

EFFECTOS DE UNA METODOLOGÍA INTEGRAL EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EN ALUMNOS DE PRIMER SEMESTRE DE INGENIERÍAS

Carlos Rojas Álvarez
Profesor Universidad del Norte
Barranquilla, Colombia
crojas@uninorte.edu.co

Resumen

El presente estudio tuvo como objetivo determinar el efecto de una metodología, que se denominó integral, sobre el aprendizaje de la geometría en dos grupos de alumnos de primer semestre de ingenierías de la Universidad del Norte. Dicha metodología consistió en: los sistemas de representación de Bruner, como estrategia en el aprendizaje de conceptos y teoremas; los mentefactos, como instrumento en el aprendizaje conceptual; la argumentación deductiva en la respuesta a preguntas, y un heurístico, como estrategia didáctica en la solución de problemas.

El estudio fue cuantitativo-cualitativo, con diseño pre-experimental, realizado a 72 alumnos, distribuidos en dos grupos de 36 cada uno durante el primer semestre del 2005. Se aplicó un pre-test, o sea, una prueba antes de la aplicación de la metodología propuesta, y un pos-test, para comparar los puntajes. Se tomó como modelo de decisión estadística la prueba no paramétrica de las medianas con un nivel de significancia $\alpha = 0,01$, arrojando como resultado que la metodología sí fue efectiva en la solución de problemas y en la diagramación de enunciados en ambos grupos. También se encontró que a los alumnos les cuesta más argumentar deductivamente con reglas de inferencia que hacer una demostración deductiva.

Para el análisis cualitativo se aplicó una encuesta con escala Likert y una entrevista, cuyos resultados muestran una valoración positiva hacia la metodología empleada y como aspecto más relevante de la misma, según los alumnos, el diagrama conceptual o mentefacto.

1. Justificación

En los últimos años se ha notado una creciente dificultad para que los alumnos de ingeniería asimilen con propiedad los contenidos y procesos de las asignaturas relacionadas con las matemáticas, como álgebra, cálculo y geometría. En esta última es notorio el bajo nivel que presentan los alumnos en el proceso de diagramación de un problema, la formulación de definiciones y la construcción de demostraciones geométricas.

Esta situación es producto, entre otros factores, de la deficiente preparación con que llegan los bachilleres a la universidad y del bajo nivel de pensamiento formal de los

mismos. Esto último quedó evidenciado en los estudios realizados por el profesor Fernando Iriarte (profesor del dpto. de psicología de la Universidad del Norte) y colaboradores: El primer estudio se efectuó en 1986, con una muestra de estudiantes de diferentes grados de escolaridad y colegios de Barranquilla, con edades entre los 12 y 19 años. Encontraron que los jóvenes de la muestra no manejaban las operaciones formales, sino las estructuras cognoscitivas propias de las operaciones concretas (IRIARTE ET AL, 1986, 199 - 200). Posteriormente efectuaron dos estudios en 1989: uno con una muestra de estudiantes de los grados 10o y 11o de colegios de Montería, con edades entre los 15 y 19 años; y el otro con una muestra de estudiantes de los grados 10o y 11o de colegios de Riohacha, con edades entre los 15 y 20 años. Los estudios arrojaron resultados similares al de Barranquilla: las características de pensamiento formal propuestas por Piaget no están en los jóvenes de la muestra (IRIARTE ET AL, 1989, 33) y en los de Riohacha tampoco (IRIARTE ET AL, 1990, 278). El último estudio lo efectuaron con estudiantes universitarios de V a X semestre, cuyas edades oscilaban entre los 20 y los 25 años. El estudio estableció que las características de pensamiento de estos jóvenes universitarios no corresponden a las características de pensamiento formal descritas por Piaget (IRIARTE ET AL, 1991, 192).

Por otro lado, el estudio de la geometría se ha abandonado en la mayoría de los colegios, tal como lo señala el MEN:

El estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la “matemática moderna”. Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría. (MEN, 1998, 37)

Por todo lo anterior, es necesario proponer una metodología que no tenga disonancia entre el lenguaje del profesor y el lenguaje del alumno, pero que intente desarrollar en el alumno la capacidad de argumentar y articular los distintos sistemas de representación de los problemas.

2. Marco teórico

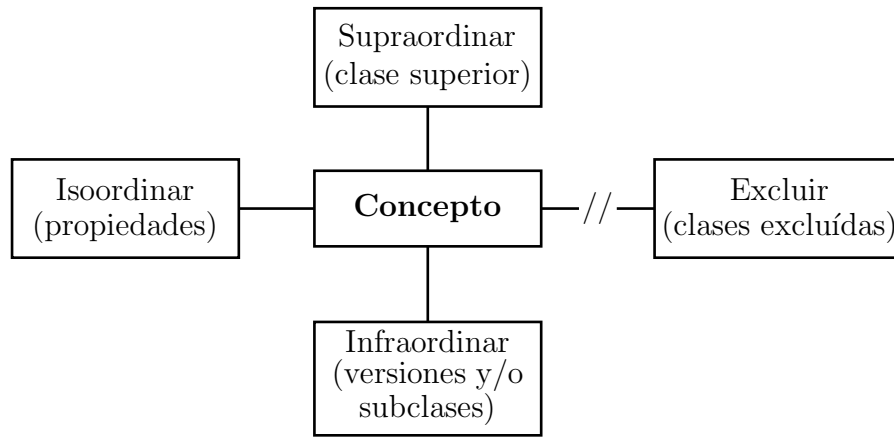
2.1. Los mentefactos

Según De Zubiría M., los mentefactos son formas gráficas, muy esquematizadas, elaboradas a fin de representar la estructura interna de los conceptos (1998, 227). Estos mentefactos tienen su base en lo que la psicología cognitiva denomina: categorías básicas, supraordinadas y subordinadas.

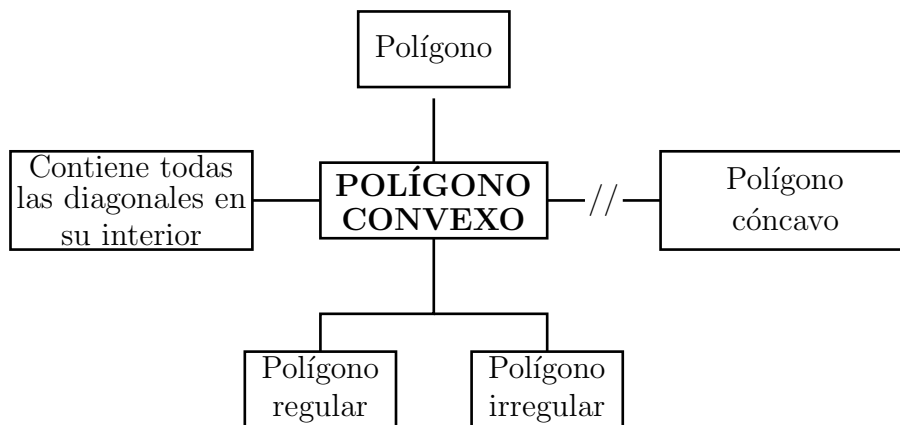
Las categorías tienen diferentes grados de abstracción e inclusividad, y se relacionan entre sí constituyendo sistemas jerárquicos que se denominan *taxonomías* (DE VEGA M., 1984, 327).

Los mentefactos son herramientas para organizar el conocimiento, cuya construcción exige

el uso de las siguientes operaciones conceptuales: supraordinar, infraordinar isoordinar y excluir, que son organizadas en el siguiente esquema, propio del mentefacto:



Como ejemplo de un mentefacto, ilustramos el del polígono convexo:



2.2. Los sistemas de representación de Bruner

Los sistemas de representación son los componentes del modo de presentación, uno de los tres elementos de la estructura de cualquier área, según Jerome Bruner. El modo de presentación es el método por el cual se comunica la información.

Los sistemas de representación de Bruner son tres: enactiva, icónica y simbólica.

La representación inactiva es la que utilizan los niños muy pequeños, puesto que solamente pueden comprender las cosas en términos de acciones. Por ejemplo, un niño puede explicar sus conocimientos acerca de los principios del equilibrio haciendo referencia a sus experiencias en un columpio (SPRINTHALL N., SPRINTHALL R. y OJA S., 1996, 191). Comprender algo es manipularlo, sentirlo, expresarlo, dividirlo y demás. Este tipo de representación se da hasta los últimos meses del primer año de vida.

La representación icónica. Surge cuando finalmente el niño es capaz de representarse el mundo por sus imágenes o esquemas espaciales, que son relativamente independiente de la acción. Hacia el final del primer año el niño está bien preparado para este logro (BRUNER, 1980, 42). Por ejemplo, los niños puede dibujar una cuchara sin representarse la acción de comer.

La representación simbólica supone la posibilidad de traducir la experiencia en términos lingüísticos. En este caso, el mecanismo del columpio se explicará mediante la utilización de palabras. Este tipo de representación capacita a los alumnos para pensar en términos lógicos y abstractos (SPRINTHALL N., SPRINTHALL R. y OJA S., 192). El ejemplo típico de representación simbólica es el lenguaje, con sus reglas no sólo para formar oraciones sobre la vida cotidiana, sino también, gracias a sus poderosas técnicas combinatorias, ara formar otras de igual de buenas sobre lo que excede lo real y lo tangible (BRUNER, 1987, 21). Otro sistema notable es la notación matemática. Ambos (lenguaje y notación matemática) permiten entender los conceptos abstractos y modificar la información simbólica en instrucciones o indicaciones verbales.

El adulto, por el hecho de ser adulto, no deja emplear los primeros sistemas de representación. Por ejemplo, en el aprendizaje de habilidades motoras, como aprender a esquiar, la mejor manera es utilizar la representación enactiva.

2.3. Heurísticos

En términos generales, un heurístico es un procedimiento eficaz para resolver problemas. Algunas definiciones de heurístico son las siguientes:

Un heurístico es una estrategia eficaz y generalizable a variedad de problemas. (YUSTE, 1997, 45)

POLYA plantea que la heurística moderna trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular, *las operaciones mentales típicamente útiles* en este proceso. (1992, 102)

Una estrategia heurística es una técnica destinada a comprender mejor un problema – y si eres afortunado- resolverlo. (SCHOENFELD, 1985, 108)

La resolución de problemas se refiere a los procesos de conducta y pensamiento dirigidos hacia la ejecución de determinadas tareas intelectualmente exigentes. CARRETERO M. y GARCÍA J. afirman que la mayor parte de los psicólogos consideran que un problema existe cuando hay algún obstáculo entre una situación dada y una situación meta. La existencia de ese obstáculo obliga al sujeto a considerar los posibles caminos que le pueden conducir a la situación meta (1984, 185). Es allí en donde juega un papel importante el heurístico.

Las fases del heurístico empleado son:

1. Diagramación

En esta fase se construye un dibujo o diagrama de la situación problema que rela-

ciona todas las informaciones, todas las proposiciones del enunciado. Los diagramas a veces ayudan a ver cosas. (SCHOENFELD, 108).

2. Análisis y realización

Esta fase hace referencia a la utilización estratégica de hechos, técnicas y destrezas dentro de un contexto matemático (POZO, 1994, 65) para resolver el problema.

3. Comprobación

Aquí debe verificarse si la solución obtenida es pertinente al problema y si satisface las condiciones del mismo. Cuando el problema involucra dimensión (especialmente área y volumen) debe efectuarse un análisis de dimensión.

Los mejores resultados pueden perderse si el alumno no reexamina, no reconsidera la solución obtenida. (POLYA, 28).

2.4. La argumentación deductiva

La argumentación, en términos generales, es según CALDERÓN Y LEÓN:

Argumentar es hacer uso del lenguaje verbal para formar un discurso que dé cuenta de nuestras convicciones acerca de un asunto. Este discurso tiene como función fundamental convencer o persuadir, en forma razonada, a otro (s) de las creencias personales; exige, entonces, realizar, a partir de la premisa que se tiene por cierta, construcciones que expliquen, justifiquen, relaciones y concluyan convincentemente la tesis (s) supuesta (s) (1996, 12-13).

La argumentación deductiva, que se empleó en la metodología, utiliza el argumento deductivo. En él, la verdad de las premisas utilizadas por el hablante garantizan la verdad de sus conclusiones,

Si **A** es verdad entonces **B** es verdad
(donde **A** es razón y **B** conclusión)

La utilización de este tipo de argumento se hace más compleja de acuerdo con la ubicación y la modalidad usada para establecer el enunciado (CORREA J, DIMATÉ C Y MARTÍNEZ N., 1999, 62). Así, se identifican:

- Modus Ponendo Ponens (afirmar afirmando) o ley de afirmación de la hipótesis:

$$\frac{p \rightarrow q}{p} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad q$$

Por ejemplo:

Si Juan obtiene la máxima calificación en el examen final, entonces pasará el curso.

$$p \rightarrow q$$

Juan obtiene la máxima calificación en el examen final.

p

Por lo tanto, Juan pasa el curso.

q

- Modus Tollendo Tollens (negar - negando) o negación del consecuente:

$$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Por ejemplo:

Si la zorra veloz salta sobre el perro lento, entonces se tropieza.

$p \rightarrow q$

La zorra veloz no se tropieza.

$\neg q$

Por lo tanto, la zorra veloz no salta sobre el perro lento.

$\hline \neg p$

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

Determinar el efecto de la metodología integral en la resolución de problemas geométricos.

3.2. Objetivos específicos

- Utilizar los sistemas de representación de Bruner en la aplicación de algunas propiedades geométricas.
- Promover los mentefactos como estrategia para el aprendizaje de conceptos geométricos.
- Resolver problemas aplicando un heurístico.
- Argumentar la solución de problemas por medio de algunas de las reglas de inferencia.
- Determinar la valoración de los alumnos acerca de la metodología empleada en el desarrollo del curso de geometría.
- Analizar la evolución de los alumnos al final del curso con respecto al proceso de resolución de problemas.

4. Método

4.1. Tipo de investigación

El tipo de investigación seleccionado para la presente investigación es el cuantitativo, complementado con una encuesta con escala Likert para determinar la valoración de los alumnos con respecto a la metodología empleada.

4.2. Diseño

Se utilizó un diseño pre-experimental de pre-prueba - post-prueba con un solo grupo (ver cuadro 1) para realizar un análisis estadístico-descriptivo de los puntajes obtenidos en dichas pruebas, que determinan el nivel de razonamiento geométrico de las alumnas.

Cuadro 1. Diseño pre-prueba - post-prueba con un solo grupo

G	O ₁	X	O ₂
---	----------------	---	----------------

Este diseño consiste en que a un grupo (G) se le aplica una prueba previa (O₁) al estímulo o tratamiento experimental; después se le administra el tratamiento (X) y finalmente se le aplica una prueba posterior (O₂) al tratamiento.

4.3. Sujetos

Los sujetos que participaron en esta investigación fueron 72 alumnos de primer semestre de ingenierías de la Universidad del Norte distribuidos en dos grupos de 36 alumnos cada uno, con edades entre 15 y 19 años de ambos sexos. Se tomó una muestra en cada grupo: una de 26 y la otra de 30, por muestreo no probabilístico intencional, teniendo en cuenta las variables de la presentación de los tests correspondientes y de no estar repitiendo la asignatura.

4.4. Instrumentos

Para desarrollar la metodología se emplearon los siguientes recursos:

- Un cuestionario de tres problemas: uno de geometría, uno de trigonometría y uno de álgebra, para determinar en qué nivel de resolución de problemas se encontraban los alumnos antes de aplicar la metodología. Este cuestionario fue el pre-test. (ver anexo No. 1)
- Una guía de un heurístico para resolver problemas. (ver anexo No. 2)
- Un cuestionario, equivalente al pre-test, para determinar el efecto de la metodología empleada, que hace el papel de post-test. (ver anexo No. 3)
- Una encuesta con escala Likert para medir la actitud hacia el heurístico empleado. (ver anexo No. 4)

- Cuestionario con problemas sin diagrama y problemas para argumentar.

4.5. Procedimiento

El procedimiento fue igual para ambos grupos.

El primer día de clases se les aplicó el pre-test a los alumnos.

Para el aprendizaje de algunos conceptos se utilizó el mentefacto, como por ejemplo, la definición de trapecio, rectángulo, cuadrado, rombo, entre otros.

El proceso de argumentación se aplicó antes y después de la realización de demostraciones.

Dicho proceso se aplicó en aquellos teoremas en los cuales su recíproco era también un teorema: teorema de Pitágoras, teorema del triángulo isósceles, entre otros.

El heurístico se aplicó en muchos problemas. Para su completa aplicación, se formularon problemas sin diagrama para que el alumno los construyera.

Los sistemas de representación de Bruner se emplearon en algunos postulados y teoremas tales como: postulado LAL, postulado LLL, teorema de la hipotenusa y el cateto, teorema fundamental de la proporcionalidad, entre otros.

La metodología fue aplicada durante aproximadamente 30 horas de clases, de 50 minutos de duración cada una. Después de realizar el tercer parcial de geometría, les aplicamos el post-test.

5. Resultados

La evolución del razonamiento geométrico fue analizada teniendo en cuenta el diseño pre-experimental de pre-prueba – post-prueba con un solo grupo para realizar un análisis estadístico-descriptivo de los puntajes obtenidos en dichas pruebas.

Tanto el pre- test como el post-test se calificaron como lo muestra el cuadro 2:

Cuadro 2. Discriminación y calificación del pre-test y del post-test

Ítem	Área	Tema	Calificación
1	Geometría	Área de un cuadrado	1 si diagrama, 2 si realiza, 3 si comprueba
2	Trigonometría	Solución de triángulo rectángulo	1 si diagrama, 2 si realiza, 3 si comprueba
3	Álgebra	Ecuación reducible a lineal	1 si diagrama, 2 si realiza, 3 si comprueba

Del cuadro 2 se deduce que el puntaje mínimo es cero (0), en el caso de todo lo realizado no esté correcto, y el máximo es nueve (9), si realiza los tres problemas con cada una de las fases del heurístico.

Los puntajes obtenidos en los tests aplicados a los dos grupos se muestran en el cuadro 3. Como son dos grupos, se les identificará como grupo 1 y grupo 2.

Análisis de resultados del grupo 1

Hipótesis alternativa: *Mediana post-test* > *mediana pre-test*

Debido a que los puntajes obtenidos en el pre-test y en el post-test no tienen la misma distribución, se procedió a aplicar la prueba no paramétrica de las medianas (Mann Whitney) para determinar si existe diferencia significativa entre las medianas de dichos puntajes. La prueba arroja un p valor de 0,00190495. Dado que el p valor es menor que 0,01, se concluye que la mediana del post-test es significativamente mayor que la mediana del pre-test con un nivel de confianza del 99%.

Análisis de resultados del grupo 2

Hipótesis alternativa: *Mediana post-test* > *mediana pre-test*

Debido a que los puntajes obtenidos en el pre-test y en el post-test no tienen la misma distribución, se procedió a aplicar la prueba no paramétrica de las medianas (Mann Whitney) para determinar si existe diferencia significativa entre las medianas de dichos puntajes. La prueba arroja un p valor de 0,0000873942. Dado que el p valor es menor que 0,01, se concluye que la mediana del post-test es significativamente mayor que la mediana del pre-test con un nivel de confianza del 99%.

El cuadro 4 muestra los resultados en el grupo 1 respecto a la diagramación y la comprobación, tanto en el pre-test como en el post-test.

0 indica que no aplicó la fase correspondiente y 1 que sí la aplicó.

Hipótesis alternativa para la diagramación: *Mediana post-test* > *mediana pre-test*

Debido a que los puntajes obtenidos en el pre-test y en el post-test (en el aspecto de diagramación) no tienen la misma distribución, se procedió a aplicar la prueba no paramétrica de las medianas (Mann Whitney) para determinar si existe diferencia significativa entre las medianas de dichos puntajes. La prueba arroja un p valor de 0,00800866. Dado que el p valor es menor que 0,01, se concluye que la mediana de la diagramación del post-test es significativamente mayor que la mediana de la diagramación del pre-test con un nivel de confianza del 99%.

Hipótesis alternativa para la comprobación: *Mediana post-test* > *mediana pre-test*

Debido a que los puntajes obtenidos en el pre-test y en el post-test (en el aspecto de diagramación) no tienen la misma distribución, se procedió a aplicar la prueba no paramétrica de las medianas (Mann Whitney) para determinar si existe diferencia significativa entre las medianas de dichos puntajes. La prueba arroja un p valor de 0,000243844. Dado que el p valor es menor que 0,01, se concluye que la mediana de la comprobación del post-test es significativamente mayor que la mediana de la comprobación del pre-test con un nivel de confianza del 99%.

El cuadro 5 muestra los resultados en el grupo 2 respecto a la diagramación y la comprobación, tanto en el pre-test como en el post-test.

0 indica que no aplicó la fase correspondiente y 1 que sí la aplicó.

Cuadro 3. Puntajes del pre-test y post-test en los dos grupos

Grupo 1				Grupo 2		
Sujeto	Pre-test	Post-test	Diferencia post - pre	Pre-test	Post-test	Diferencia post-pre
1	2	5	3	0	1	1
2	2	3	1	0	3	3
3	0	6	6	3	6	3
4	5	7	2	2	1	-1
5	4	8	4	3	5	2
6	5	7	2	0	6	6
7	2	3	1	1	1	0
8	4	3	-1	2	4	2
9	4	2	-2	4	6	2
10	1	5	4	0	2	2
11	0	3	3	0	5	5
12	3	5	2	1	4	3
13	5	7	2	0	1	1
14	1	3	2	2	1	-1
15	1	2	1	5	4	-1
16	0	2	2	0	3	3
17	4	5	1	4	7	3
18	0	0	0	0	0	0
19	0	2	2	3	4	1
20	6	8	2	2	6	4
21	0	2	2	1	2	1
22	4	5	1	2	5	3
23	2	6	4	2	1	-1
24	2	8	4	2	4	2
25	4	2	-2	0	5	5
26	4	7	3	2	5	3
27				2	7	5
28				2	5	3
29				4	6	2
30				3	4	1
\bar{x}	2,5	4,46		1,73	3,8	
Median	2.0	5.0		2.0	4.0	

Hipótesis alternativa para la diagramación: $Mediana\ post-test > mediana\ pre-test$

Debido a que los puntajes obtenidos en el pre-test y en el post-test (en el aspecto de diagramación) no tienen la misma distribución, se procedió a aplicar la prueba no paramétrica de las medianas (Mann Whitney) para determinar si existe diferencia significativa entre las medianas de dichos puntajes. La prueba arroja un p valor de 0,000120269. Dado que el p valor es menor que 0,01, se concluye que la mediana de la diagramación del post-test

es significativamente mayor que la mediana de la diagramación del pre-test con un nivel de confianza del 99%. Con respecto a la comprobación en el grupo 2, no se puede obtener inferencia estadística.

Cuadro 4. Resultados de la diagramación y comprobación en el grupo 1

Suj.	Diagramación				Comprobación				Pre-test				Post-test			
	P1	P2	P3	Total	P1	P2	P3	Total	P1	P2	P3	Total	P1	P2	P3	Total
1	1	1	0	2	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	0	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	1	1	0	2	1	1	1	3	1	0	0	1	1	0	0	1
5	1	1	0	2	1	1	1	3	0	0	0	0	1	0	1	2
6	1	1	1	3	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	1	1
7	0	1	0	1	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	1	1	2	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	0	2	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	1	0	1	1	1	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1
11	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
12	0	1	1	2	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
13	1	1	1	3	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	1	1
14	0	1	0	1	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	1	0	2	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	1	1
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	1	1	3	1	1	1	3	0	0	0	0	1	0	1	2
21	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
22	1	1	0	2	1	1	0	2	0	0	0	0	1	0	0	1
23	0	1	0	1	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	1	0	1	1	1	1	3	0	0	0	0	1	0	1	2
25	1	1	0	2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
26	1	1	0	2	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	1	1
\bar{x}				1,38				2,07				0,038				0,576
Med				1.5				2				0				0

En cuanto a la argumentación y la demostración, se les colocó a ambos grupos en el segundo parcial un ítem de argumentación y uno de demostración deuctiva. En el grupo 1 se escogió la muestra de los 26 y en el grupo 2 la muestra de los 30 alumnos. El cuadro 6 muestra los resultados obtenidos en cuanto al porcentaje de aprobación de dichos ítems:

Cuadro 5. Resultados de la diagramación y la comprobación en el grupo 2

Suj.	Diagramación				Comprobación				Diagramación				Comprobación			
	Pre-test	Post-test			Pre-test	Post-test			Pre-test	Post-test			Pre-test	Post-test		
	P1	P2	P3	Total	P1	P2	P3	Total	P1	P2	P3	Total	P1	P2	P3	Total
1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	2	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	0	2	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	1	0	1	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	0	2	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	1	1
12	0	1	0	1	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
15	1	1	1	3	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
17	1	1	0	2	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	1	1
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	1	1	0	2	1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	0	0	1	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
22	1	1	0	2	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	1	0	1	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	1	1
26	1	0	0	1	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
27	1	0	0	1	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	1	1
28	0	1	0	1	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	1	1
29	1	1	0	2	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0
30	1	1	0	2	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
\bar{x}				1,033				2				0				0,2
Med				1				2								

Cuadro 6. Resultados de la argumentación y la demostración

Ítem	Grupo 1		Grupo 2	
	Sí	No	Sí	No
Argumentación	18/69, 23 %	8/30, 76 %	14/46, 66 %	16/53, 33 %
Demostración	19/73, 07	7/26, 92 %	20/66, 66 %	10/33, 33 %
Argumentación y Demostración	15/57, 69 %	4/15, 38 %	9/30 %	5/16, 66 %

Se observa en ambos grupos que el porcentaje de desaprobación es mayor en la argumentación con reglas de inferencia que en la demostración deductiva.

Además se aplicó una encuesta con escala Likert para determinar la valoración de la metodología por parte de los alumnos. En el grupo 1 presentaron la encuesta 30 alumnos, cuyos resultados se muestran en el cuadro 7:

Cuadro 7. Resultados de la encuesta con escala Likert del grupo 1

Ítem	De acuerdo	En desacuerdo
1. La metodología ayuda a comprender mejor los conceptos, los postulados, los teoremas y los problemas.	30 100 %	0
2. La metodología desarrolla la capacidad de análisis.	30 100 %	0
3. La metodología favorece la reflexión sobre los conceptos, los teoremas y la solución obtenida en los problemas.	25 83,3 %	0
4. La metodología se debe aplicar en las asignaturas relativas a matemáticas y física.	22 73,3 %	1 3,3 %
5. La metodología es una estrategia útil en la solución de los problemas de la vida cotidiana.	21 70 %	0
6. La metodología es una estrategia motivante en las clases.	20 66,6 %	1 3,3 %
7. La metodología permite visualizar la lógica de la solución de un problema.	26 86,6 %	0
8. La metodología es una estrategia que ayuda a obtener la respuesta correcta de un problema.	26 86,6 %	0

Los resultados de la encuesta muestran una valoración positiva hacia la metodología, ya que un ítem de los ocho registró el mínimo de 66,6% de aceptación. En el grupo 2 presentaron la encuesta 30 alumnos, cuyos resultados se muestran en el cuadro 8:

Cuadro 8. Resultados de la encuesta con escala Likert del grupo 2

Ítem	De acuerdo	En desacuerdo
1. La metodología ayuda a comprender mejor los conceptos, los postulados, los teoremas y los problemas.	30 100 %	0
2. La metodología desarrolla la capacidad de análisis.	27 90 %	0
3. La metodología favorece la reflexión sobre los conceptos, los teoremas y la solución obtenida en los problemas.	25 83,3 %	0
4. La metodología se debe aplicar en las asignaturas relativas a matemáticas y física.	19 63,3 %	2 6,6 %
5. La metodología es una estrategia útil en la solución de los problemas de la vida cotidiana.	13 43,3 %	2 6,6 %
6. La metodología es una estrategia motivante en las clases.	23 76,6 %	0
7. La metodología permite visualizar la lógica de la solución de un problema.	27 90 %	0
8. La metodología es una estrategia que ayuda a obtener la respuesta correcta de un problema.	27 90 %	0

Los resultados de la encuesta muestran una valoración positiva hacia la metodología, ya que un ítem de los ocho registró el mínimo de 43,3% de aceptación, los demás obtuvieron un porcentaje $\geq 63,3\%$ de aceptación.

A la pregunta: *Clasifique, según su criterio, los elementos de la metodología empleada en orden de importancia, de mayor a menor*, (respondida por 29 alumnos en el grupo 1 y 26 en el grupo 2) el cuadro 9 muestra la preferencia de los alumnos sobre el aspecto que ellos consideraron como el más importante de la metodología:

Cuadro 9. Preferencia de los alumnos sobre un aspecto de la metodología

Aspecto de la metodología	No. de alumnos grupo 1	No. de alumnos grupo 2
Diagrama conceptual (mentefacto)	17 / 58,6 %	9 / 34,6 %
Procedimiento (heurístico)	7 / 24,1 %	6 / 23,07 %
Construcción de figuras (Bruner)	3 / 10,3 %	9 / 34,6 %
Argumentación	2 / 6,8 %	3 / 11,5 %

Se observa en el cuadro 9 la preferencia del diagrama conceptual en ambos grupos, aunque en el grupo 2 hubo doble empate entre el diagrama conceptual y la construcción de figuras para teoremas (sistemas de representación de Bruner); mientras que la argumentación con reglas de inferencia fue el de menos aceptación como el aspecto más importante de la metodología.

6. Conclusiones

La realización de este estudio ha aportado conocimientos y experiencias relevantes que permiten elaborar las siguientes conclusiones:

- Del análisis estadístico-descriptivo del pre-test se observa que la media en los grupos 1 y 2 fue de 2,24 y 1,73, respectivamente, sobre 9, lo que indica que los alumnos carecen de un buen conjunto de heurísticos.
- El análisis estadístico-inferencial apoya la hipótesis de trabajo, por lo tanto, la metodología aumento significativamente el nivel de solución de problemas en ambos grupos.
- El análisis estadístico inferencial indica que los alumnos mejoraron significativamente en la diagramación de enunciados en ambos grupos y en la comprobación en el grupo 1.
- En ambos grupos, a los alumnos les costó más argumentar con las reglas de inferencia que hacer una demostración deductiva.
- Los resultados de la encuesta con escala Likert indican una valoración positiva hacia la metodología por parte de los alumnos. Los ocho ítems evaluados indicaron una favorabilidad $\geq 66,6\%$.
- En ambos grupos el aspecto más valorado fue el diagrama conceptual; mientras que el menos valorado fue la argumentación con las reglas de inferencia.
- El estudio contribuyó a la calidad de educación superior, teniendo esta última entre sus objetivos la formación del hombre en el campo cognoscitivo para el dominio de la ciencia y la producción de tecnología (CASTRO DE BERNAL Y OTROS, 1994, 215), y la vinculación entre la Educación Superior y el entorno social: se debe alcanzar mayor coherencia con los problemas de la sociedad y de su desarrollo social, cultural, político y económico (SERNA Y TRÉLLEZ, 1985, 14).

Bibliografía

- [1] BRUNER, J. *Investigaciones sobre el desarrollo cognitivo*. Madrid: Pablo del Río, 1980.
- [2] _____ . La importancia de la educación. Barcelona: Paidós, 1987. (Educador; N°. 77).
- [3] CALDERÓN, D., LEÓN, O. *La argumentación en matemáticas en el aula: una oportunidad para la diversidad*. Bogotá: Universidad Externado de Colombia, 1996.

- [4] CASTRO DE BERNAL, L. et al. *La calidad de la educación: la nueva legislación y sus perspectivas*. Santa Fe de Bogotá: AJIE, FES, 1994.
- [5] CARRETERO, M., GARCÍA, J., *Solución de problemas: Introducción*. p. 185-195. En: ———. *Lecturas de psicología del pensamiento: Razonamiento, solución de problemas y desarrollo cognitivo*. Madrid : Alianza, 1993. 452 p. (Alianza psicología; N° 1).
- [6] CORREA, J., DIMATÉ, C., MARTÍNEZ, N. *Saber y saberlo demostrar: Hacia una didáctica de la argumentación*. Bogotá: Universidad Externado de Colombia, 1999.
- [7] DE VEGA, M. *Introducción a la psicología cognitiva*. Madrid: Alianza, 1984. Colección Alianza psicología.
- [8] DE ZUBIRÍA SAMPER, M. *Mentefactos I*. Bogotá: Fundación Alberto Merani, 1998.
- [9] IRIARTE, F. et al. *Desarrollo del pensamiento formal en una muestra de adolescentes escolares de la ciudad de Barranquilla*. Barranquilla, 1986. 258p. Tesis de grado (psicólogo) Universidad del Norte. Programa de Psicología.
- [10] ———. *Características del pensamiento del adolescente escolarizado de la ciudad de Montería*. p. 33-46. En: Universidad del Norte. Anuario científico, 1989. Medellín : Edinalco, 1989. 284 p.
- [11] ———. *Características del pensamiento en adolescentes escolarizados de la ciudad de Riohacha*. Barranquilla, 1990. 343 p. Tesis de grado (Psicólogo). Universidad del Norte. Programa de Psicología.
- [12] ———. *Características del pensamiento en estudiantes universitarios*. Barranquilla, 1991. 217 p. Tesis de grado (Psicólogo). Universidad del Norte. Programa de Psicología.
- [13] SERNA, H., TRÉLLEZ, S. *La calidad de la educación superior*. Bogotá: ICFES, 1985.
- [14] SPRINTHALL, N., SPRINTHALL, R., OJA, S. *Psicología de la educación*. 6a ed. Madrid: Mc Graw Hill, 1996.

Anexo No. 1

Pre-test

Resuelva los siguientes problemas:

1. El lado de un cuadrado mide x cm. Si cada lado del cuadrado aumenta un 40%, ¿cuál es el área del nuevo cuadrado en términos de x ?

2. Un alambre de 4 metros de longitud se fija en el suelo desde el tope de un poste vertical de 3 metros de longitud. Halle la medida del ángulo entre el alambre y el poste.
3. Un árbol de 9 metros de altura es quebrado por el viento, formando un triángulo rectángulo. Si la punta de la parte quebrada está a 3 metros de la base, calcule la altura del tronco que ha quedado en pie.

Fórmulas:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cat op}}{\text{hip}}, \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{\text{cat ady}}{\text{hip}}, \quad \operatorname{tan} \theta = \frac{\text{cat op}}{\text{cat ady}}, \quad (\text{hip})^2 = (\text{cat})^2 + (\text{cat})^2,$$

$$\text{Área triángulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}, \quad \text{Área cuadrado} = (\text{lado})^2, \quad \text{Área rectángulo} = \text{base} \times \text{altura}$$

Anexo No. 2
Heurístico empleado

Procedimiento para resolver problemas

1. Análisis y diagramación

- a) Haga una lista de los datos del problema.
- b) Separe las condiciones de la incógnita.
- c) Traduzca en una figura o esquema gráfico el problema, si es posible. Introduzca una notación apropiada.
- d) Marque los datos conocidos y la incógnita en la figura.

2. Realización

- a) Tome cada uno de los datos conocidos y compárelos con definiciones, postulados y teoremas para obtener inferencias. Si no logra obtener inferencias, combine los datos conocidos y vuelva a realizar la comparación. En último caso, haga una *construcción auxiliar*.
- b) De ser posible, marque las inferencias en la figura.
- c) ¿Qué información válida proporciona la figura? Recuerde que no debe hacer suposiciones.
- d) Escriba en orden y en secuencia lógica el procedimiento efectuado.

3. Comprobación

- a) Revise el procedimiento efectuado y asegúrese de colocar las unidades dimensionales de la solución, si existen. ¿Utilizó todos los datos proporcionados por el problema?

- b) Determine si la solución obtenida es pertinente al contexto del problema.
- c) Reemplace la solución obtenida en las condiciones del problema para verificar si estas se satisfacen. Si la solución no satisface las condiciones del problema, vuelva a comenzar la resolución del problema.
- d) Trate de obtener, si es posible, la solución por otro camino o procedimiento.

Anexo No. 3 Post-test

Recuerda: 1. Diagramación.

- 2. Análisis y realización
- 3. Comprobación

- 1. El lado de un cuadrado mide x cm. Si cada lado del cuadrado aumenta un 60%, ¿cuál es el área del nuevo cuadrado en términos de x ?
- 2. La cuerda de una cometa mide 200 metros y su extremo está fijado en el suelo. Si la cometa está volando a una altura de 190 metros, calcule la medida del ángulo formado por la cuerda y el suelo.
- 3. Un alambre de 18 cm se dobla para formar un triángulo rectángulo. Si un cateto mide 3 cm, calcule la medida del otro cateto y de la hipotenusa.

Fórmulas:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cat } op}{\text{hip}}, \quad \text{cos } \theta = \frac{\text{cat } ady}{\text{hip}}, \quad \text{tan } \theta = \frac{\text{cat } op}{\text{cat } ady}, \quad (\text{hip})^2 = (\text{cat})^2 + (\text{cat})^2,$$

$$\text{Área triángulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}, \quad \text{Área cuadrado} = (\text{lado})^2, \quad \text{Área rectángulo} = \text{base} \times \text{altura}$$

Anexo No. 4 Encuesta con escala Likert

Las siguientes afirmaciones, **1 a la 8**, se refieren a la **metodología empleada (argumentación con reglas de inferencia, construcción de figuras para teoremas, diagramas conceptuales y procedimiento para resolver problemas)** en el estudio de la asignatura. Marque con una **X** en el paréntesis correspondiente si está de acuerdo, o ni en acuerdo ni en desacuerdo o si está en desacuerdo con la afirmación planteada.

- 1. La metodología ayuda a comprender mejor los conceptos, los postulados, los teoremas y los problemas.
De acuerdo () Ni en acuerdo ni en desacuerdo () En desacuerdo ()

2. La metodología desarrolla la capacidad de análisis.
De acuerdo () Ni en acuerdo ni en desacuerdo () En desacuerdo ()
3. La metodología favorece la reflexión sobre los conceptos, los teoremas y la solución obtenida en los problemas.
De acuerdo () Ni en acuerdo ni en desacuerdo () En desacuerdo ()
4. La metodología se debe aplicar en las asignaturas relativas a matemáticas y física.
De acuerdo () Ni en acuerdo ni en desacuerdo () En desacuerdo ()
5. La metodología es una estrategia útil en la solución de los problemas de la vida cotidiana.
De acuerdo () Ni en acuerdo ni en desacuerdo () En desacuerdo ()
6. La metodología es una estrategia motivante en las clases.
De acuerdo () Ni en acuerdo ni en desacuerdo () En desacuerdo ()
7. La metodología permite visualizar la lógica de la solución de un problema.
De acuerdo () Ni en acuerdo ni en desacuerdo () En desacuerdo ()
8. La metodología es una estrategia que ayuda a obtener la respuesta correcta de un problema.
De acuerdo () Ni en acuerdo ni en desacuerdo () En desacuerdo ()

9. Clasifique, según su criterio, los elementos de la metodología empleada en orden de importancia, de mayor a menor: