

## FIGURACIÓN Y GESTUALIDAD UNA FORMA DE ABORDAR LA VARIACIÓN

Wilson Gordillo Thiriat y Eduardo Carrasco Henríquez

U. Distrital Francisco José de Caldas.

U. de Los Lagos.

wgordillot@udistrital.edu.co, eduardo.carrasco@ulagos.cl

Colombia

Chile

**Resumen.** Este trabajo presenta un estudio de caso con estudiantes que ingresan a la universidad, a fin de determinar figuraciones, gestualidades y justificaciones que emergen cuando analizan una curva para interpretar fenómenos de variación. Se diseña y aplica un cuestionario que se desarrolla en forma grupal, con el propósito de identificar entendimientos germinales que fomenten y potencien ideas matemáticas, se analizan las producciones, a través de tres categorías propuestas con las cuales se evidencia la comunicación de fenómenos variacionales entre pares y algunas nociones y relaciones gestuales a las que recurren los estudiantes en sus argumentaciones

**Palabras clave:** Figuración, gestualidad, variación

**Abstract.** This paper presents a case study of students entering college to determine configurations, gesture and justifications that emerge when analyzing a curve to interpret phenomena of variation. It designs and implements a questionnaire that takes place in a group, with the aim of identifying germ understandings that promote and enhance mathematical ideas, productions are analyzed through three categories proposals which evidence variational phenomena communicating peer and some notions and relations gesture to which students turn in their arguments

**Key words:** Figuration, gestures, variation

### Antecedentes

El trabajo con la gráfica de la noción de derivada, asociada a la recta tangente implica una re-significación de la noción euclidiana de tangente, que refiere a intersectar a la curva en un solo punto, para entenderla desde una noción local y dinámica. Dolores (2000) muestra que la concepción griega de tangente puede constituirse en un obstáculo para la construcción, de parte de los estudiantes, de la concepción local. Aspecto que se sigue presentando, toda vez que el trabajo de Canul, Dolores y Martínez-Sierra (2011) señala nuevamente como la recta tangente, en su sentido euclideano, dificulta el trazo de rectas tangentes a una curva.

Por su parte, Radford (2009) afirma que el pensamiento no se produce únicamente en la mente, sino también a través de una coordinación sofisticada del lenguaje, el cuerpo, los gestos, los símbolos y las herramientas. Es más, la mayoría de las entidades abstractas en matemática son creadas por medio de mecanismos cognitivos que extienden la estructura de las experiencias corporales (Núñez, 2004, en Yoon, Thomas y Dreyfus, 2011). De este modo la gestualidad, cobra un rol más complejo que dar un énfasis a la comunicación y se constituye en parte de los procesos de aprendizaje, asociando la gestualidad con mejorar en el aprendizaje de la matemática, destacándose como una importante recurso pedagógico para la enseñanza en el aula (Yoon, Thomas y Dreyfus, 2011).

Carrasco, Buendía y Díaz (2013) al abordar el estudio de prácticas de figuración, entendidas como prácticas de construcción e interpretación de una figura plana de entidades que se distinguen en un fenómeno de variación. Prácticas a las cuales concurren aspectos socioculturales, cognitivos y epistémicos, es decir, son construcciones sociales que se estudian en el marco de la socioepistemología y la línea del pensamiento variacional (Cantoral y Farfan, 1998). Interesa, por tanto, en este reporte abordar prácticas de interpretación de una gráfica cartesiana, poniendo atención a aquello que concurre a la actividad de los estudiantes que interpreta. En particular el rol que la gestualidad tiene en la actividad estudiantil de interpretación y como la gestualidad concurre a significar elementos propios de la figuración de la derivada de una función.

A partir de estos antecedentes las preguntas orientadoras a este escrito son: ¿Cómo la gestualidad concurre a la interpretación de gráficas? ¿Cómo puede aportar la gestualidad en procesos de figuración a la comprensión de los conceptos de pendiente, recta tangente y derivada y su interrelación en una práctica socio-escolar?

### Elementos teóricos

La palabra gesto en la rae, se significa como el movimiento del rostro, de las manos o de otras partes del cuerpo con que se expresan diversos afectos del ánimo y a la gestualidad como el conjunto esos movimientos. McNeill (1992), por su parte, desde una aproximación lingüística, entiende al gesto como un signo, que define como la acción voluntaria del rostro, las manos o brazos que expresan algo, ya no solo una afectos del ánimo, sino ideas, la acción sería, en palabras de McNeill, el significante que permite acceder a lo significado en el discurso de quien realiza el gesto. De este modo los gestos y principalmente la gestualidad asociada a una idea conforman un espacio gestual (Yoon, Thomas y Dreyfus, 2011). En particular, para esta investigación podemos hablar de un espacio gestual matemático, conformado por el conjunto de gestos asociados con una noción en la actividad matemática y a la vez tiene un lugar en el espacio entre los hablantes.

Por su parte, Carrasco, Buendía y Díaz (2013) conforman la noción de espacio epistémico de figuración, que se constituye en el acto de construir e interpretar figuras de fenómenos de variación, al ponerse en interrelación compleja a los estudiante con el ambiente, con una figura y con un fenómeno. Un espacio perceptivo, operacional y experiencial, en el cual ocurre la interacción entre quienes interpretan una gráfica y en el espacio gestual matemático, concurre al acto de conocer que se da en la interpretación de la gráfica.

### Metodología

En el marco de un estudio de caso, se aborda un proceso exploratorio del rol de la gestualidad en prácticas de interpretación de gráficas cartesianas. Para ello se aplica un cuestionario a cuatro


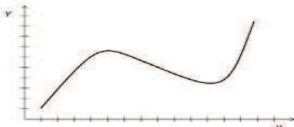
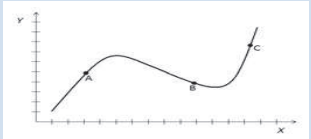
estudiantes egresados de enseñanza media (18 años) y que se aprontan a iniciar los estudios de ingeniería, en la ciudad de Santiago-Chile.

En equipos de dos estudiantes, responden el cuestionario. Se registra la actividad mediante filmación. A partir del video se construye un guion de lo filmado, seleccionando los momentos clave para su análisis.

En el análisis se recurre al contraste de las respuestas entregadas por los estudiantes con aquellas conjeturas realizadas en la etapa de diseño del test. A partir de lo cual se levantan elementos significativos de las prácticas estudiantiles focalizando la mirada en: a) La figuración: Intervención gráfica sobre la curva, b) La justificación: Como argumentan sus afirmaciones a la pregunta, y c) La gestualidad: movimiento de manos y brazos significativos a la actividad propuesta, acompañado de discurso.

### El cuestionario

Cada una de las preguntas se diseña para indagar en los estudiantes prácticas de figuración y gestualidad, al momento de interactuar argumentativamente entre pares.

Tabla 1. Pregunta del cuestionario y su propósito.	
<p>Pregunta N° 1. Observe la siguiente grafica y responda a la pregunta dada</p>  <p>¿Donde se inclina más la curva? Justifique su respuesta.</p>	<p>Esta pregunta pretende explorar elementos de figuración, se espera el trazo de ejes cartesianos para orientación, ubicación de puntos o rectas de forma que represente la inclinación de la curva, al igual que se espera que en el dialogo con su par, se interactúe en discurso y se presente movimiento involuntario de brazos o manos para explicar algún concepto a su compañero.</p>
<p>Pregunta N° 2. Observe la siguiente grafica y responda a la pregunta dada</p>  <p>¿Donde se inclina más la curva? Justifique su respuesta.</p>	<p>Esta pregunta pretende explorar elementos de figuración, se espera la ubicación de puntos o rectas de forma que represente la inclinación de la curva, al igual que se espera que en el dialogo con su par, se interactúe en discurso y se presente movimiento involuntario de brazos o manos para explicar algún concepto a su compañero.</p>
<p>Pregunta N° 3. Observe la siguiente grafica y responda a la pregunta dada.</p>  <p>¿En cuál de los tres puntos la curva está más inclinada? Justifique su respuesta</p>	<p>Esta pregunta pretende explorar elementos de gestualidad, rectas tangentes en los puntos dados de forma que represente la inclinación de la curva, al igual que se espera que en el dialogo con su par, se interactúe en discurso y se presente movimiento involuntario de brazos o manos para explicar algún concepto a su compañero.</p>


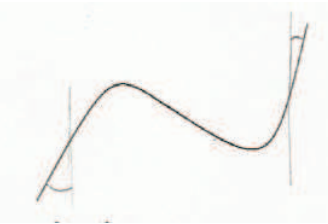
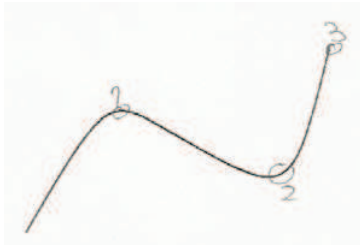
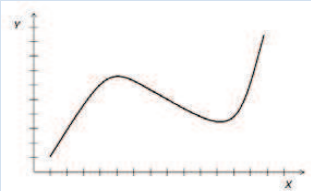
## Análisis de resultados

Para analizar y contrastar las respuestas entregadas por los grupos, se elaboran dos etapas de descripción de las producciones estudiantiles. En la primera se describen:

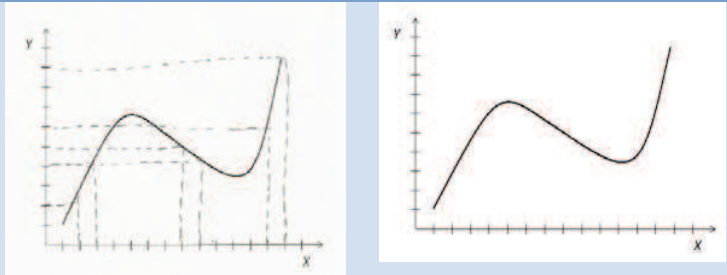
- ❖ Intervención a la gráfica: Trazos adicionales sobre la curva presentada (trazos, rectas, tangentes, signos, símbolos)
- ❖ Su argumentación, entendida en aspectos que concurren a justificar la respuesta (forma para describir fenómeno de variación)

En la segunda fase se ponen atención a la gestualidad acompañada del discurso argumentativo a la pregunta de los estudiantes (análisis del video para intercambio de conocimiento o argumento con el compañero).

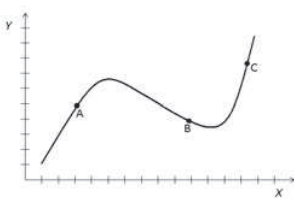
Las respuestas de los estudiantes al cuestionario fueron las siguientes:

Tabla 2: Respuestas Estudiantiles		
Pregunta	Grupo 1	Grupo 2
	Transcripción de la justificación	Transcripción de la justificación
<p>Pregunta N° 1. Observe la siguiente grafica y responda a la pregunta dada</p>  <p>¿Donde se inclina más la curva? Justifique su respuesta.</p>	<p>“A juzgar por las apariencias de la curva el tramo final es el de mayor inclinación. Además el ángulo formado por la curva en comparación con una recta vertical es claramente más pequeño en la sección final”</p> 	<p>“ Uno de los dos piensa que inclinación es noción de pendiente y el otro piensa que es donde se obtiene mayor pendiente para el primer caso los puntos 1 y 2 y para el segundo caso tenemos al punto 3”</p> 
<p>Pregunta N° 2. Observe la siguiente grafica y responda a la pregunta dada</p> 	<p>“ Mediante una medición no muy regular de las coordenadas y tomando como referencia el avance de el espacio en el eje OY respecto de un espacio de el eje OX podemos verificar que en la sección final de la curva es la mayor pendiente”</p>	<p>“ Vemos que donde se inclina más, depende del punto de referencia que tomemos, por que si tomamos como referencia el eje X estará más inclinado donde la pendiente es mayor y si tomamos como referencia el eje Y, será cuando la pendiente sea mayor”</p>

¿Donde se inclina más la curva?  
Justifique su respuesta.



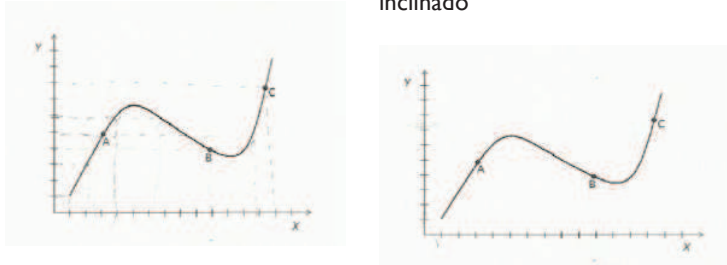
Pregunta N° 3. Observe la siguiente grafica y responda a la pregunta dada.



¿En cuál de los tres puntos la curva está más inclinada?  
Justifique su respuesta

“ Guiados por la apariencia de la curva analizamos las coordenadas de cada sección de la curva, constatando finalmente que la pendiente en el punto C es mayor que la pendiente de los puntos A y B”

“ A es imposible que sea más inclinado ya que la pendiente que posee se encuentra entre las de B y C, ahora si tomamos como referencia el eje X, C será el más inclinado, y si tomamos como referencia el eje Y, B será el más inclinado”



### Pregunta 1.

Ambos equipos intervienen la gráfica para focalizar el análisis en puntos específicos de ella. El G1, incorpora dos perpendiculares para medir ángulos. Por su parte G2 encierra, separando perceptivamente, puntos específicos de la curva.

Respecto de las argumentaciones, G1 significa la inclinación desde su cercanía con una línea vertical. Así la medición es un ángulo con una línea vertical. A menor ángulo, mayor inclinación. Por su parte G2, solo refiere a percepciones cualitativas respecto de la inclinación referida como pendiente.

### Pregunta 2.

El G1, interviene la gráfica incorporando líneas punteadas hacia los ejes, marcando diversos puntos/pares ordenados en la gráfica. A diferencia de la pregunta anterior, la curva es significada como ruta y no hay presencia de ángulos a una línea vertical. Por su parte el G2 no interviene la gráfica.

La argumentación se construye desde una gráfica que se significa como camino recorrido. Así la inclinación se visualiza desde la razón entre el reflejo del avance en el eje y de un avance en el eje  $x$ . son argumento dinámicos diferentes a aquellos estáticos y geométrico usados en la pregunta anterior. Por su parte la argumentación del G2 es solo descriptiva y usa la palabra pendiente como un sinónimo de inclinación, pendiente que se percibe en referencia al eje elegido.

### Pregunta 3.

El G1 interviene la gráfica con la misma estrategia de la pregunta anterior. Cabe destacar que se destacan líneas punteadas en la vecindad del punto A. G2, por su parte no interviene la figura.

La argumentación solo refiere a que se ha analizado las coordenadas de cada punto, sin descripción del análisis realizado. El hecho que en la vecindad del punto A, existan líneas punteadas que podríamos interpretar como puntos cercanos a A, permiten suponer que el análisis usado es el mismo usado en la pregunta anterior. G2 por su parte, no da argumentaciones, sino afirmaciones perceptivas. Sin embargo evidencia como el punto con mayor pendiente depende del eje que sea referido.

### Gestualidad

Durante el dialogo que entablan los equipos para construir la respuesta consensuada al cuestionario se aprecian diversos gestos, que no concurren, no solo a dar énfasis a la argumentación de quien hablaba, sino que aportan en la interpretación de los gráficos. Hemos destacado en este reporte aquellos gestos asociados con la pendiente. Como se aprecia en las imágenes, la inclinación es gestualizada mediante la extensión del antebrazo y la mano conformando un segmento recto, el cual es puesto en diversas posiciones según el punto que se esté analizando.

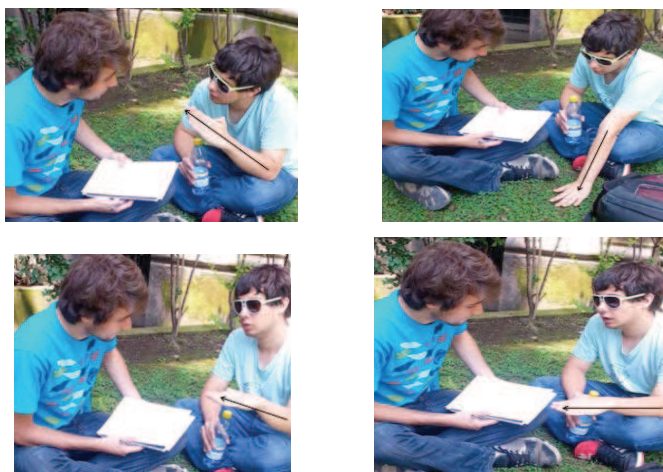


Fig. 1. Gestualidad de la Pendiente.

Este conjunto de gestos conforman la gestualidad de la pendiente y concurre a conformar una metáfora corporal de pendiente, al corporizar esta noción desde la inclinación respecto del suelo del antebrazo. El G1, entonces, significa la línea vertical como lo más inclinado, es un antebrazo perpendicular al suelo, mientras que el G2, pone de manifiesto la necesidad de una referencia (“suelo”) para percibir mayor o menor inclinación.

### A modo de conclusión

De acuerdo a los análisis planteados, se puede establecer que en la interpretación de la gráfica, asociada a la categoría de figuración, los estudiantes intervienen las gráficas, extendiendo la curva o agregando ejes o haciendo marcas, al igual que lo evidenciado en Carrasco y Díaz (2012). Dichas intervenciones buscan visualizar y/o focalizar la mirada interpretativa de la gráfica. Las argumentaciones por tanto, recurren a una percepción visual, “a simple vista” de la figura. Ello pareciera dificultar la construcción de argumentaciones escritas matemáticas, a diferencia de la diversidad de argumentos orales y gestuales durante su actividad. Cabe destacar que las respuestas de los estudiantes refieren a pendiente y no inclinación.

Se identifica en la actividad estudiantil el recurso a la gestualidad de la pendiente, entendida como las diferentes inclinaciones, respecto del suelo, del antebrazo y mano extendidos. Esta gestualidad permite suponer la significación metafórica de pendiente de la curva como la inclinación de un segmento respecto de un eje o suelo. Así lo más inclinado será lo más cercano a la perpendicular al eje (G1) y siempre referirá, como señala el G2, a un “suelo” que será el eje de referencia.

De este modo, gestualidad, figuración y argumentación se interrelacionan en la construcción de las respuestas a la actividad. El uso de la intervención de las figuras articuladas en la oralidad y gestualidad de la explicación a su compañero, muestra como emergen argumentaciones e ideas germinales para abordar el pensamiento variacional, las cuales no pueden ser traducidas en formalización matemática escrita, pero pueden constituir eslabones para la enseñanza de conceptos en el cálculo, como es la pendiente como segmento recto. Por parte de los investigadores, hay un punto de partida a fin generar y construir propuestas didácticas que aborden la interrelación mostrada entre la figuración, la gestualidad y el formalismo de la matemática para la apropiación de conceptos.

### Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje Variacional en la introducción al análisis. *Épsilon*. 42, 352-369.

- Canul, E., Dolores, C. y Martínez-Sierra, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*. 14 (2), pp. 173-202.
- Carrasco, E. y Díaz, L (2012). Dos casos de figuración para lo que varía. *Acta Resumen de EIME XV*, 19° escuela de invierno de matemática educativa, México. D.F.
- Dolores, C. (2000). Una Propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. *El futuro del cálculo infinitesimal*. Capítulo V. GE I. México D.F. pp 155-181.
- Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), pp.111–126.
- Yoon, C., Thomas, M. y Dreyfus T. (2011). Grounded blends and mathematical gesture spaces: developing mathematical understandings via gestures. *Educational Studies in Mathematics*, 78, pp.371-303.