Del número 1 al teorema de nicómaco

Haydee Jiménez Tafur
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
jimenezhaydee@gmail.com

Rafael Angarita Cervantes
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
angaritacervantes@gmail.com

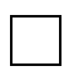
Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
caluque@uni.pedagogica.edu.co

Resumen

Presentamos algunos resultados obtenidos con niños entre 11 y 16 años que asistieron al Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en el I semestre de 2006. La actividad con los niños inicia con un cuadrado unidad como figura básica que ensamblamos para construir otras figuras con reglas de construcción establecidas que conducen a relaciones numéricas entre números poligonales, para terminar en el teorema de Nicómaco.

1. Figuras básicas

La actividad que desarrollaremos está basada inicialmente en nuestras intuiciones geométricas para ensamblar de manera adecuada una figura básica que llamaremos cuadrado unidad y que en este trabajo es:



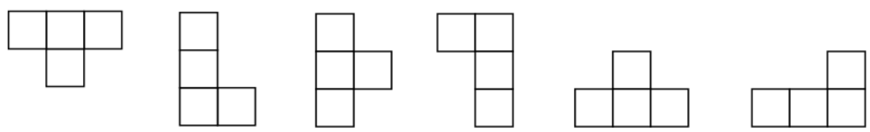
Con estos cuadrados o alfas podemos construir figuras planas[1], pero no de cualquier manera, tenemos que acordar una forma de colocar los cuadrados. A continuación presentamos unas figuras bien construidas:

[1] Grupo MUSA. E1. *Cuatro Propuestas Didácticas en matemáticas*. Universidad Sergio Arboleda, Colciencias. Bogotá, 2005. pp. 37-39.

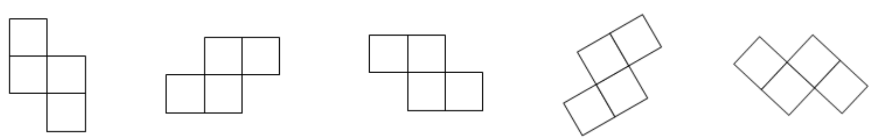
Aquí hay otras figuras, pero mal construidas:

Según lo anterior, para construir bien una figura plana, colocamos los cuadrados unos al lado de otros, de manera que uno de los lados de un cuadrado coincida con uno de los lados del otro cuadrado, sin que los cuadrados se superpongan.

Ejemplos de figuras planas bien construidas son:



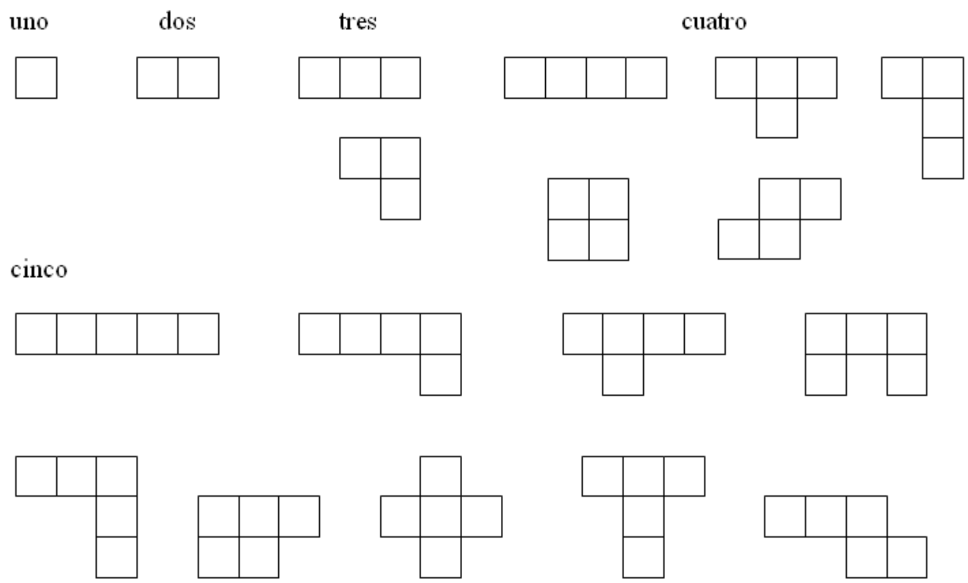
Para trabajar con figuras, debemos definir una relación de igualdad entre ellas; por ejemplo las siguientes figuras son iguales:



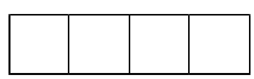
Pero estas otras son diferentes:

De acuerdo con los ejemplos anteriores, dos figuras planas son iguales si tienen la misma forma y el mismo número de cuadrados unidad, independientemente del lugar y la dirección en la que se encuentre, es decir, salvo traslaciones, rotaciones y reflexiones.

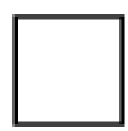
Enseguida usaremos nuestros cuadrados unidad para escribir los números naturales:



Como vemos no hay una única manera de hacerlo salvo los dos primeros casos, por ejemplo 5 tiene 12 representaciones gráficas, por tanto llamaremos *esentaciones equivalentes*de un mismo número a las figuras que tengan la misma cantidad de cuadrados unidad. Así:



y



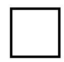
representan el mismo número, es decir, son figuras equivalentes; pero como figuras son diferentes.

Teniendo en cuenta la manera como podemos escribir los números, vemos que se resultan figuras con la misma forma pero que representan números diferentes, esto nos permite clasificarlos en algunas familias, tales como la de los rectángulos (que incluyen los cuadrados), las T, las escuadras, escaleras, entre otras. Aquí vamos a estudiar la familia de las escuadras.

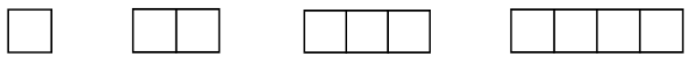
2. Familia de escuadras

Partiendo del número 1 como cuadrado unidad construyamos escuadras, agregando un determinado número de cuadrados unidad al cuadrado inicial, teniendo en cuenta la regla para construir bien una figura.

Ubiquemos en una tabla algunas clases de escuadradas que obtenemos al aplicar el patrón mencionado de manera sucesiva, es decir, en la primera fila, ubicamos las escuadras que obtenemos de agregar 0 cuadrados unidad al cuadrado inicial, luego a la figura que resulta también le agregamos 0 cuadrados unidad y así sucesivamente, por tanto en cada columna de la fila 1 vamos a obtener:



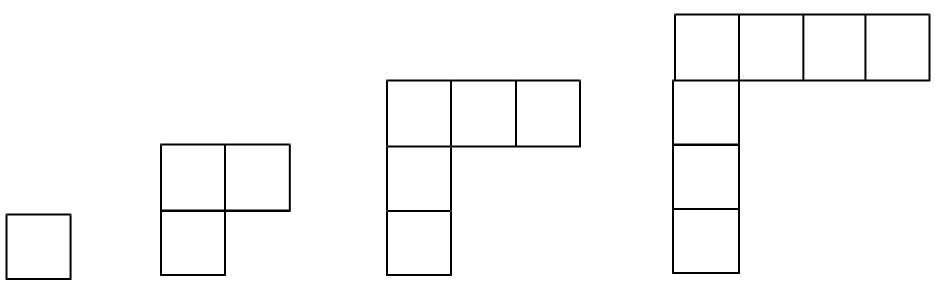
En la segunda fila ubiquemos escuadras que obtenemos al agregar un cuadrado unidad, esto es agregamos un cuadrado al que teníamos, algunas de éstas son:



1 2 3 4

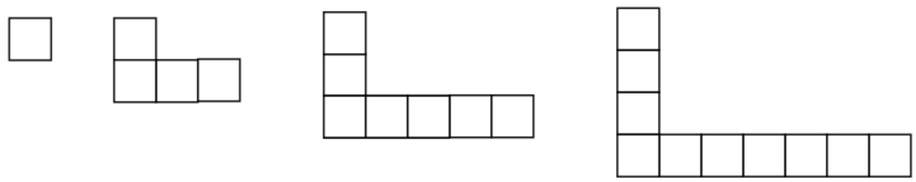
Como hay varias maneras de agregar un cuadrado en cada paso, optaremos por agregarlo siguiendo el mismo criterio en todos los pasos, condición que mantendremos en lo que sigue.

En la tercera fila ubicamos las escuadras que resultan de agregar dos cuadrados unidad, pero esto también se puede hacer de varias formas, una es agregar los dos cuadrados del mismo lado del cuadrado inicial, pero esto nos remite al caso anterior, por tal razón elegimos la otra opción, en la que en cada paso conseguimos una escuadra simétrica. Así obtenemos:



1 3 5 7

En la cuarta fila ubicamos las escuadras que obtenemos luego de agregar tres cuadrados al cuadrado inicial siguiendo el patrón sugerido, pero aquí las escuadras que resultan no son simétricas, luego esta condición no es fundamental, sólo mantenemos formas escuadras no en línea, siguiendo el mismo criterio de construcción en cada paso; por tanto agregamos un cuadrado en un lado del cuadrado inicial y dos en otro lado adyacente, obteniendo:



1 4 7 10 ...

Y así para conseguir la fila k, agregamos $k-1$ cuadrados al cuadrado inicial de manera que se forme una escuadra y no una línea, repartiendo $k-1$ de acuerdo a sus particiones[2], es decir, en dos sumandos, como esto se puede hacer de varias maneras, mantenemos una y con ella realizamos todo el trabajo.

En términos numéricos los resultados anteriores los podemos resumir en la siguiente tabla:

1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	7	...
1	3	5	7	9	11	13	...
1	4	7	10	13	16	19	...
1	5	9	13	17	21	25	...
1	6	11	16	21	26	31	...
1	7	13	19	25	31	37	...
1	8	15	22	29	36	43	...
1	9	17	25	33	41	49	...
1	10	19	28	37	46	55	...
1	11	21	31	41	51	61	...
1	12	23	34	45	56	67	...
1	13	25	37	49	61	73	...
...	...	...	...	...	...	...	...
1	$1+(k-1)$	$1+2(k-1)$	$1+3(k-1)$	$1+4(k-1)$	$1+5(k-1)$	$1+6(k-1)$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

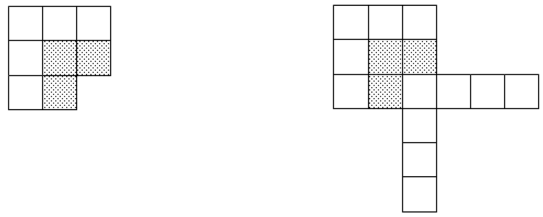
Tabla 1

3. Suma de escuadras

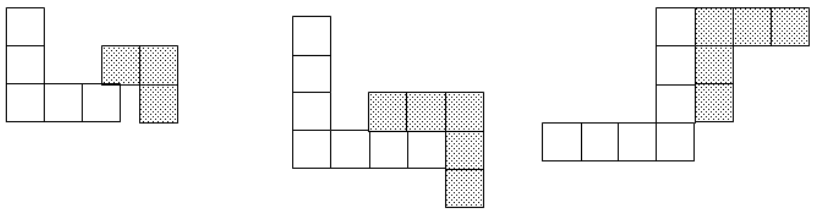
El siguiente paso es ensamblar escuadras de la misma fila de la tabla 1, de manera adecuada para encontrar regularidades numéricas. De nuevo hay muchos grados de libertad; podemos exigir que para ensamblar dos escuadras, una de ellas comparta completamente dos lados[3] con la otra sin que ellos se superpongan, como se ilustra en las siguientes figuras:

[2]Llamamos partición de un número a las distintas maneras de escribirlo como una suma, por ejemplo 5 se puede escribir como 0 + 5, 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1, 5 + 0.

[3]Nos referimos a los lados de la escuadra como figura geométrica.

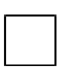


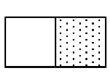
Esta definición excluye casos como:

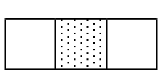


El caso del cuadrado unidad debe tratarse de manera especial, puesto que en muchos casos puede compartir un solo lado con las escuadras con las que es sumado, por ejemplo admitiremos como figuras bien ensambladas:

Si queremos encontrar regularidades numéricas, es conveniente que al ensamblar las escuadras resulten figuras cuyo cálculo de áreas nos sea familiar como triángulos, cuadrados o rectángulos. Por ejemplo los números de la fila 1 los podemos ensamblar de manera que resulten rectángulos:

 1

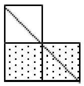
 $1 + 1 = 2$

 $1 + 1 + 1 = 3$

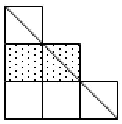
Donde la suma de los n primeros números de la fila 1 es n.

Para sumar los números de la fila 2, podemos ensamblarlos en forma de triángulo, como se muestra a continuación, utilizar la fórmula para hallar el área de un triángulo y encontrar la suma:

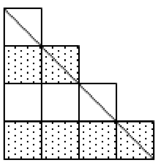
1



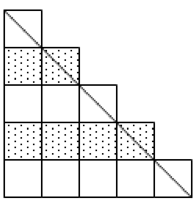
$$1 + 2 = 3 = \frac{2^2}{2} + \frac{2}{2}$$



$$1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3^2}{2} + \frac{3}{2}$$



$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4^2}{2} + \frac{4}{2}$$



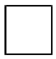
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5^2}{2} + \frac{5}{2}$$

En los casos anteriores, el primer sumando del lado derecho de la igualdad corresponde al área del triangulo demarcado y el segundo sumando a las mitades de cuadrados unidad que quedan sobre la hipotenusa. Conjeturamos que la suma de los primeros n números naturales está dada por:

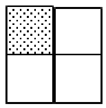
$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Los números 1, 3, 6, 10, 15, ... que obtenemos al sumar los n primeros números naturales, son los *números triangulares* que también notaremos como T_n y que corresponde con el n-ésimo número triangular.

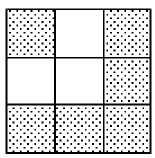
Para sumar los números de la fila 3, los ensamblamos en forma de cuadrado y utilizamos la fórmula para hallar el área de un cuadrado para encontrar la suma, con lo que obtenemos:



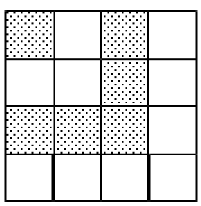
1



$1+3=4=2^2$



$1+3+5=9=3^2$

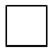


$1+3+5+7=16=4^2$

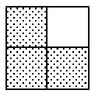
El primer término es 1, el segundo es 4, el tercero 9, y así sucesivamente obtenemos los cuadrados de los números naturales. Es decir, la suma de los primeros n números impares es un *número cuadrado*, n^2, escrito de otra forma:

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

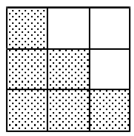
También los gráficos anteriores se dejan leer de otra forma, de manera que utilicemos los resultados obtenidos en la suma de los números de la fila 2.



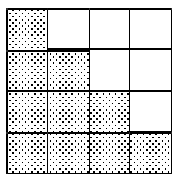
1



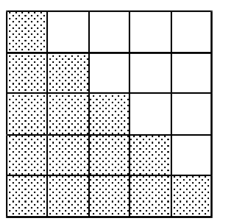
$2^2 = T_2 + T_1$



$3^2 = T_3 + T_2$



$4^2 = T_4 + T_3$



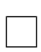
$5^2 = T_5 + T_4$

Esta nueva interpretación nos sugiere conjeturar que un número cuadrado es igual a la suma de dos números triangulares consecutivos, esto es:

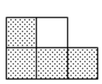
$$C_n = T_n + T_{n-1}$$

donde $C_n = n^2$. Esta relación es conocida como teorema de Teón de Esmirna, quién realizó una descripción bastante desarrollada de los números poligonales.

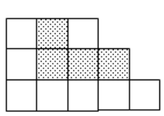
Para sumar los números de la fila 4, los ensamblamos de la siguiente forma:



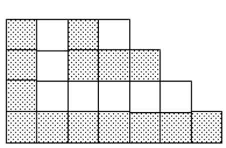
1



$1 + 4 = 5$



$1 + 4 + 7 = 12$

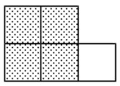


$1 + 4 + 7 + 10 = 22$

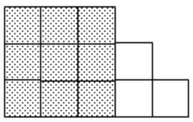
Estos números corresponden con los números pentagonales. Notaremos como P_n al n-ésimo número pentagonal.

Siguiendo con la idea de interpretar los gráficos en términos de cuadrados y triángulos, obtenemos:

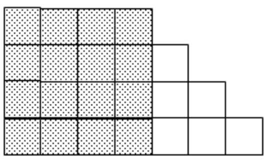
1



$5 = 4 + 1 = C_2 + T_1$



$12 = 9 + 3 = C_3 + T_2$



$22 = 16 + 6 = C_4 + T_3$

Las gráficas anteriores sugieren que:

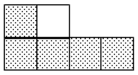
$$P_n = C_n + T_{n-1}$$

por tanto la expresión que determina el n-ésimo número pentagonal es:

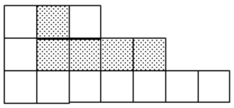
$$\begin{aligned} P_n &= n^2 + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{2n^2 + n^2 - n}{2} \\ &= \frac{n(3n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Al considerar la fila 5, podemos usar dos particiones distintas de 4 para construir las escuadras y ensamblarlas. Inicialmente añadimos 1 cuadrado unidad a un lado del cuadrado inicial y 3 en un lado adyacente, aplicando el mismo mecanismo para las demás escuadras; de acuerdo con esto la suma resulta:

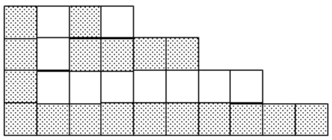
1



$1 + 5 = 6$



$1 + 5 + 9 = 15$

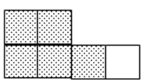


$1 + 5 + 9 + 13 = 28$

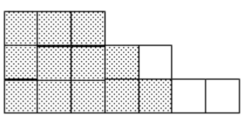
Estos números corresponden con los números hexagonales. Notaremos como H_n al n-ésimo número hexagonal.

Interpretando los gráficos como pentagonales y triangulares, tenemos que:

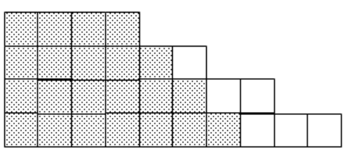
1



$6 = 5 + 1 = P_2 + T_1$



$15 = 12 + 3 = P_3 + T_2$



$28 = 22 + 6 = P_4 + T_3$

Las gráficas anteriores sugieren que:

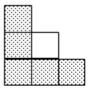
$$H_n = P_n + T_{n-1}$$

por tanto la expresión que determina el n-ésimo número hexagonal es:

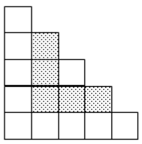
$$\begin{aligned} H_n &= \frac{n(3n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(3n-1+n-1)}{2} \\ &= \frac{n(4n-2)}{2}. \end{aligned}$$

La otra partición de 4 que vamos a utilizar es añadir 2 cuadrados unidad a un lado del cuadrado inicial y 2 en un lado adyacente, aplicando el mismo mecanismo para las demás escuadras; así obtenemos:

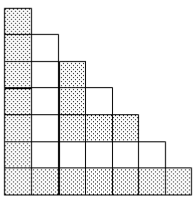
1



$1 + 5 = 6$



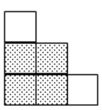
$1 + 5 + 9 = 15$



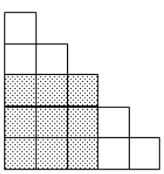
$1 + 5 + 9 + 13 = 28$

Interpretando los gráficos como cuadrados y triangulares, tenemos que:

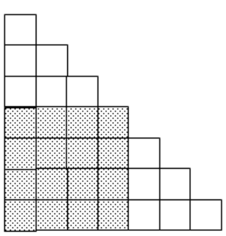
1



$6 = 4 + 2(1) = C_2 + T_1$



$15 = 9 + 2(3) = C_3 + 2T_2$



$28 = 16 + 2(6) = C_4 + 2T_3$

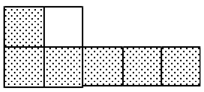
Entonces conjeturamos que

$$H_n = C_n + 2T_{n-1}$$

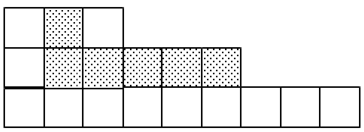
Pero este resultado es equivalente al que obtuvimos anteriormente.

Al considerar la fila 6, también usaremos dos particiones distintas de 5 para construir las escuadras y ensamblarlas. Empezaremos añadiendo 1 cuadrado unidad a un lado del cuadrado inicial y 4 en un lado adyacente, aplicando el mismo mecanismo para las demás escuadras:

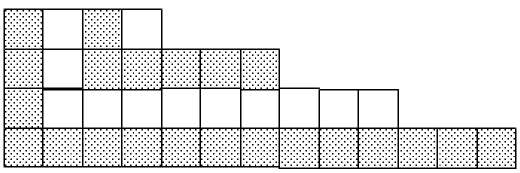
1



$1 + 6 = 7$



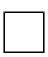
$1 + 6 + 11 = 18$



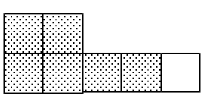
$1 + 6 + 11 + 16 = 34$

Estos números corresponden con los números heptagonales. Notaremos como Hp_n al n-ésimo número heptagonal.

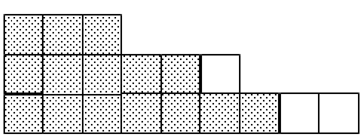
Interpretando los gráficos como hexagonales y triangulares, tenemos que:



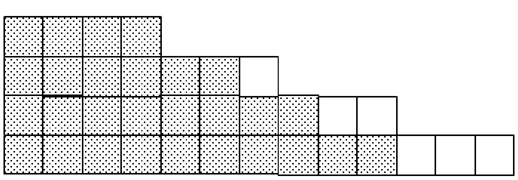
1



$7 = 6 + 1 = H_2 + T_1$



$18 = 15 + 3 = H_3 + T_2$



$34 = 28 + 6 = H_4 + T_3$

Las gráficas anteriores sugieren que:

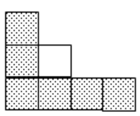
$$Hp_n = H_n + T_{n-1}$$

por tanto la expresión que determina el n-ésimo número heptagonal es:

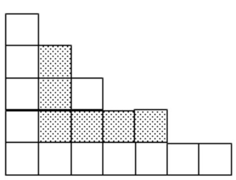
$$\begin{aligned} Hp_n &= \frac{n(4n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(4n-2+n-1)}{2} \\ &= \frac{n(5n-3)}{2}\,. \end{aligned}$$

La otra partición de 5 que vamos a utilizar es añadir 2 cuadrados unidad a un lado del cuadrado inicial y 3 en un lado adyacente, aplicando el mismo mecanismo para las demás escuadras; de acuerdo con esto obtenemos:

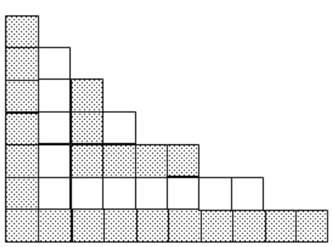
1



$1 + 6 = 7$



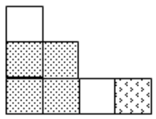
$1 + 6 + 11 = 18$



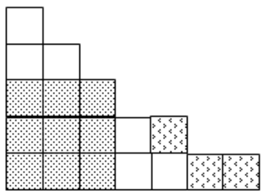
$1 + 6 + 11 + 16 = 34$

Interpretando los gráficos como cuadrados y triangulares, tenemos que:

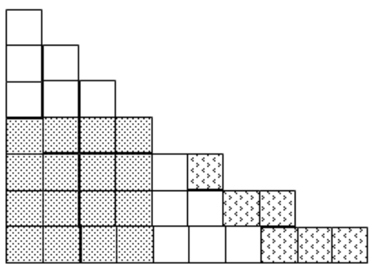
1



$7 = 4 + 3(1) = C_2 + 3T_1$



$18 = 9 + 3(3) = C_3 + 3T_2$



$34 = 16 + 3(6) = C_4 + 3T_3$

Entonces conjeturamos que

$$Hp_n = C_n + 3Tn - 1$$

Este resultado también es equivalente al que obtuvimos anteriormente.

De acuerdo a lo desarrollado y siguiendo razonamientos similares para los casos siguientes, tenemos tres resultados:

I. La suma de los n primeros términos de cada fila forma la secuencia:

$$n$$
$$\frac{n(n+1)}{2}$$
$$\frac{n(2n)}{2}$$
$$\frac{n(3n-1)}{2}$$
$$\frac{n(4n-2)}{2}$$
$$\frac{n(5n-3)}{2}$$
$$\frac{n(6n-4)}{2}$$

$$\frac{n(7n-5)}{2}$$
$$\frac{n(8n-6)}{2}$$
$$\cdots$$

de donde conjeturamos que la suma de los n primeros números de la fila k que corresponde al n-ésimo número $(k+1)$-gonal es

$$\frac{n[(k-1)n-(k-3)]}{2}$$

4. Teorema de Nicómaco

II. Existe una relación entre cada número poligonal y el de un orden anterior con un número triangular:

$$\begin{aligned} C_n &= T_n + T_{n-1} \\ P_n &= C_n + T_{n-1} \\ H_n &= P_n + T_{n-1} \\ Hp_n &= H_n + T_{n-1} \\ O_n &= Hp_n + T_{n-1} \\ N_n &= O_n + T_{n-1} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Por lo que suponemos que

$$(G_d)_n = (G_{d-1})_n + T_{n-1}$$

donde $(G_d)_n$ representa el n-ésimo número d-gonal. Este resultado es conocido como Teorema de Nicómaco de Gerasa quien lo formuló en el libro II de su Introducción a la aritmética[4]

III. Otra forma equivalente del Teorema de Nicómaco se infiere de la siguiente lista:

$$\begin{aligned} P_n &= C_n + T_{n-1} \\ H_n &= C_n + 2T_{n-1} \\ Hp_n &= C_n + 3T_{n-1} \\ O_n &= C_n + 4T_{n-1} \\ N_n &= C_n + 5T_{n-1} \\ &\cdots \\ (G_d)_n &= C_n + (d-4)T_{n-1} \end{aligned}$$

[4]NICOMACO DE GERASA., *Introducción a la Aritmética*, En VERA, F. (1970). *Científicos griegos.* Recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas. Madrid (España), Editorial Aguilar. p.p. 911-916.

donde $(G_d)_n$ representa el n-ésimo número d-gonal.

Como $C_n = T_n + T_{n-1}$ entonces

$$(G_d)_n = (T_n + T_{n-1}) + (d-4)T_{n-1}$$

O lo que es lo mismo

$$(G_d)_n = T_n + (d-3)T_{n-1}$$

que es otra forma del Teorema de Nicómaco.

Bibliografía

[1] BEILER, A. *Recreations in the theory of numbers*. New York: Dover. 1966.

[2] JIMÉNEZ, R., GORDILLO, E., RUBIANO, G. *Teoría de números para principiantes*. Segunda Edición. Bogotá, D.C.: Facultad de Ciencias, Universidad Nacional. 2004.

[3] LUQUE, C., MORA, L., PÁEZ, J., *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir*. Bogotá: D.C.: Universidad Pedagógica Nacional. 2002.

[4] NELSEN, R. *Proofs Without Words*. Washington, The Mathematical Association of America. 1993.

[5] NICOMACO DE GERASA. *Introducción a la Aritmética*, En VERA, F. (1970). *Científicos griegos*. Recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas. Madrid (España), Editorial Aguilar.

[6] OGILVY, C., ANDERSON J. *Excursions in number theory*. New York: Dover. 1988.