USO DE HERRAMIENTAS NUMÉRICAS Y COMPUTACIONALES EN EL AJUSTE DE CURVAS

Ascheri, María E. - Pizarro, Rubén A.
Facultad de Cs. Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa - Argentina
e-mail: mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar
Campos de investigación: Uso de tecnología en la enseñanza de temas de Cálculo Numérico; Nivel educativo: Superior

RESUMEN

Nuestro objetivo es introducir a los alumnos de Cálculo Numérico en el uso de *la técnica de ajuste de curvas por medio de la regresión con mínimos cuadrados* en la solución de problemas de ingeniería, de física y de matemática aplicada, utilizando herramientas numéricas y computacionales.
La metodología usada para apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje de este temática particular de Cálculo Numérico con computadora es la siguiente: se combina la enseñanza tradicional, las técnicas grupales de aprendizaje activo y la computadora como apoyo a la explicación del docente y para fomentar el aprendizaje de los alumnos.
En este trabajo se muestran, básicamente, los resultados obtenidos a partir de la implementación de esta propuesta metodológica.

INTRODUCCIÓN

Durante el desarrollo del curso de Cálculo Numérico describimos los métodos numéricos aplicados, a alumnos de tercer año de las carreras: Ingeniería Civil, Licenciatura en Física y Profesorado en Matemática.
Entre los objetivos propuestos en este curso podemos citar los siguientes:

- Que sea fácilmente comprensible para los alumnos con un conocimiento mínimo de matemáticas.
- Capacitar a los alumnos para que practiquen los métodos numéricos en una computadora.
- Elaborar programas simples que puedan usarse de manera sencilla en aplicaciones científicas.
- Proporcionar software que resulte fácil de comprender.

La importancia de los métodos numéricos ha aumentado de forma drástica en la enseñanza de la ingeniería y la ciencia, lo cual refleja el uso actual y sin precedentes de las computadoras. El desarrollo de un programa siempre es importante en el aprendizaje de métodos numéricos. Cuando los alumnos implementen con buen resultado los métodos numéricos en una computadora personal y los apliquen para resolver problemas que de otro modo resultan intratables, tendrán, entonces, una demostración tangible de cómo les pueden ayudar las computadoras para su desarrollo profesional.
Con la finalidad de implementar nuevas estrategias metodológicas para la enseñanza de *la técnica de ajuste de curvas por medio de la regresión con mínimos cuadrados*, y dentro del marco teórico de la ingeniería didáctica (Artigue, 1998), buscamos actividades relativas a los intereses de los alumnos que se matriculan en el curso de Cálculo Numérico. Al presentar esta temática a través de situaciones que resulten cotidianas, se logrará una mayor receptividad por parte de los educandos. Para la resolución de estas actividades, los alumnos debieron desarrollar los programas utilizando el paquete MATLAB. Estas actividades fueron precedidas por:

- **Un marco teórico:** para sistematizar los conocimientos dentro de la asignatura.
- **Resolución de ejercicios:** para afianzar los conceptos teóricos y las técnicas utilizadas.

DESARROLLO

En la ciencia y en la ingeniería se da, a menudo, el caso de que un experimento produce un conjunto de datos $(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$, siendo las abscisas $\{x_i\}$ distintas entre sí. Uno de los objetivos del cálculo numérico es la determinación de una fórmula $y = f(x)$ que relacione las variables.

Los alumnos han visto cómo se construye un polinomio cuya gráfica pase por todos los puntos de un conjunto dado. Si todos los valores $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ se conocen con una precisión de varias cifras significativas, entonces la interpolación polinomial produce buenos resultados, lo que no ocurre en otras circunstancias. Algunos experimentos se llevan a cabo con una maquinaria que permite obtener los datos con varias cifras significativas de precisión; sin embargo, muchos experimentos se realizan con un equipamiento de, como mucho, dos o tres cifras significativas. A esto se añade, a menudo, un cierto error experimental de las mediciones, de forma que aunque se calculen tres o cuatro cifras de los valores $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$, sucede que el valor exacto $f(x_i)$ verifica

$$f(x_i) = y_i + c_i,$$

donde c_i es el error de la medición.

¿Cómo se encuentra la mejor aproximación que pase cerca (no por encima de cada uno) de los puntos? Esta pregunta se usa como disparador para introducir el contenido temático aquí involucrado.

Seguidamente desarrollamos la teoría básica para investigar todo lo referido al ajuste de curvas por medio de la regresión con mínimos cuadrados. Esta teoría se da en la forma tradicional y con el apoyo de un Cuaderno elaborado por los docentes de la Cátedra.

A los alumnos les proporcionamos una amplia variedad de ejercicios que los ayudarán a mejorar sus habilidades, tanto en el conocimiento de la teoría como en la práctica del ajuste de curvas por medio de la regresión con mínimos cuadrados. Con la misma finalidad les damos además, distintas actividades en donde se plantean situaciones problemáticas reales de ingeniería, de física y de matemática aplicada, en general.

Las actividades que implementamos tienen como finalidad lograr una revisión e integración de conocimientos de esta temática particular de Cálculo Numérico, para que les permitan, tanto al alumno como al docente, una evaluación de los saberes matemáticos enseñados y aprendidos según el marco teórico subyacente y la batería de ejercicios planteados previamente.

Las tareas de computación con el paquete MATLAB que les proponemos a los alumnos, se desarrollan en la Sala de Computación, en grupos y con la supervisión de los docentes de la asignatura. Cabe señalar que durante las primeras semanas de iniciado el curso, se les dan a los alumnos algunas nociones básicas y un Cuaderno sobre el uso del paquete MATLAB. Además, si bien se pretende que, por sí mismos, los alumnos desarrollen las actividades propuestas, ellos cuentan con el apoyo de los docentes y pueden intercambiar ideas con sus pares. De esta manera, se espera contribuir a una mayor comprensión de los contenidos temáticos involucrados, y lograr un aprendizaje dinámico e interactivo favorecido por el intercambio de experiencias, producto del análisis y discusión de las situaciones problemáticas planteadas. Adicionalmente, el hecho que los alumnos diseñen programas propios para resolver las actividades propuestas, juega un rol importante en el aprendizaje de los métodos numéricos. No sólo le ayudarán a afianzar los conceptos teóricos involucrados, sino que además, le

permitirán aprender a reconocer y controlar los errores de las aproximaciones obtenidas que, como sabemos, son inseparables de los cálculos numéricos a gran escala.
A continuación mostramos algunas de las actividades propuestas a los alumnos para su elaboración y posterior análisis. En cada caso de estudio deben emitir las conclusiones a las que arribaron. Estas, conjuntamente con una síntesis de los resultados obtenidos de cada actividad y los programas por ellos diseñados, deben ser incluidos en un informe final que deben presentar cada uno de los grupos a los docentes de la asignatura. Dicho informe además, debe ser expuesto y defendido, en forma individual, frente a los docentes y a los restantes alumnos del curso de Cálculo Numérico, a efectos de que se produzca un intercambio de experiencias y efectuar tareas remediales, si fuese necesario. De esta manera surgirán, naturalmente, los casos en donde se debe profundizar y/o extender el tratamiento de los aspectos más conceptuales y más difíciles de entender, y de las técnicas numéricas utilizadas y su implementación en la computadora. Esto redundará en beneficio del proceso de enseñanza-aprendizaje del contenido curricular considerado, resultando enriquecedor tanto para los alumnos como para los docentes de la asignatura.
Son evaluados: la presentación del informe, su exposición y defensa, el trabajo en grupo y el desempeño de cada integrante dentro del mismo. Esta evaluación forma parte de las evaluaciones parciales contempladas en el curso de Cálculo Numérico.
La **Actividad 1** tomada de la ingeniería química, demuestra cómo se puede linealizar un modelo no lineal y ajustarse a datos que usan regresión lineal.
La **Actividad 2** muestra que si los datos que se deben ajustar no son lineales y no presentan una naturaleza polinomial, entonces puede ocurrir que la curva resultante presente oscilaciones grandes (*oscilación polinomial*). Esta actividad ilustra entonces, el hecho de que no se suelen usar polinomios de grado seis o mayor, a no ser que se sepa que la función de la que provienen los datos es un polinomio.

Actividad 1

Los modelos de crecimiento poblacional son importantes en muchos campos de la ingeniería. La suposición de que la tasa de crecimiento de la población (dp/dt) es proporcional a la población actual (p) en el tiempo (t) es de fundamental importancia en muchos de los modelos, en forma de ecuación

$$\frac{dp}{dt} = kp \ , \tag{1}$$

donde k es un factor de proporcionalidad conocido como la tasa de crecimiento específico y tiene unidades de tiempo^{-1}. Si k es una constante, entonces se puede obtener la solución de la ecuación (1) de la teoría de ecuaciones diferenciales

$$p(t) = p_0 e^{kt} \ , \tag{2}$$

donde p_0 es la población en el tiempo $t = 0$. Se observa que $p(t)$ en la ecuación (2) tiende a infinito a medida que t crece. Este comportamiento es claramente imposible en los sistemas reales. Por lo tanto, se debe modificar el modelo y hacerlo más realista.
Primero, se debe reconocer que la tasa de crecimiento específico k no puede ser constante a medida que la población crece. Esto es porque, cuando p tiende a infinito, el organismo que se modela se ve limitado por factores tales como el almacenamiento de comida y producción de desperdicios tóxicos. Una manera de expresar esto matemáticamente es la de usar el modelo de tasa de crecimiento y saturación tal como

$$k = k_{\text{máx}} \frac{f}{K + f} , \tag{3}$$

donde $k_{máx}$ es la máxima tasa de crecimiento posible para valores de comida (f) abundante y K es la constante de semi-saturación. Vemos que cuando $K = f$, $k = k_{máx}/2$. Por lo tanto, K es la cantidad de comida disponible que sostiene una tasa de crecimiento poblacional igual a la mitad de la tasa máxima. Las constantes K y $k_{máx}$ son valores empíricos basados en medidas experimentales de k para varios valores de f. Como ejemplo, supóngase que la población p representa una levadura empleada en la producción comercial de cerveza y f es la concentración de la fuente de carbono a fermentarse. Las medidas de k contra f de la levadura se muestran en el siguiente cuadro. Se necesita calcular $k_{máx}$ y K de estos datos empíricos.

Datos usados en la evaluación de las constantes en un modelo de promedio de crecimiento de saturación que caracteriza a la cinética microbial.

f, mg/l	*k*, días^{-1}
7	0.29
9	0.37
15	0.48
25	0.65
40	0.80
75	0.97
100	0.99
150	1.07

Úsese el método de mínimos cuadrados lineal para determinar $k_{máx}$ y K, y realícese el gráfico correspondiente. Escríbanse además, las conclusiones a las que se arribaron.

Resultados obtenidos por los alumnos:

Datos usados para la regresión lineal

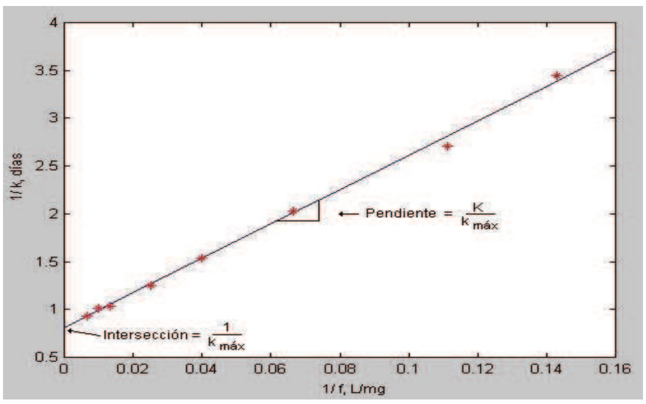
f, mg/l	*k*, días^{-1}	*1/f*, L/mg	*1/k*, día	$(1/f)^2$, L^2/mg^2	*(1/f)(1/k)*, L/mg**.** día
7	0.29	0.14286	3.44828	0.02041	0.49262
9	0.37	0.11111	2.70270	0.01235	0.30030
15	0.48	0.06667	2.08333	0.00444	0.13890
25	0.65	0.04000	1.53846	0.00160	0.06154
40	0.80	0.02500	1.25000	0.00063	0.03125
75	0.97	0.01333	1.03092	0.00018	0.01374
100	0.99	0.01000	1.01010	0.00010	0.01010
150	1.07	0.00667	0.93458	0.00004	0.00623
		$\sum$: 0.41564	$\sum$: 13.99837	$\sum$: 0.03975	$\sum$: 1.05468

Se obtiene

$$k_{máx} = 1.23 \text{ días}^{-1}, \qquad K = 22.18 \text{ mg/L}$$

De estos resultados, de (3) y de (1), se obtiene

$$\frac{dp}{dt} = 1.23 \frac{f}{22.18 + f} p \cdot$$



Linealización del modelo de promedio de saturación. La línea es un ajuste con mínimos cuadrados que se usa en la evaluación de los coeficientes del modelo, $k_{máx}$ = 1.23 días $^{-1}$ y K = 22.18mg/L, para levadura en la fabricación de cerveza.

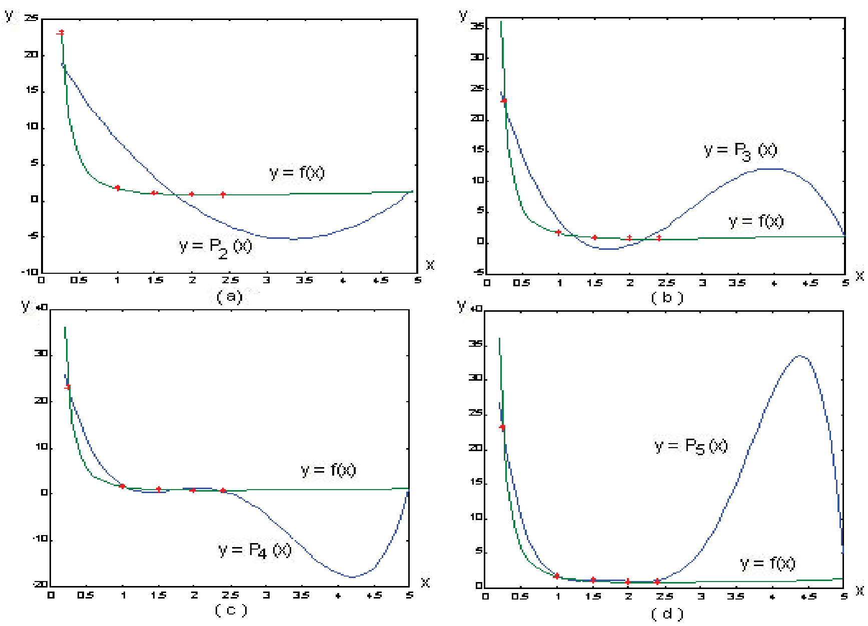
Conclusión a la que arribaron los alumnos luego de realizar esta actividad:
Si *f* se aproxima a cero a medida que *p* crece, entonces *dp/dt* tiende a cero y la población se estabiliza.

Actividad 2
Se usa la función $f(x) = 1.44/x^2 + 0.24x$ para generar seis parejas de datos (0.25, 23.1), (1.0, 1.68), (1.5, 1.0), (2.0, 0.84), (2.4, 0.826) y (5.0, 1.2576).
Obténganse los ajustes mediante polinomios óptimos en mínimos cuadrados para 2, 3, 4 y 5 grados.
Grafíquense, para cada caso, el polinomio óptimo y la función f(x).
Escríbanse además, las conclusiones a las que se arribaron.

Observación. No deja de ser tentadora la posibilidad de utilizar un polinomio óptimo en el sentido de los mínimos cuadrados para ajustar datos que no son lineales. Pero si los datos no muestran una naturaleza polinomial, puede ocurrir que la curva resultante presente oscilaciones grandes. Este fenómeno llamado *oscilación polinomial*, se hace más pronunciado conforme aumenta el grado del polinomio y, por esta razón, no se suelen usar polinomios de grado 6 o mayor, a no ser que se sepa que la función de la cual provienen los datos es un polinomio.

Resultados obtenidos por los alumnos:

$P_2(x) = 22.93 - 16.96\,x + 2.553\,x^2$
$P_3(x) = 33.04 - 46.51\,x + 19.51\,x^2 - 2.296\,x^3$
$P_4(x) = 39.92 - 80.93\,x + 58.39\,x^2 - 17.15\,x^3 + 1.680x^4$
$P_5(x) = 46.02 - 118.1\,x + 119.4\,x^2 - 57.51\,x^3 + 13.03x^4 - 1.085x^5$



(a) Ajuste de $P_2(x)$ a los datos
(b) Ajuste de $P_3(x)$ a los datos
(c) Ajuste de $P_4(x)$ a los datos
(d) Ajuste de $P_5(x)$ a los datos

Conclusiones a las que arribaron los alumnos luego de desarrollar esta actividad:

1. $P_3(x)$, $P_4(x)$ y $P_5(x)$ presentan oscilaciones grandes en el intervalo [2, 5].
2. $P_5(x)$ pasa por los seis puntos; sin embargo, es la que peor se aproxima a la función.
3. El polinomio que se ajusta a los datos y se aproxima a la función es $P_2(x)$.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A parir de la observación de las distintas secuencias de esta experiencia, podemos concluir que hemos obtenido algunos otros logros con respecto a los grupos de alumnos de años anteriores con aquellos que han cursado la asignatura bajo esta metodología, donde, básicamente, se han incorporado actividades adicionales que contemplan temas relativos a sus propias carreras y en las cuales deben usar herramientas numéricas y computacionales. Dichos logros son los siguientes:

- Se logra un mayor rendimiento académico de los alumnos.
- Se reafirman e integran los conocimientos de los alumnos, adquiridos en el aula.
- Se muestran más motivados al ver que pueden realizar cálculos a gran escala y en poco tiempo de ejecución de los programas y que además, pueden controlar y comprobar los resultados rápidamente, lo que genera una participación activa y de intercambio de experiencias por parte de los alumnos.
- Se nivelan los conocimientos adquiridos de los alumnos a través del trabajo grupal.
- Se logra que los alumnos tengan un buen manejo del paquete MATLAB y puedan así desarrollar sus propios programas sin demasiadas dificultades.
- Se sienten motivados a consultar bibliografía adicional.

Además, consideramos acertada la elección del paquete MATLAB, porque además de que ahorra tiempo y esfuerzo en la resolución de una gran variedad de problemas, que las soluciones obtenidas resultan más fiables que las obtenidas manualmente, que es una herramienta para la enseñanza de la matemática, facilita el proceso de enseñanza - aprendizaje aportando una interfaz gráfica visual más didáctica y comprensible.
Concluimos que la experiencia resultó positiva y que es viable implementarla en otros temas de Cálculo Numérico.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1998). *Ingeniería Didáctica* en: *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica S. A.

Burden, R. y Faires, J. (2002). *Análisis Numérico*, International Thomson Editores, S. A., México. (Trad. de Numerical Analysis, 7th. Ed., Brooks/Cole, 2001).

Chapra, S. y Canale, R. (1992). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. *Con aplicaciones en computadoras personales*, McGraw - Hill, México. (Trad. de Numerical Methods for Engineers with Personal Computer Applications, McGraw - Hill, 1985).

Gerald, C. y Wheatley, P. (2000). *Análisis Numérico con Aplicaciones,* Pearson Educación, México. (Trad. de Applied Numerical Analysis, Sixth Ed., Addison Wesley, 1999).

Mathews, J. y Fink, K. (2000). *Métodos Numéricos con MATLAB*, Prentice - Hall Iberia S.R.L., España. (Trad. de Numerical Methods using MATLAB, Prentice - Hall, 1999).