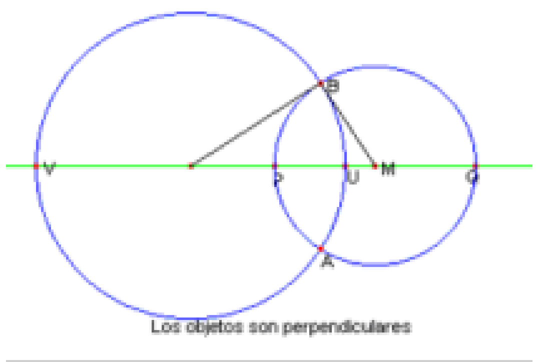
Actividad Nº6.



Estudiemos ahora la trasformada de una circunferencia γ que no pasa por el centro O.
Determinamos una circunferencia γ en estas condiciones.
Tomamos un nuevo punto P sobre la circunferencia γ.
Determinemos el inverso Q de P respecto de la circunferencia c.
Consideremos el lugar geométrico de Q cuando P se desplaza por la circunferencia γ.

Actividad Nº7. Circunferencias ortogonales

Determinamos dos puntos U y V, y la circunferencia c que tiene al segmento UV como diámetro.
Dado un punto P hallamos su inverso respecto de la circunferencia c. [botón 6] Sea M el punto medio entre los puntos P y Q. [botón 5]
Determinamos la circunferencia c´que tiene por radio MP.
Llamamos A y B a los puntos de intersección de las circunferencias c y c'. Los diámetros de las circunferencias son de diámetro UV y PQ.
Determinamos los radios OB y MB. Marcamos el ángulo OBM. [botón 11]

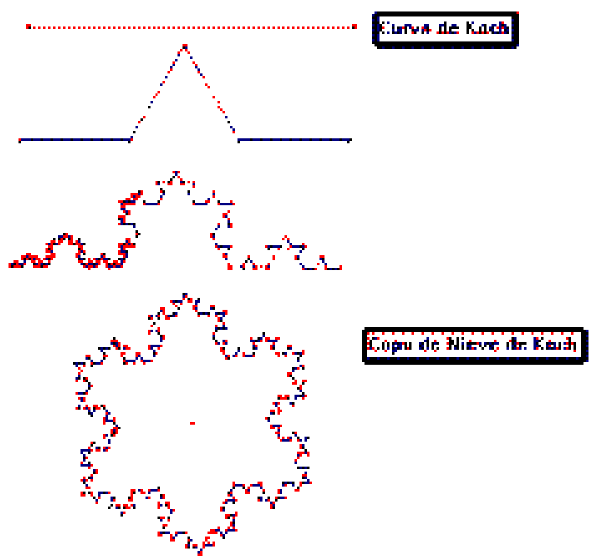


Se puede conjeturar el resultado fundamental:
Sea c′ una circunferencia de centro O y P un punto diferente de O. Si U y V son los puntos de intersección de la recta OP y la circunferencia, las condiciones siguientes son equivalentes:
El punto Q es el inverso del punto P respecto de la circunferencia c, Las circunferencias de diámetro PQ y UV son ortogonales.

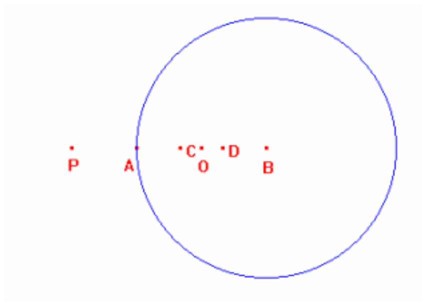
Las Curvas de Koch y el copo de nieve.

Actividad Nº8.

Observemos la figura, la semilla se obtiene en primer lugar dividiendo un segmento unitario en tres partes.



Esta división la podemos hacer por Thales pero hemos aprendido qué significa inversión. Podemos hacer uso de ella para dividir el segmento de la siguiente manera:
Determinamos un segmento $\overline{AB}$.



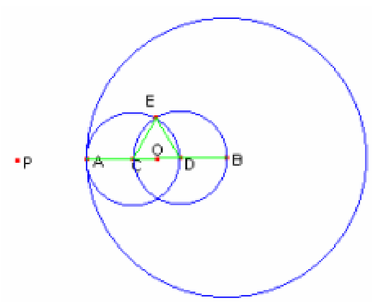
Marcamos el punto medio entre A y B que lo llamamos O.
Determinamos el simétrico de O respecto de A y lo llamamos P.
Buscamos el inverso de P respecto de la Circunferencia $C_{(B,\overline{BA})}$ es decir de centro B que pasa por A.

El inverso C estará ubicado a los $\frac{2}{3}\overline{BA}$
El punto D es el simétrico del punto C respecto del centro O

Esta división la podemos hacer por Thales pero hemos aprendido qué significa inversión. Podemos hacer uso de ella para dividir el segmento de la siguiente manera:
Determinamos un segmento $\overline{AB}$.
Marcamos el punto medio entre A y B que lo llamamos O.
Determinamos el simétrico de O respecto de A y lo llamamos P.
Buscamos el inverso de P respecto de la Circunferencia $C_{(B,\overline{BA})}$ es decir de centro B que pasa por A.
El inverso C estará ubicado a los $\frac{2}{3}\overline{BA}$.
El punto D es el simétrico del punto C respecto del centro O

Actividad N°9

La curva de Koch se inicia con el reemplazo del segmento AB por la poligonal ACEDB donde los segmentos son congruentes. Ya tenemos el segmento dividido en tres partes congruentes.Ahora reemplazamos el segmento medio por dos lados de un triángulo equilátero sin la base.
Definimos una macro [botón 7] de la siguiente manera.
Macro Curva Koch
OI: el segmento AB



Ocultamos el segmento AB, y las construcciones auxiliares, completamos la poligonal con segmento tomando los extremos de izquierda a derecha.
OF: la poligonal.[de izquierda a derecha.]
Este procedimiento se repite en los 4 segmentos. Luego se repite la construcción indefinidamente. Da una curva continua de longitud infinita y no derivable. Si se aplica esta construcción a los lados de un triángulo equilátero se obtiene el copo de nieve de Koch [llamado también estrella de Koch] como el límite de la construcción.

Curvas de Koch. Cálculo de la dimensión.
Se define nuevamente el inicio en un segmento $[0, 1]$
Luego la longitud de las poligonales está dada por las siguientes medidas:

$$\frac{4}{3}; \left(\frac{4}{3}\right)^2; \left(\frac{4}{3}\right)^2; \ldots \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

en consecuencia se puede decir que la curva tiene longitud infinita.

$$\begin{aligned} m(L) &= m(l_1) + m(l_2) + m(l_3) + m(l_4) \\ m(L) &= 4m(l_1) \\ \text{Por lo dicho anteriormente:} \qquad 3^d m(l_1) &= m(L) \\ 3^d m(l_1) &= 4m(L) \\ 3^d &= 4 \\ d &= \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}2618 \end{aligned}$$

Tercer Encuentro :
Fractales autoinversivos
Fractal Cadena de Poincaré

En estos fractales no se cumple la propiedad de que cada conjunto parcial es una reproducción del conjunto total que suelen obtenerse a partir de transformaciones del plano: traslaciones, rotaciones y dilataciones; expresables como funciones lineales.
En cambio los fractales autoinversos que fueron introducidos hacia 1880 por Poincaré y Félix Klein, son los que se obtiene a partir de un conjunto de circunferencias generadoras aplicándoles todas las composiciones posibles de inversiones con respecto a las circunferencias del conjunto generador.
El cálculo de la dimensión, en estos casos, no es sencillo.

Actividad N°10.

Construcción de cuatro circunferencias tangentes. C_1, C_2, C_3, C_4

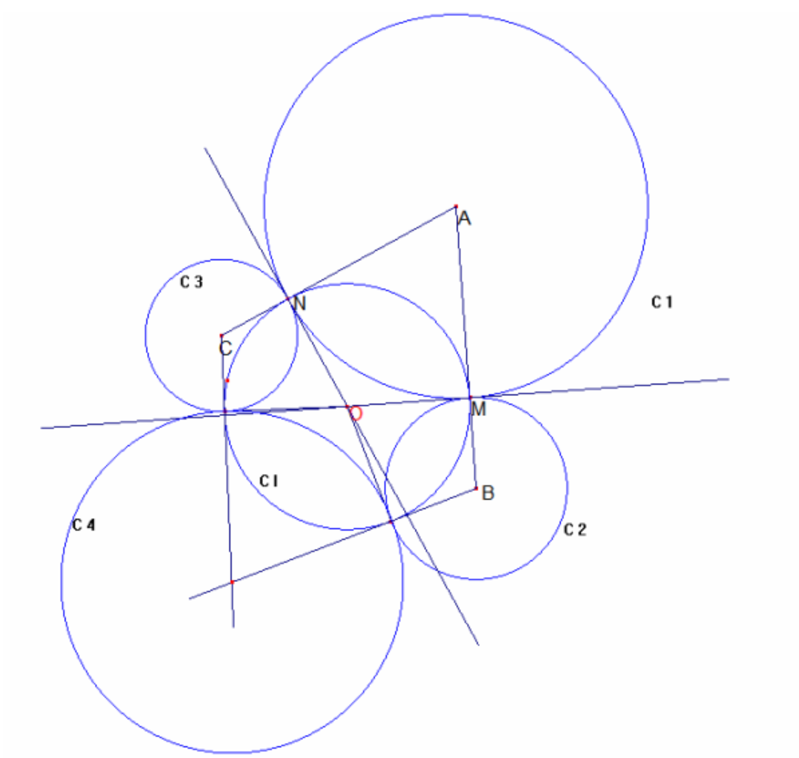
Determinamos un segmento $\overline{AB}$
Tomamos en él un punto sobre objeto M.
Definimos dos circunferencias con centro en los extremos del segmento y radios $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$; llamamos a la $C_{(A,\overline{AM})} = C_1$, $C_{(B,\overline{BM})} = C_2$.
Determinamos el segmento $\overline{AC}$, tal que C no este alineado con A y B.
Llamamos N al punto de intersección de $\overline{AC}$ y $C_{(A,\overline{AM})}$.
Construimos la circunferencia de centro N y radio $\overline{CN}$ o sea $C_{N,\overline{CN}} = C_3$.

Construcción de una circunferencia inversiva de otras tres tangentes entre sí

Según Mandelbrot, si existe, hay una circunferencia inversiva de estas tres. Por lo dicho anteriormente, será ortogonal a cada una de ellas.
Para construir esta circunferencia inversiva C procedemos de la siguiente manera:
Determinamos las perpendiculares a los radios en los puntos de tangencia entre C_1, C_2 y C_2, C_3.
Dichas rectas se intersecan en un punto O, que es el centro de la circunferencia inversiva C.
Podemos comprobar que es ortogonal a las restantes.

Construcción de la cuarta circunferencia

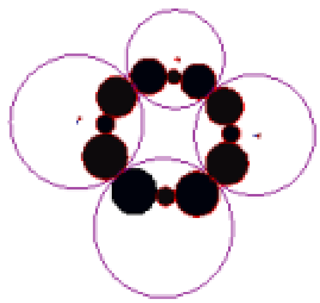
Determinamos los radios de la circunferencia inversiva entre el centro de la misma y los puntos de intersección con las circunferencias C_1 y C_3.
Queda determinado el centro de la cuarta circunferencia.
Trazamos C_4. Ocultamos las construcciones auxiliares.



Seguidamente hallamos las inversas de cada una de las circunferencias respecto de las otras.

Para ello:
Determinamos por ejemplo un punto P en una circunferencia.
Hallamos su inverso Q respecto de otra circunferencia.

Con Lugar [botón 5] del punto Q cuando P recorre la circunferencia se determinará una de las cuentas del collar.
Se las puede rellenar con color si se las redefinen como circunferencias.
Una vez obtenido el collar se puede continuar en una tercera etapa invirtiendo cada una de las cuentas con respecto a las demás, se continua así indefinidamente obteniendo el fractal inversivo.



Fractales en el espacio

Actividad

El desafío será construir "recortar"como en cada cara un triángulo invertido y sustituirlo por un tetraedro. En la práctica, esto es lo mismo que intersecar en cada tetraedro otro de iguales medidas para formar una estrella. De forma similar al caso del Copo de nieve, el área superficial tiende a infinito. Lo más espectacular: El volumen tiende al de un hexaedro cuyas diagonales laterales miden lo mismo que la arista del tetraedro original. Tras unas pocas iteraciones, el tetraedro se convierte en un cubo.