Relatividad de la derivada

Octavio Montoya
Profesor Universidad del Tolima
Ibagué, Colombia
octaviomontoya@1963yahoo.es

Resumen

En este documento se presenta la derivada desde el punto de vista de la factorización. Es una forma de ver la derivada de Caratheodory en un Espacio Prehilbert. Esto hace que la derivada dependa del producto interno definido en el Espacio Prehilbert.

Problema 1. Calcular la derivada de $f(x) = x^2, x \in R$ en el punto $x = a$.

Solución.

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \tfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \tfrac{(x-a)\cdot(x+a)}{x-a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a.$$

Por tanto $f'(x) = 2a$.

Se puede observar en el procedimiento anterior, que para quitar la indeterminación, es muy importante factorizar el numerador. Sin esta factorizacion tendria sierta dificultad obtener la derivada de la función $f(x) = x^2$.

Moraleja

"Derivar equivale a factorizar"

Comentario: Un problema bien difícil en el calculo de la derivada es hallar el limite.

Si cometemos el error voluntario de quitar $\lim\limits_{x \to a}$ en la igualdad $f'(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$ quedaría:

$f'(x) = \frac{x^2-a^2}{x-a}$. Es decir $f(x) - f(a) = (x - a) \cdot f'(a)$ si $x \neq a$.

Lo anterior induce la siguiente definición:

Definición 1. Sea f: $A \to (R, \langle\rangle), A$ conjunto abierto en R, $\langle\rangle$ producto interno en R, $a \in A$.

f es diferenciable en A si existe una función $\phi : R \to R$ tal que:

1)$f(x)-f(a) = (x-a)\cdot\phi(x)$(factorización de $f(x)-f(a)$ (Es posible que esta factorización dependa del producto interno $\langle\rangle$ definido en R).

2)ϕ es continua en a.

La derivada de f en a es $f\acute{}(a) = \phi(a)$.

En esta definición esta implicito el hecho de que la estructura $(R, \langle\rangle)$ es un espacio prehilbert.

Recordemos la definición de Espacio Prehilbert:

Definición 2. Sea P un espacio vectorial complejo y $\langle\rangle : PXP \to C$. La estructura $(P, \langle\rangle)$ es un Espacio prehilbert si se cumple:

1)$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$ ($*$ indica conjugado).

2)$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

3)$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$.

4)$\langle x, x\rangle \geq 0 \forall x \in P(\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

En el problema 1 hemos utilizado el producto usual en los números reales; es decir: $\langle x, y\rangle = xy$, donde $x, y \in R$. La factorización en general es un concepto relativo al espacio. Por ejemplo, en el espacio vectorial de matrices cuadradas $2x2$, una matriz se puede expresar como producto de matrices cuadradas $2x2$, analogamente en otros espacios. Esta idea es la que utilizaremos para introducir la relatividad de la derivada desde el punto de vista de los Espacios Prehilbert.

Ilustremos esto, una vez más, con un ejemplo en R .

Problema 2. Sea $(R, \langle\rangle)$ un Espacio Prehilbert, donde $\langle x, y\rangle = \frac{xy}{2}$(es evidente que $(R, \langle\rangle)$ es un Espacio Prehilbert). Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto $x = a$.

Factorizando $f(x) - f(a)$ tenemos:

$$f(x) - f(a) = x^2 - a^2 = \langle x - a, 2(x + a)\rangle = \langle x - a, \phi(x)\rangle .$$

Donde $\phi(x) = 2(x + a)$ es continua en $x = a$.

Luego $f\prime(a) = \phi(a) = 2(a + a) = 4a$.

Por lo tanto la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = a$ es $f\prime(a) = 4a$.

Observece como la derivada cambio al cambiar el producto interno en R.

En general en R se pueden definir productos internos de la forma: $\langle x, y\rangle = \frac{xy}{t}, t \succ 0$. En este caso la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto $x = a$ es $f\prime(a) = 2ta$.

La definición 1 se puede aplicar a funciones en dos variables asi:

Problema 3. Sea $(R^2, \langle\rangle)$, donde $\langle x, y\rangle = x_1\ y_1 +\ x_2\ y_2,\ x = (x_1,\ x_2\ ),\ y = (y_1,\ y_2\ )$ (Es evidente que $(R^2, \langle\rangle)$ es un Espacio Prehilbert). Calcular la derivada de $f(\ x_1,\ x_2) = x_1 + 2x_2$ en el punto $a = (a_1, a_2)$.

$$
\begin{aligned}
f(\ x_1,\ x_2) - f\ (a_1, a_2) = x_1 + 2x_2 - a_1 - 2a_2 \\
&= (x_1 - a_1) + (2x_2 - 2a_2) \\
&= (x_1 - a_1) + 2(x_2 - a_2) \\
&= \langle (x_1 - a_1, x_2 - a_2), (1, 2)\rangle \text{ (factorización)}
\end{aligned}
$$

Hemos logrado factorizar y esto nos permite definir la función ϕ como:

$$\phi(x_1,\ x_2\ ) = (1, 2).$$

Luego

$$f\prime((a_1, a_2) = \phi(a_1, a_2) = (1, 2).$$

Observación:$f\prime((a_1, a_2) = \nabla f(a_1, a_2)$. El gradiente surgió en forma expontanea al lograr la factorización del escalar $f(\ x_1,\ x_2) - f\ (a_1, a_2)$ con vectores en R^2.

Presentemos ahora el problema anterior con producto interno distinto, asi:

Problema 4. Sea $(R^2, \langle\rangle)$ con $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$ donde $x = (x_1, x_2)$,

$y = (y_1, y_2)$ y

$$
\begin{gathered}
f : (R^2, \langle\rangle) \to (R, \langle\rangle) \\
f(\ x_1,\ x_2) = x_1 + 2x_2
\end{gathered}
$$

En R tomamos el producto usual(Aunque se pudo haber tomado otro producto interno). Verificar si f es diferenciable en el punto (a_1, a_2) y determine cual es la derivada relativa al producto definido en R^2.

El lector puede verificar que $(R^2, \langle\rangle)$ es un Espacio Prehilbert.

Aplicando la definición de diferenciabilidad tenemos que:

$f(\ x_1,\ x_2) - f\ (a_1, a_2) = x_1 + 2x_2 - a_1 - 2a_2.$

Para lograr la factorización adecuada, supongamos que:

$$\langle (x_1 - a_1, x_2 - a_2), (A, B)\rangle = x_1 + 2x_2 - a_1 - 2a_2.$$

Determinemos los parametros A, B.

$$\langle (x_1 - a_1, x_2 - a_2), (A, B)\rangle \;=\; 2(x_1 - a_1)A + (x_1 - a_1)B + (x_2 - a_2)A + (x_2 - a_2)B.$$

Luego $2(x_1 - a_1)A + (x_1 - a_1)B + (x_2 - a_2)A + (x_2 - a_2)B = x_1 + 2x_2 - a_1 - 2a_2$.

La igualdad anterior induce el siguiente sistema:

$$2A + B = 1$$
$$A + B = 2,$$

cuyas soluciones son: $A = -1$ y $B = 3$.

Lo anterior indica que:

$$f(\ x_1,\ x_2) - f\ (a_1, a_2) = \langle (x_1 - a_1, x_2 - a_2), (-1, 3)\rangle.$$

Es decir $\phi(x_1, x_2) = (-1, 3) = f\prime(a_1, a_2)$.

Surge un nuevo gradiente $\nabla f(a_1, a_2) = (-1, 3)$ relativo al producto interno definido.

Cambiemos nuevamente de producto interno en el mismo ejercicio.

Problema 5. Sea $(R^2, \langle\rangle)$ con $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \frac{x_1y_2}{2} + \frac{x_2y_1}{2} + \frac{x_2y_2,}{3}$ donde $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ y

$$f : (R^2, \langle\rangle) \rightarrow (R, \langle\rangle)$$
$$f(\ x_1,\ x_2) = x_1 + 2x_2.$$

En R tomamos nuevamente el producto interno usual. Verificar si f es diferenciable en el punto (a_1, a_2) y determine cual es la derivada relativa al producto definido en R^2.

El lector puede verificar que $(R^2, \langle\rangle)$ es un Espacio Prehilbert.

Aplicando la definición de diferenciabilidad tenemos que:

$$f(\ x_1,\ x_2) - f\ (a_1, a_2) = x_1 + 2x_2 - a_1 - 2a_2.$$

Para lograr la factorización adecuada, supongamos que:

$$\langle (x_1 - a_1, x_2 - a_2), (A, B)\rangle = x_1 + 2x_2 - a_1 - 2a_2.$$

Determinemos los parametros A, B.

$\langle (x_1 - a_1, x_2 - a_2), (A, B) \rangle = (x_1 - a_1)A + \frac{(x_1-a_1)}{2}B + \frac{(x_2-a_2)}{2}A + \frac{(x_2-a_2)}{3}B.$

Luego $(x_1 - a_1)A + \frac{(x_1-a_1)}{2}B + \frac{(x_2-a_2)}{2}A + \frac{(x_2-a_2)}{3}B = x_1 + 2x_2 - a_1 - 2a_2.$

La igualdad anterior induce el siguiente sistema:

$$A + \tfrac{B}{2} = 1$$
$$\tfrac{A}{2} + \tfrac{B}{3} = 2,$$

cuyas soluciones son: $A = -8$ y $B = 18$.

Lo anterior indica que:

$$f(\ x_1,\ x_2) - f\ (a_1, a_2) = \langle (x_1 - a_1, x_2 - a_2), (-8, 18) \rangle.$$

Es decir $\phi(x_1, x_2) = (-8, 18) = f\prime(a_1, a_2)$.

Surge un nuevo gradiente $\nabla f(a_1, a_2) = (-8, 18)$ relativo al producto interno definido.

El lector puede notar el cambio de las derivadas en cada caso.¿Existirá una relación entre estas derivadas?.

La función analizada anteriormente es lineal, en realidad el criterio funciona para funciones no lineales, por ejemplo la función:

$$f : (R^2, \langle\rangle) \to R,$$
$$f(x_1 x_2) = x_1^2 + x_2$$

donde el producto interno en R^2es $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, tiene como derivada en el punto $a = (a_1, a_2)$ la siguiente función:

$$\phi(a_1, a_2) = (-1, +2a_{1,}2 - 2a_1).$$

Tomemos ahora el caso de la derivada de una funcion de R^2 en R^3.

Problema 6. Sea

$$f : (R^2\ \langle\rangle) \to (R^3\ \langle\rangle)$$
$$f(x, y) = (x - y, x + y, 2x + y,$$

donde $\langle\rangle$ es el producto usual en R^2 y R^3.

Verifique si f es diferenciable en el punto (a, b).

$f(x, y)-f(a, b) = (x-y, x+y, 2x+y)-(a-b, a+b, 2a+b) = (x-y-a+b, x+y-a-b, 2x+y-2a-b) = ((x, y).(1, -1) + (a, b).(-1, 1), (x, y).(1, 1) + (a, b).(-1, -1), (x, y).(2, 1) + (a, b).(-2, -1))$.

Luego

$f(x, y) - f(a, b) = (\langle(x, y) - (a, b), (1, -1)\rangle, \langle(x, y) - (a, b)), (1, 1)\rangle, \langle(x, y) - (a, b), (2, 1)\rangle)$.

Una forma elegante de representar la expresión anterior es:

$$f(x, y) - f(a, b) = ((x, y) - (a, b)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hemos logrado factorizar mediante el producto matricial y esto nos permite afirmar que:

$$\phi(x, y) = f\prime(x, y) = f\prime(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación. En este ejemplo surgue la matriz jacobiana de la función

$$f(x, y) = (x - y, x + y, 2x + y)$$

de una forma natural.

Este ejemplo indica que se podria generalizar la definición de diferenciabilidad a campos vectoriales.

Problema 7.Sea

$$f : (R^2, \langle\rangle) \to (R^2, \langle\rangle)$$

$$f(m, n) = (m + n, m - n),$$

donde el producto interno es:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \tfrac{x_1y_2}{2} + \tfrac{x_2y_1}{2} + \tfrac{x_2y_2}{3}$$

Aqui $x = (x_1, x_2), y = (y_1,y_2)$.

Calcular la derivada de f en el punto (a, b).

$$\begin{aligned} f(m,n)-f(a,b) &= (m+n,m-n)-(a+b,a-b) \\ &= (m+n-a-b,m-n-a+b) \\ &= (m-a,n-b)\cdot\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Debemos calcular los valores de A, B, C, D.

Tenemos que:

$$\langle (m-a,n-b).(A,C)\rangle = A(m-a)+\tfrac{C(m-a)}{2}+\tfrac{A(n-b)}{2}+\tfrac{C(n-b)}{3} = m+n-a-b.$$

Lo anterior induce el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} &A+\tfrac{C}{2}=1 \\ &\tfrac{A}{2}+\tfrac{C}{3}=1, \end{aligned}$$

cuya solucion es $A=-2$ y $C=6$.

De otro lado,

$$\langle (m-a,n-b).(B,D)\rangle = (m-a)B+\tfrac{(m-a)D}{2}+\tfrac{(n-b)B}{2}+\tfrac{(n-b)D}{3} = m-n-a+b$$

Lo anterior induce el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} &B+\tfrac{D}{2}=1 \\ &\tfrac{B}{2}+\tfrac{D}{3}=-1, \end{aligned}$$

cuya solución es $B=10$ y $D=-18$.

Luego $f(m,n)-f(a,b)=(m-a,n-b)\cdot\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & -18 \end{pmatrix}$.

Esto indica que:

$$\phi(m,n)=f\prime(m,n)=f\prime(a,b)=\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & -18 \end{pmatrix}.$$

De todo lo anterior podemos concluir la siquiente definición.

Definición. Sean $(P_1,\langle\rangle_1)$ y $(P_2,\langle\rangle_2)$, Espacios Prehilbert y la función:

$$f : (P_1, \langle\rangle_1) \to (P_2, \langle\rangle_2).$$

La función f es diferenciable en $a \in P_1$ si:

1) Existe una función $\phi : P_1 \to P_2$, continua en a tal que:

$f(x) - f(a) = (x - a)\blacksquare\phi(x)$.(La operación $\blacksquare$ depende de los productos internos $\langle\rangle_1$),$\langle\rangle_2$).

Bibliografía

[1] ACOSTA, E., DELGADO, C., RODRIGUEZ, C. *La Derivada de Catathéodory, Matemáticas:Enseñanza Universitaria*. Vol. 2, No.2 1992, 31-38

[2] STERLING K. *Introducción a los Espacios de Hilbert*. Editorial Teide Barcelona.