De la tabla de multiplicar a la función σ de Euler

Haydee Jiménez Tafur
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
jimenezhaydee@gmail.com

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
caluque@pedagogica.edu.co

Resumen

Presentamos algunos resultados obtenidos con niños entre 11 y 16 años que asistieron al Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en el I semestre de 2006. La actividad con los niños inicia con la tabla pitagórica de multiplicar, proponiéndoles contar cuáles números aparecen en ella una sola vez, sólo dos veces, tres, etc., de esto obtenemos la función d y con su suma la función σ.

1. La tabla pitagórica

Ubiquemos las tablas de multiplicar correspondientes a cada número natural, en una sola tabla que llamaremos la tabla pitagórica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	...
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	...
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	...
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	...
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	...
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	...
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	...
9	18	27	26	45	54	63	72	81	90	99	108	...
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	...
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	...
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabla 1

2. La función $d(n)$

2.1. ¿Cuáles números tienen k divisores?

En la *tabla 1* contemos ¿Cuáles números están en 1 sola fila? ¿Cuáles números están sólo en 2 filas? ¿Cuáles números están sólo en 3 filas? ¿Cuáles números están sólo en 4 filas?

¿En 5 filas? ¿En 6 filas? ¿En 7 filas? ¿En 8? ¿En 9? ¿En 10? ¿En 20 filas?

Organicemos esta información en otra tabla

Números en sólo	Números que aparecen
1 fila	1
2 filas	2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 ...
3 filas	4 9 25 49 121 169 289 361 529 841 961 1369 1681 1849 2209 ...
4 filas	6 8 10 14 15 21 22 26 27 33 34 35 39 51 55 65 125 343 1331 2197 ...
5 filas	16 81 625 2401 14641 28561 83521 130321 279841 707281 ...
6 filas	12 18 20 28 32 45 50 63 75 98 147 175 243 245 3125 16807 ...
7 filas	64 729 15625 117649 1771561 4826809 24137569 47045881 ...
8 filas	24 30 40 42 54 56 66 70 78 105 110 128 135 165 189 250 375 385 486 686 875 1029 1715 2187 78125 ...
9 filas	36 100 189 196 225 256 441 484 1225 3025 6561 390625 ...
10 filas	48 80 112 162 405 512 567 1250 1875 4802 19683 1953125 ...
11 filas	1024 59049 9765625 282475249 ...

Tabla 2

Sólo el número 1 está en una sola fila de la tabla 1. En sólo dos filas se encuentran

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 ...

que son números primos. Cada uno de ellos p está en la fila 1 y en la fila p, sólo tienen dos divisores.

Luego las preguntas iniciales se pueden interpretar como ¿Cuáles números tienen 1 divisor? ¿Cuáles números tienen 2 divisores? ¿Cuáles números tienen 3 divisores? En general, ¿Cuáles números tienen k divisores?

Veamos ahora la lista de los números que tienen solamente tres divisores

4 9 25 49 121 169 289 361 529 841 961 1369 1681 1849 2209 ...

¿Existe una relación entre los números primos y los números de la fila tres en la tabla 2? ¿Cuál? por ejemplo:

$$\begin{aligned} 4 &= 2 \times 2 = 2^2 \\ 9 &= 3 \times 3 = 3^2 \\ 25 &= 5 \times 5 = 5^2 \\ 49 &= 7 \times 7 = 7^2 \\ 121 &= 11 \times 11 = 11^2 \\ 169 &= 13 \times 13 = 13^2 \end{aligned}$$

Los números de la tercera fila se pueden escribir como p^2, donde p es un número primo.

Pasemos a la lista de los números que tienen solamente cuatro divisores

$$6\ 8\ 10\ 14\ 15\ 21\ 22\ 26\ 27\ 33\ 34\ 35\ 39\ 51\ 55\ 65\ 125\ 343\ 1331\ 2197\ \ldots$$

¿Vemos alguna manera de expresarlos en términos de números primos?

Unos de ellos se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \\ 27 &= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 \\ 125 &= 5 \times 5 \times 5 = 5^3 \\ 343 &= 7 \times 7 \times 7 = 7^3 \\ 1331 &= 11 \times 11 \times 11 = 11^3 \\ 2197 &= 13 \times 13 \times 13 = 13^3 \end{aligned}$$

Eliminemos[1] estos números de la fila cuatro de la tabla 2 y observemos de nuevo en busca de una regularidad, nos quedan

$$6\ 10\ 14\ 15\ 21\ 22\ 26\ 33\ 34\ 35\ 39\ 51\ 55\ 65\ \ldots$$

que los podemos organizar en la forma:

$$\begin{aligned} 2 \times 3 &= 6 \\ 2 \times 5 &= 10 \\ 2 \times 7 &= 14 \\ 2 \times 11 &= 22 \\ 2 \times 13 &= 26 \\ 3 \times 5 &= 15 \\ 3 \times 7 &= 21 \\ 3 \times 11 &= 33 \\ 5 \times 7 &= 35 \end{aligned}$$

[1] También es frecuente en la actividad matemática que una lista no siempre se puede describir de una sola forma, a veces aparecen varios comportamientos y en estos casos es útil separar lo que hemos clasificado y observar los restantes.

y conjeturar que los números que sólo tienen cuatro divisores se pueden escribir como p^3 o qr, donde p, q y r son números primos y $q \neq r$.

¿Cómo se pueden expresar los números de la quinta fila de la tabla 2?

$$16\ 81\ 625\ 2401\ 14641\ 28561\ 83521\ 130321\ 279841\ 707281\ \ldots$$

Aquí aparece algo curioso, todos ellos se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
16 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4\\
81 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4\\
625 &= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4\\
2401 &= 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4\\
14641 &= 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 11^4\\
28561 &= 13 \times 13 \times 13 \times 13 = 13^4\\
83521 &= 17 \times 17 \times 17 \times 17 = 17^4
\end{aligned}$$

En general los números de la fila 5 se pueden escribir como p^4, donde p es un número primo.

Como hubo un cambio en el comportamiento de la fila cuatro a la fila cinco es necesario que estudiemos algunos casos más para poder conjeturar con algo de fundamento.

Veamos qué sucede con la fila 6

$$12\ 18\ 20\ 28\ 32\ 45\ 50\ 63\ 75\ 98\ 147\ 175\ 243\ 245\ 3125\ 16807\ \ldots$$

es natural buscar quintas potencias, como en efecto sucede

$$\begin{aligned}
32 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5\\
243 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5\\
3125 &= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5\\
16807 &= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5
\end{aligned}$$

pero además, si descomponemos los otros números en factores primos obtenemos

$$\begin{aligned}
12 &= 4 \times 3 = 2^2 \times 3\\
20 &= 4 \times 5 = 2^2 \times 5\\
28 &= 4 \times 7 = 2^2 \times 7\\
18 &= 9 \times 2 = 3^2 \times 2
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
45 &= 9 \times 5 = 3^2 \times 5\\
63 &= 9 \times 7 = 3^2 \times 7\\
50 &= 25 \times 2 = 5^2 \times 2\\
75 &= 25 \times 3 = 5^2 \times 3\\
98 &= 49 \times 2 = 7^2 \times 2.
\end{aligned}
$$

Conjeturamos, que los números de la fila 6 se pueden escribir como p^5 o q^2r, donde p, q y r son números primos y $q \neq r$.

¿Y que sucede con los números de la fila 7?

$$64\ 729\ 15625\ 117649\ 1771561\ 4826809\ 24137569\ 47045881\ \ldots$$

De nuevo como en el caso de la fila 5, todos ellos son sextas potencias de los números primos

$$
\begin{aligned}
64 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6\\
729 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6\\
15625 &= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6\\
117649 &= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 5 \times 5 = 7^6
\end{aligned}
$$

Es decir que los números de la fila 7 se pueden escribir como p^6, donde p es un número primo.

La fila 8 resulta un poco más complicada, pues aparecen séptimas potencias como esperábamos

$$
\begin{aligned}
128 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7\\
2187 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7\\
78125 &= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7
\end{aligned}
$$

pero también

$$
\begin{aligned}
24 &= 8 \times 3 = 2^3 \times 3\\
40 &= 8 \times 5 = 2^3 \times 5\\
56 &= 8 \times 7 = 2^3 \times 7\\
54 &= 27 \times 2 = 3^3 \times 2\\
135 &= 27 \times 5 = 3^3 \times 5\\
189 &= 27 \times 7 = 3^3 \times 7\\
250 &= 125 \times 2 = 5^3 \times 2\\
375 &= 125 \times 3 = 5^3 \times 3\\
875 &= 125 \times 7 = 5^3 \times 7\\
686 &= 343 \times 2 = 7^3 \times 2\\
1029 &= 343 \times 3 = 7^3 \times 3\\
1715 &= 343 \times 5 = 73 \times 5
\end{aligned}
$$

y por primera vez aparecen tres factores

$$\begin{aligned}
30 &= 2 \times 3 \times 5\\
42 &= 2 \times 3 \times 7\\
66 &= 2 \times 3 \times 11\\
78 &= 2 \times 3 \times 13\\
105 &= 3 \times 5 \times 7\\
165 &= 3 \times 5 \times 11\\
195 &= 3 \times 5 \times 13\\
70 &= 2 \times 5 \times 7\\
110 &= 2 \times 5 \times 11\\
385 &= 5 \times 7 \times 11
\end{aligned}$$

En resumen podemos suponer que los números de la fila 8 se pueden escribir como p^7 o q^3r o stv donde p, q, r, s, t, v son números primos y $q \neq r$, $s \neq t$, $s \neq v$ y $t \neq v$.

Sin más cuentas conjeturamos que:

Los números de la fila 9 se pueden escribir como p^8 o q^2r^2 donde p, q, r son números primos y $q \neq r$.

Los números de la fila 10 se pueden escribir como p^9 o q^4r donde p, q, r son números primos y $q \neq r$.

Los números de la fila 11 se pueden escribir como p^{10} donde p es un número primo.

2.2. ¿Cuántos divisores tiene un número?

Si queremos realizar el proceso inverso a lo hecho en la sección 2.1., es decir, dado un número cualquiera, ¿cómo podemos ubicarlo en una determinada fila de la tabla 2?

Revisemos primero una tabla con las regularidades encontradas:

Números en sólo	
1 fila	1
2 filas	p
3 filas	p^2
4 filas	p^3 qr
5 filas	p^4
6 filas	p^5 q^2r
7 filas	p^6
8 filas	p^7 q^3r stv
9 filas	p^8 q^2r^2
10 filas	p^9 q^4r
11 filas	p^{10}

Tabla 3

Como en la segunda columna sólo hay productos de potencias de números primos, esto nos sugiere descomponer en factores primos[2] un número dado para determinar cual forma tiene dicha descomposición y ubicarla en la tabla 3.

Por ejemplo,

En la fila 3 de la tabla 2 están los primos al cuadrado, el número 10609, cuya descomposición en factores primos es 103×103, debe estar en la fila 3.

El número 4913 debe estar en la fila 4 pues su descomposición en factores primos es $4913 = 17^3$.

El número 112 está en la fila 10 pues $112 = 24 \times 7$, lo que significa que el número 112 tiene 10 divisores.

Para averiguar en cual fila está el número 8281, lo descomponemos en factores primos

$$\begin{array}{r|l} 8281 & 7 \\ 1183 & 7 \\ 169 & 13 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

como $8281 = 72 \times 132$ es de la forma p^2q^2 con p y q primos y $p \neq q$, por lo tanto es de la fila 9 lo que indica que tiene 9 divisores.

Nuestro problema aparentemente ya está resuelto, pero si tenemos un número cuya descomposición factorial no está incluida en las 11 filas que tenemos ¿cómo hacemos para saber a qué fila pertenece?

Empecemos por mirar qué tienen en común las formas generales de cada fila: en cada fila hay una expresión que es la potencia de un primo: en la fila 2 aparecen los números primos, en la fila 3 los cuadrados de los primos p^2, en la cuarta los cubos de los primos p^3, y así sucesivamente,

[2]LEVEQUE, W. (1968). *Teoría Elemental de los Números*. Editorial Herrero Hermanos, sucesores, S.A. p. 31.

Números en sólo	
1 fila	1
2 filas	p
3 filas	p^2
4 filas	p^3
5 filas	p^4
6 filas	p^5
7 filas	p^6
8 filas	p^7
9 filas	p^8
10 filas	p^9
11 filas	p^{10}

Tabla 4

Esto ya nos dice algo, en la fila k aparece la forma p^{k-1}. Pero hay algo más, algunas filas sólo tienen elementos de esa forma, esto sucede en las filas 2, 3, 5, 7, 11, . . ., o sea en las filas correspondientes a los números primos.

Apliquemos de nuevo la idea de eliminar lo hecho para fijar nuestra atención en los casos restantes

Números en sólo	
4 filas	p^3 pq
6 filas	p^5 p^2q
8 filas	p^7 $p3q$ pqr
9 filas	p^8 p^2q^2
10 filas	p^9 p^4q

Debemos encontrar una relación entre el número aparece en la primera columna y los exponentes de los factores primos que están en la segunda columna y parece ser que algo tiene que ver con los factores del primero:

Factorizaciones de N	N	Forma de los números con N divisores
$2 \times 2 = 4 \times 1 =$	4 filas	$\rightarrow p^3$ pq
$3 \times 2 = 6 \times 1 =$	6 filas	$\rightarrow p^5$ p^2q
$2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2 = 8 \times 1 =$	8 filas	$\rightarrow p^7$ p^3q pqr
$9 \times 1 = 3 \times 3 =$	9 filas	$\rightarrow p^8$ p^2q^2
$5 \times 2 = 10 \times 1 =$	10 filas	$\rightarrow p^9$ p^4q

Comparemos el número N de cada fila, expresado como producto de dos o más números con los exponentes de las formas generales de cada fila.

En la fila 8, tenemos 8×1 y p^7, 4×2 y p^3q, $2 \times 2 \times 2$ y pqr, esto nos indica que por cada factorización de N, tendremos una forma general de los números con N divisores; además el número de elementos de cada factorización nos indica el número de primos que intervienen en cada forma general, y cada elemento de la factorización reducido en 1, corresponde con los exponentes de los números primos que intervienen.

De acuerdo con lo anterior, ¿cómo podemos encontrar la forma general de un número que tenga 12 divisores? Hallemos todas las factorizaciones de 12,

$$12 = 12 \times 1 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 2$$

Entonces las formas generales de la fila 12 son: p^11, q^5r, t^3s^2, u^2vw con $q \neq r$, $t \neq s$, $u \neq v$, $u \neq w$, $v \neq w$.

Los números que tienen 20 divisores tendrán como descomposición en factores primos alguna de las siguientes formas:

$$p^19 \; q^9r \; t^4s^3 \; u^4vw \text{ con } q \neq r, \; t \neq s, \; u \neq v, \; u \neq w, \; v \neq w.$$

Retomando nuestro cuestionamiento inicial, el de averiguar cuántos divisores tiene un número cualquiera, por ejemplo 423, lo descomponemos en factores primos para determinar la forma que tiene dicha factorización: como $432 = 2^4 \times 3^3$ es de la forma p^4q^3 con p y q primos y $p \neq q$.

Entonces, según el resultado anterior en el que partimos de una fila k para llegar a la forma general de los números con k divisores, invertimos el proceso para que a partir de la forma que tiene la descomposición de un número x podamos llegar al número de divisores que tiene x, por tanto a cada exponente le sumamos 1 y luego multiplicamos estos resultados; para el caso de 432 tenemos que

$$(4 + 1) \times (3 + 1) = 20$$

y en consecuencia el número 432 tiene 20 divisores, es decir, estaría ubicado en la fila 20 de la tabla 2.

En general, para hallar el número de divisores de un número x, lo descomponemos en factores primos, a cada uno de los exponentes los aumentamos en uno y luego realizamos el producto.

Si a la expresión *número de divisores* de x la notamos $d(x)$ para un número x cualquiera, entonces

$d(1) = (0+1) = 1$		
$d(p) = (1+1) = 2$		
$d(p^2) = (2+1) = 3$		
$d(p^3) = (3+1) = 4$	$d(pq) = (1+1)(1+1) = 4$	
$d(p^4) = (4+1) = 5$		
$d(p^5) = (5+1) = 6$	$d(p^2q) = (2+1)(1+1) = 6$	
$d(p^6) = (6+1) = 7$		
$d(p^7) = (7+1) = 8$	$d(p^3q) = (3+1)(1+1) = 8$	$d(pqr) = (1+1)$ $(1+1)(1+1) = 8$
$d(p^8) = (8+1) = 9$	$d(p^2q^2) = (2+1)(2+1) = 9$	
$d(p^9) = (9+1) = 10$	$d(p^4q) = (4+1)(1+1) = 10$	

Notemos que

$$\begin{aligned} d(p^3q) &= (3+1)(1+1) = d(p^3)d(q) \\ d(p^2q^2) &= (2+1)(2+1) = d(p^2)d(q2) \\ d(p^4q) &= (4+1)(1+1) = d(p^4)d(q) \\ d(pqr) &= (1+1)(1+1)(1+1) = d(p)d(q)d(r) \end{aligned}$$

De lo expuesto podemos conjeturar que si p y q son números primos entonces,

$$d(p^kq^n) = d(p^k)d(q^n)$$

y de manera general suponemos[3] que

$$d(p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\cdots p_n^{a_n}) = d(p_1^{a_1})d(p_2^{a_2})d(p_3^{a_3})\cdots d(p_n^{a_n}).$$

Y como todo número x se puede escribir de manera única como producto de factores primos, para hallar el número de divisores de un número x cualquiera, de manera que

$$x = p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\cdots p_n^{a_n}$$

tenemos que

$$d(p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\cdots p_n^{a_n}) = d(p_1^{a_1})d(p_2^{a_2})d(p_3^{a_3})\cdots d(p_n^{a_n}).$$

esto es,

$$d(p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\cdots p_n^{a_n}) = (a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\ldots(a_n+1).$$

En otra notación tenemos que

$$d(x) = \prod_{j=1}^{n}(1+a_j).$$

[3] JIMÉNEZ, R., GORDILLO, E., RUBIANO, G. (2004). *Teoría de números para principiantes*. Segunda Edición. Bogotá, D.C.: Facultad de Ciencias, Universidad Nacional. p.p. 72 - 73.

3. La función σ de Euler

Ya tenemos cuántos divisores tiene un número dado, y la forma de escribirse como producto de potencias de números primos, ahora encontremos cuáles son los divisores de un número dado. Empecemos mirando en la tabla 2 los números que se encuentran en las filas correspondientes a números primos, pues éstos tienen una sola forma general.

Los divisores de p son: 1 y p, pues

$$p = 1 \times p.$$

Los divisores de p^2 son: 1, p, p^2, pues

$$p^2 = 1 \times p^2 \qquad \text{y} \qquad p^2 = p \times p$$

Los divisores de p^3 son: 1, p, p^2, p^3 y de manera general los divisores de p^k son: 1, p, p^2, p^3, p^4, ..., p^k.

Miremos otros casos:

Los divisores de pq son: 1, p, q, pq.
Los divisores de p^2q son: $1,\ p,\ q,\ p^2,\ pq\ , p^2q$.
Los divisores de p^3q son: $1,\ p,\ q,\ p^2,\ p^3,\ pq,\ p^2q,\ p^3q$.

Y en general los divisores de p^kq son: $1,\ q,\ p,\ p^2,\ p^3,\ \dots,\ p^k,\ pq,\ p^2q,\ \dots,\ p^kq$.

Los divisores de p^2q^2 son: $1, p, p^2, q, q^2, pq, pq^2, p^2q, p^2q^2$.
Los divisores de p^3q^2 son: $1, p, p^2, p^3, q, q^2, pq, p^2q, p^3q, pq^2, p^2q^2, p^3q^2$.
Los divisores de p^4q^2 son: $1, p, p^2, p^3, p^4, q, q^2, pq, p^2q, p^3q, p^4q, pq^2, p^2q^2, p^3q^2, p^4q^2$.

Generalizando, los divisores de p^kq^2 son: $1, p, p2, p^3, \dots, p^k, q, q^2, pq, p^2q, \dots, p^kq, pq^2, p^2q^2, p^3q^2, \dots, p^kq^2$.

De manera similar podemos hallar los divisores de pkqn, y otros productos, pero de momento nos interesaremos en las sumas de los divisores de un número dado.

Empecemos por los números que se encuentran en las filas correspondientes a números primos:

Suma de divisores de p: $1 + p$
Suma de divisores de p^2: $1 + p + p^2$
Suma de divisores de p^3: $1 + p + p^2 + p^3$
Suma de divisores de p^k: $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + \cdots + p^k$

A la expresión *número* de divisores de x la notamos $\sigma(x)$ para un número x cualquiera.

Hasta ahora tenemos sumas indicadas, pero ¿podemos hallar una fórmula que nos permita calcular la suma sin tener que hacerla efectivamente?. Consideremos inicialmente la suma:

$$\sigma(p^k) = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + \cdots + p^k$$

Notemos que si la multiplicamos por p, obtenemos

$$p\sigma(p^k) = p + p^2 + p^3 + p^4 + \cdots + p^k + p^{k+1}$$

que es muy similar a la anterior, lo que nos sugiere restar de esta última la expresión inicial, obteniendo:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} & p\sigma(pk) & = & p & + & p^2 & + & p^3 & + & p^4 & + & \ldots & + & p^k & + & p^{k+1} \\ - & \sigma(pk) & = & 1 & + & p & + & p^2 & + & p^3 & + & \ldots & + & p^{k-1} & + & p^k \end{array}$$

$$p\sigma(p^k) - \sigma(p^k) = p^{k+1} - 1$$

o sea,

$$\sigma(p^k)(p - l) = p^{k+1} - 1$$

entonces,

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - l}.$$

Veamos ahora qué sucede con la suma de los factores de un producto de dos números primos, es decir con $\sigma(pq)$ sabiendo que los divisores de pq son 1, p, q, pq, por tanto,

$$\sigma(pq) = 1 + p + q + pq$$

que puede escribirse como

$$\sigma(pq) = (1 + p) + q(1 + p)$$
$$\sigma(pq) = (1 + p)(1 + q)$$

y como en el caso de la función d,

$$\sigma(pq) = \sigma(p)\sigma(q).$$

Estudiemos el caso de $\sigma(p^2q)$, teniendo en cuenta que los divisores de p^2q son 1, p, q, p^2, pq, p^2q, luego:

$$\begin{aligned} \sigma(p^2q) &= 1 + p + p^2 + q + pq + p^2q \\ &= (1 + p + p^2) + q(1 + p + p^2) \\ &= (1 + p + p^2)(1 + q) \end{aligned}$$

Observemos que al igual que en el caso anterior,

$$\sigma(p^2q) = s(p^2)s(q).$$

De lo expuesto podemos conjeturar[4] que si p y q son números primos entonces,

$$s(p^kq^n) = s(p^k)s(q^n).$$

[4]JIMÉNEZ, R., GORDILLO, E., RUBIANO, G. (2004). *Teoría de números para principiantes.* Segunda Edición. Bogotá, D.C.: Facultad de Ciencias, Universidad Nacional. p.p. 72 - 73.

Y por lo tanto para hallar la suma de los divisores de un número x cualquiera, basta descomponerlo en factores primos

$$x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_n^{a_n}$$

y calcular

$$\sigma(p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_n^{a_n}) = \sigma(p_1^{a_1})\sigma(p_2^{a_2})\sigma(p_3^{a_3}) \cdots \sigma(p_n^{a_n})$$

así, el problema de hallar la suma de divisores de un número x se reduce a encontrar $\sigma(p^k)$, pero esto ya está resuelto, entonces

$$\sigma(p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_n^{a_n}) = \left(\frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1}\right)\left(\frac{p_3^{a_3+1} - 1}{p_3 - 1}\right) \cdots \left(\frac{p_n^{a_n+1} - 1}{p_n - 1}\right)$$

en otra notación tenemos que

$$\sigma(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Por ejemplo, la suma de los divisores de 9600 es:

$$\sigma(9600) = s(27 \cdot 3 \cdot 52) = \sigma(27) \cdot \sigma(3) \cdot \sigma(52) = 255 \cdot 4 \cdot 31 = 31620.$$

4. Los números perfectos

Un caso de particular interés, vinculado con la función σ, es el de encontrar números perfectos, aquellos que son iguales a la suma de sus divisores propios (excepto él mismo); estos números han sido estudiados desde la antigüedad, por ejemplo Euclides en la proposición 36 del Libro IX, dice:

> "si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su suma total resulte un número primo y si la suma multiplicada por el último produce algún número, el producto será un número perfecto"

Cuando dice: a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada lo que significa es

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}.$$

Supone que esta suma es un número primo, la multiplica por 2^{k-1} y obtiene un número perfecto. Observemos que $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}$ es una progresión geométrica finita cuya suma es:

$$\frac{2^k - 1}{2 - 1} = 2^k - 1$$

Así, la proposición de Euclides establece:

$$\text{Si } 2^k - 1 \text{ es primo y si } N = 2^{k-1}(2^k - 1), \text{ entonces } N \text{ es perfecto.}$$

Su demostración inicia suponiendo que $p = 2^k - 1$ es un número primo, entonces los divisores propios de

$$N = 2^{k-1}(2^k - 1) = 2^k - 1p$$

tienen como factores solamente potencias de 2 y p, y por lo tanto la suma de todos ellos es

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + p + 2p + \cdots + 2^{k-2}p &= (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}) + p(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-2}) \\
&= (2^k - 1) + p(2^{k-1} - 1) \\
&= p + p2^{k-1} - p \\
&= p2^{k-1} \\
&= N
\end{aligned}$$

así concluye que N es perfecto.

Por ejemplo, si $k = 2$, entonces $2^2 - 1 = 3$ es primo y por lo tanto $N = 2 \cdot (2^2 - 1) = 6$ es un número perfecto.

Si $k = 3$ entonces $2^3 - 1 = 7$ es primo y $N = 2^2 \cdot (2^3 - 1) = 28$ es un número perfecto.

Si $k = 13$, como $2^{13} - 1 = 8191$ es primo, entonces $N = 2^{12} \cdot (2^{13} - 1) = 33550336$ es perfecto.

Con esto Euclides cambió el problema de encontrar números perfectos por el de encontrar números primos de la forma $p = 2^k - 1$. Estos números se llaman *números primos de Mersenne*, en honor a Marin Mersenne (1588-1648), su divulgador en el siglo XVII. Euler probó 20 siglos después, que todo número perfecto par es de la forma establecida por Euclides.

En términos de la función $\sigma(n)$ podemos caracterizar a los números perfectos como aquellos para los cuales se cumple que

$$k = \sigma(k) - k, \text{ es decir, } \sigma(k) = 2k.$$

Una potencia de 2 nunca es un número perfecto, porque en este caso

$$\sigma(N) = \sigma(2^r) = \frac{2^{r+1} - 1}{2 - 1} = 2(2^r) - 1 = 2N - 1$$

y como $\sigma(N) \neq 2N$, éste no es perfecto.

Bibliografía

[1] BAKER, A. *Breve introducción a la teoría de números*. Madrid: Alianza Universidad. 1986.

[2] BEILER, A. *Recreations in the theory of numbers*. New York: Dover. 1966.

[3] JIMÉNEZ, R., GORDILLO, E., RUBIANO, G. *Teoría de números para principiantes*. Segunda Edición. Bogotá, D.C.: Facultad de Ciencias, Universidad Nacional. 2004.

[4] JONES, B. *Teoría de los números*. México: Trillas. 1969.

[5] LEVEQUE, W. *Teoría Elemental de los Números*. Editorial Herrero Hermanos, sucesores, S.A. 1968.

[6] OGILVY, C., ANDERSON J. *Excursions in number theory*. New York: Dover. 1988.