

## LA INTEGRAL DEFINIDA Y EL CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIONES PLANAS: UN RECURSO EN LA WEB.

Adriana Engler  
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral - Argentina  
aengler@fca.unl.edu.ar  
Pensamiento matemático avanzado/Medio-Superior

### Resumen

La enseñanza de los principios del Cálculo Integral es una tarea difícil. En general el estudiante aprende a calcular mecánicamente primitivas y resuelve problemas sencillos pero surgen grandes dificultades al ingresar en el campo disciplinar y alcanzar a comprender satisfactoriamente los conceptos y métodos del pensamiento matemático.

Este trabajo que tiene como objetivo aportar un recurso multimedial de apoyo para el estudio de la Integral Definida y su aplicación en el cálculo de áreas de regiones planas para estudiantes de carreras universitarias de disciplinas científicas pero no matemáticas, con el fin de lograr mejorar el aprendizaje. La obra está desarrollada en HTML y se ofrece a través del portal web de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral (<http://www.fca.unl.edu.ar>).

### Consideraciones generales

Las Universidades tienen la tarea de formar profesionales creativos, capaces de impulsar innovaciones tecnológicas y asumir un papel activo en el desarrollo socioeconómico de un país. La formación de un profesional de perfil amplio exige que el egresado universitario domine las bases de los conocimientos científicos y adquiera competencias que le permitan incrementar y renovar permanentemente su bagaje científico y profesional.

La enseñanza no puede quedar aislada de la realidad en la que surge, dado que es un acto social, histórico y cultural orientado a valores y en el cual se involucran seres humanos. Para lograr que la escolarización resulte significativa, se debe aspirar a la creación de contextos sociales donde el aprendizaje sea activo, así como alentar la prueba, la búsqueda de caminos alternativos, el análisis crítico de los errores, el contraste de hipótesis y la investigación.

Los alumnos deben lograr desarrollar hábitos mentales que les permitan ser protagonistas del aprendizaje y del conocimiento, y no simplemente alumnos informados.

Por estas razones, es absolutamente indispensable que el docente se proponga:

- enseñar a aprender,
- lograr un conocimiento bien estructurado de modo que, a partir de pocas informaciones o representaciones sólidamente asimiladas, el alumno pueda recrear el conocimiento o acceder fácilmente a él,
- enseñar a pensar y a resolver problemas, a fin de alcanzar un pensamiento reflexivo, crítico y creativo.

La educación no puede transcurrir sólo en el ámbito escolar y mucho menos sólo en el aula. Para que el aprendizaje sea eficaz se debe crear en el estudiante la necesidad de aprender y generar un ambiente donde se posibilite y se motive la exploración del significado personal de los conceptos. Debido a la presencia de cambios tan vertiginosos en las diferentes disciplinas científicas y tecnológicas, se torna necesaria una redefinición de la currícula matemática en cada carrera y una adecuada planificación de cada unidad didáctica particular.

No cabe duda de que los avances tecnológicos, si resultan útiles, deben ser adoptados a los fines educativos y adaptados a la filosofía de la educación, así como a sus necesidades y derivaciones pedagógicas y didácticas. Muchas son las cuestiones que surgen respecto de los métodos y las innovaciones que acompañan la formación del alumno.

No podemos desconocer que los docentes jugamos un papel protagónico en este proceso de transformación de la educación y en el descubrimiento constante de nuevas formas de enseñar. La informática juega un papel muy importante en la búsqueda de estas nuevas formas, puesto que resulta un instrumento facilitador y motivador del proceso de enseñanza y permite considerar la singularidad del alumno en su ascenso cognoscitivo. Incorporarlo para favorecer y mejorar cualitativamente el aprendizaje implica redefinir el recurso técnico como un recurso didáctico-pedagógico, evitando así que resulte un elemento de distorsión.

Las actitudes con las que el alumno enfrenta el proceso de aprendizaje, intervienen decididamente en la adquisición de los conocimientos y son factores que influyen notoriamente en los resultados de tal proceso. El alumno desarrollará actitudes positivas o negativas hacia determinada asignatura, no sólo en función de su contenido, sino también en función del ambiente que se genere durante el proceso de intervención, y de las actividades que se propongan.

Teniendo en cuenta lo expresado y convencida de que la enseñanza de los principios del Cálculo es una tarea difícil y complicada se origina este trabajo que tiene como objetivo aportar un recurso multimedial de apoyo para el estudio de la Integral Definida y su aplicación en el cálculo de áreas de regiones planas para estudiantes de carreras universitarias de disciplinas científicas pero no matemáticas, con el fin de lograr mejorar el aprendizaje.

### **Características y diseño de la obra**

El desarrollo de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el cálculo con las especificidades observadas en cada caso está abriendo la posibilidad de nuevas propuestas didácticas fundamentadas en el análisis de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de estos temas.

El tratamiento tradicional impide la comprensión de los conceptos fundamentales y una aplicación creativa. Las nuevas tendencias son un aporte para solucionar el problema de dar significado a los contenidos aprendidos. Para la mayoría de los alumnos la noción de Integral Definida desarrollada en forma abstracta y con la perfección y rigurosidad matemática no alcanza a tener un verdadero significado, y en la mayoría de los casos no entienden el por qué del enorme esfuerzo deductivo al que se los somete, en especial para aquellos que serán usuarios de la matemática y no futuros matemáticos. Más allá del cálculo de áreas "puras" no logran reconocer cuándo el cálculo de una magnitud requiere de una integración.

El enfoque propuesto en esta obra para desarrollar los contenidos del cálculo integral en relación con el cálculo de áreas es primordialmente gráfico e intuitivo. Los estudiantes construyen desde el principio una concepción de integral como un número que da la medida de un área, de una cantidad acumulada o de efectos de cambio. Se reconstruye didácticamente el desarrollo histórico de la integral definida partiendo de la aproximación por sumas y se trabaja además con razones de cambio para establecer la relación existente entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral. Se busca establecer una dinámica de trabajo más activa y más próxima al quehacer matemático en la fase de elaboración de una teoría donde interviene la intuición, la improvisación, las analogías,

las pruebas, las aproximaciones y donde los propios estudiantes participan en la construcción de las concepciones.

El guión se diseñó teniendo en cuenta básicamente esta secuencia: problemas de introducción, desafíos a resolver, construcción y formalización de la concepción y, ejercicios y problemas de aplicación. Las definiciones, propiedades y teoremas se establecen formalmente después de haber sido abordados desde lo informal y la intuición. Las demostraciones son motivadas y cuidadosamente explicadas para que puedan ser comprendidas. Al establecerse una propiedad o teorema sin demostración se motiva a la discusión mediante gráficos, ejemplos e interrogantes que conducen a un análisis de la situación planteada. Se otorga importancia relevante a los modelos matemáticos de las aplicaciones de la vida cotidiana y la profesional. Se tiene en cuenta que no se beneficia al estudiante si sólo se le enseña cómo manejar los símbolos matemáticos del cálculo. El estudiante necesita manejar con facilidad el lenguaje del cálculo por entender su utilidad como un medio para resolver problemas de administración, economía, física, ciencias naturales y ciencias sociales.

La propuesta didáctica busca combinar lo gráfico, lo numérico y lo algebraico y tiende a poner en un primer plano los aspectos conceptuales por sobre el aprendizaje de reglas de cálculo sin la comprensión de dichos conceptos. Se presentan los conceptos matemáticos de integral definida en su doble aspecto de *objetos de conocimiento* y de *instrumentos de conocimiento*. Su desarrollo se basa en considerar que el aprendizaje del concepto de integral definida es independiente del aprendizaje de los conceptos relacionados con la derivada.

Se estudia la integral definida independientemente de la derivación y se evita así que ellos sólo interpreten la integración como operación inversa de la derivación y se logra descubrir el teorema fundamental del cálculo como la herramienta que genera una relación casi inesperada entre las estructuras matemáticas de derivación e integración aparentemente independientes.

En el diseño y desarrollo del producto multimedial se toman en consideración, básicamente, los siguientes elementos conceptuales:

- La necesidad de superar el modelo educativo tradicional, caracterizado por una presentación dogmática y verbalista de “contenidos”.
- La caracterización del proceso de aprendizaje como un proceso de ascenso gradual en el nivel de abstracción de los conceptos científicos.
- La relevancia de los procesos de desantropomorfización y desustancialización que se operan en los conceptos al pasar del lenguaje natural –expresión del sentido común– al ámbito científico.

Al final del artículo se incluye el mapa de vínculos hipertextuales donde se destacan las principales conexiones entre los diferentes contenidos. Sólo se incluyen los principales links y se enfatiza la secuencia eje de esta obra:

- Necesidad del concepto Integral Definida.
- Definición de Integral Definida.
- Teorema Fundamental del Cálculo.
- Cálculo de áreas.
- Aplicaciones a modelos físicos, biológicos, económicos, químicos, técnicos y sociales etc.

En la obra además se sugiere la consulta a sitios en la WEB donde aparecen interesantes animaciones a fin de motivar el aprendizaje.

A modo de ejemplo se muestra la página llamada "Pantalla Principal" en el mapa de vínculos hipertextuales. A partir de ella se pueden abordar todos los contenidos intentando motivar así el aprendizaje autónomo.

## Integral Definida

### Su aplicación en el cálculo de áreas de regiones planas

<b>¿Por qué estudiamos la Integral Definida?</b>	
<b>Un poco de Historia:</b> - <a href="#">El nacimiento del Cálculo</a> - <a href="#">Los contribuyentes al Cálculo</a>	<a href="#">Objetivos</a>
	<a href="#">Contenidos</a>
	<a href="#">Bibliografía</a>
<b>Para comenzar nuestro trabajo analicemos alguna de las dos situaciones planteadas</b>	
<u><b>EL PROBLEMA DEL ÁREA</b></u>  <b>¿Cómo calculamos un área?</b>	<u><b>EL PROBLEMA DE LA DISTANCIA</b></u>  <b>¿Cómo se mide la distancia recorrida por un objeto?</b>
<u><b>¿Qué conclusiones obtiene después de trabajar, analizar y discutir cada uno de los planteos?</b></u>	

#### El por qué de desarrollar la obra en HTML

Internet es la red mundial de interconexión de computadoras. Dada su avanzada tecnología, durante años se ha considerado a Internet como algo duro de aprender, difícil de utilizar y de mantener o promover.

La World Wide Web ha hecho que todo esto cambie. La "Web" se convirtió rápidamente en la interfaz gráfica de usuario para Internet, y no tiene ninguna competencia por parte de otros servicios de información interactiva en cuanto a términos de estética, flexibilidad y facilidad de uso, disponibilidad de datos y, costos de desarrollo, mantenimiento y acceso. Esta capacidad y potencia informativa se basa en el hipertexto. Hipertexto es la capacidad de vincular términos y palabras clave con otros textos conexos (tanto conceptual como "físicamente"). Desde el punto de vista educativo, el hipertexto posibilita acercar a los usuarios una organización de los contenidos similar a los mapas o esquemas mentales posibilitando así superar las limitantes de los textos tradicionales (linealidad, secuencialidad única).

Pero un página web no es simplemente hipertexto. Se podría decir que la World Wide Web es la madre de todos los sistemas de hipertexto. Esto se debe a que uno no está limitado a establecer vínculos al propio texto que ha creado. Ni siquiera está limitado a establecer vínculos a documentos de su propia computadora. Tiene a su disposición cualquier documento existente en la World Wide Web, lo cual posibilita al usuario acceder a informaciones desarrolladas por otros especialistas en el tema y complementar el trabajo propio. Además, el hipertexto posibilita la interconexión de todo tipo de información multimedia: textos, imágenes, sonidos, videos, animaciones, con lo cual se potencia la presentación de la información al posibilitar seleccionar el medio o canal más adecuado para transmitir el concepto o ejemplo.

El HTML no es un verdadero lenguaje de programación, es un sistema para el formateo de información que permite integrar, en un mismo documento, objetos de distinta naturaleza (multimedia). La combinación de la capacidad multimedia junto al hipertexto soportado por la Web ha resultado ser una fórmula de éxito debido a las siguientes ventajas no compartidas por otros sistemas multimediales: difusión, permanencia de los contenidos, capacidad de actualización, interactividad, atención personalizada y costo de desarrollo y de difusión mínimo.

El presente producto se ofrece a la comunidad mundial a través del portal web de la FCA (UNL): <http://fca.unl.edu.ar> , desde la sección "Material de Apoyo" para los

"Alumnos" de Carreras de Grado. También se podrá bajar íntegramente a fin de ser consultado sin necesidad de conexión permanente.

### **Reflexiones**

Al plantear esta propuesta pretendí generar un complemento para la enseñanza de un contenido muy importante en el vasto desarrollo del Cálculo Integral, la Integral Definida y su aplicación en el cálculo de áreas de regiones planas. Con ella espero despertar en los estudiantes el interés por el tema y la necesidad de participar activamente en su aprendizaje. Busco lograr la construcción del conocimiento con el apoyo de la herramienta informática en su papel de recurso didáctico-pedagógico.

### **Bibliografía**

- Anton, H. (1991). *Cálculo y Geometría Analítica. Volumen I*. México: Limusa.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Dovady, R.; Moreno, L.; Gómez, P., (Eds). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp.97-140). Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Arya, J. y Larner, R. (1992). *Matemáticas aplicadas a la Administración. Economía, Ciencias Biológicas y Sociales*. Méjico: Prentice Hall Hispanoamericana.
- Baum, A.; Milles, S. y Schultz, H. (1992). *Cálculo Aplicado*. Méjico: Limusa. Grupo Noriega Editores.
- Budnick, F. (1997). *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales, Tercera Edición*. Méjico: Mc. Graw Hill.
- Farfán Márquez, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Goldstein, L.; Lay, D. y Schneider, D. (1990). *Cálculo y sus Aplicaciones. Cuarta Edición*. Méjico: Prentice Hall.
- Hughes-Hallet, D.; Gleason, A.; et al. (2001). *Cálculo. Segunda Edición*. Méjico: CECOSA.
- Kilpatrick J.; Gomez, P.; Rico, L. (1995). *Educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamerica.
- Larson, R.; Hostetler, R.; Edwards, B. (1995). *Cálculo y Geometría Analítica, Volumen I. Quinta Edición*. Méjico: Mc. Graw Hill.
- Leithold, L. (1999). *El Cálculo, 7 ed.* Méjico: Oxford University Press.
- Lial, M. y Hungerford, T. (2000). *Matemáticas para Administración y Economía*. Méjico: Prentice Hall Hispanoamericana.

- Litwin, E. (compiladora). (1995). *Tecnología Educativa. Política, historia, propuestas*. Buenos Aires: Paidós.
- Perero, M., (1994). *Historia e Historias de Matemáticas*. Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Purcell, E. y Varberg, D. (1993). *Cálculo Diferencial e Integral. Sexta Edición*. Méjico: Prentice Hall Hispanoamericana.
- Purcell, E. y Varberg, D. (1995). *Cálculo con Geometría Analítica*. Méjico: Prentice Hall Hispanoamericana.
- Stewart, J. (2001). *Cálculo, Conceptos y contextos*. México: International Thomson Editores.
- Thomas, G. y Finney, R. (1998). *Cálculo, una variable*. Méjico: Pearson. Addison Wesley Longman.
- Wenzelburger, E. (1993). *Didáctica Cálculo Integral*. Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.

