

EL PAPEL DE LA INTERPOLACIÓN Y LA PREDICCIÓN EN EL CÁLCULO

Hipólito Hernández Pérez

CIMATE - Universidad Autónoma de Chiapas, I. T. de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
polito_hernandez@hotmail.com

Campo de Investigación: Epistemología-Tecnología avanzada; Nivel Educativo: Superior
Metodología: Histórico-crítico

Palabras clave: Predicción, Interpolación, Práctica Social, Cálculo

Resumen

En esta investigación se desarrolla un análisis epistemológico para mostrar el papel de la interpolación y la predicción en el Cálculo con énfasis en la matematización del movimiento, el binomio de Newton y la serie de Taylor. Nuestro análisis está matizado por la aproximación socioepistemológica entendida como epistemología de prácticas sociales (Cantoral, 2001), con la intención de diseñar una situación del movimiento uniformemente acelerado de un cuerpo.

Introducción

En el discurso de la matemática escolar actual, el binomio de Newton es utilizado en forma algorítmica para operaciones algebraicas, y la serie de Taylor es enseñado para el estudio de convergencia de funciones con un acercamiento Cauchiano, además estos contenidos matemáticos en el discurso actual no están vinculados con los fenómenos físicos. El objetivo de esta investigación es diseñar situaciones que involucren al binomio de Newton y la serie de Taylor con los contextos físicos, a través de las prácticas sociales de la interpolación y la predicción como unidad de análisis de la aproximación socioepistemológica, es decir, entendida como epistemología de prácticas sociales (Cantoral, 2001). En la investigación se reporta la emergencia de la interpolación y de la predicción en forma implícita desde los estudios del movimiento de los cuerpos por los filósofos del colegio de Merton, obteniendo la regla del grado medio de la velocidad, y posteriormente Oresme retoma estos estudios para explicar y construir el teorema del grado medio o velocidad media en forma geométrica, en consecuencia la velocidad media es la interpolación entre dos estados del movimiento. Galileo conserva estas ideas de la regla del grado medio y la representación geométrica de Oresme para elaborar su ley de caída libre en donde se puede visualizar la interpolación. La interpolación y predicción aparece en forma explícita en el marco epistémico de Newton puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (Muñoz, 2000; Hernández, 2002) en donde la matematización del sistema genera construcción de herramientas como el binomio de Newton y la serie de Taylor. Con base en lo anterior se diseñará una situación del movimiento uniformemente acelerado de un cuerpo..

Problemática

En el discurso matemático actual en la enseñanza de la matemática, física y ciencias de la ingeniería que forman parte del plan de estudios de la carrera de ingeniería civil, los

contenidos matemáticos en estas disciplinas son abordados con métodos analíticos del Cálculo de una o de dos variables a través del concepto de límite, es decir con un acercamiento de Cauchy. En los cursos, y textos de Álgebra o Cálculo (Baldor, 1988; Kuratowski, 1975), el binomio de Newton es expresado de la forma $(a + b)^n$ y utilizado sólo en un ambiente algorítmico sin considerar su origen y su contexto social. En el discurso de física, el binomio de Newton es sólo utilizado como una herramienta de aproximación, así mismo la serie de Taylor y las diferencias finitas (Zill, 1993; Aleksandrov y Kolmogorov, 1976) son transposiciones de dos saberes matemáticos (Chevallard, 1997) que están desvinculados entre uno y otro, así como del contexto físico, es decir, no existe una integración de estos contenidos matemáticos en los planes de estudios vigentes y en los textos actuales que a la vez son recomendados en la matemática escolar vigente. En los textos escolares de física e ingeniería (Benson, 1999) consultadas en nuestro medio, eventualmente aparecen en forma implícita ideas estrechamente vinculadas a las nociones de la serie de Taylor, por ejemplo: $f(x + \Delta x)$ para funciones de una variable independiente, o bien $f(x + \Delta x, t + \Delta t)$ para funciones de dos variables independientes, aunque no aparece en forma explícita la noción de variación y de predicción en los fenómenos físicos. En el contexto anterior hemos abordado la pregunta de investigación siguiente ¿Qué prácticas sociales emergen en la transición del binomio de Newton y la serie de Taylor? tanto de una variable como de dos variables. El discurso de la matemática escolar vigente en las disciplinas mencionadas parece inhibir las ideas de variación y predicción de los estudiantes, puesto que el Cálculo escolar es visto como una estructura formal que antecede al análisis (Cantoral, 2001).

Marco teórico

En esta investigación, nuestro marco teórico está matizado en la aproximación socioepistemológica en donde se analizan de manera sistémica la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva, la dimensión didáctica y la dimensión social. Cada dimensión tiene su propia teoría en cuanto a su marco teórico, pero tienen características comunes entre ellas al interactuar en los procesos didácticos a partir de la actividad humana (prácticas sociales) que realizan conjuntamente profesor - alumno en el aula y fuera de ella. En la investigación de Buendía y Cordero (2003) hacen énfasis que no sólo los aspectos cognitivos están en juego en la construcción del objeto matemático sino en la práctica social que conduce a la adquisición del conocimiento, donde el propósito de la matemática educativa es la de esclarecer y evidenciar la existencia de relaciones entre el conocimiento y prácticas sociales, es decir, enfatizar la componente social sistemáticamente con otras dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica del conocimiento matemático. La aproximación socioepistemológica, es el resultado de la conjunción de estas dimensiones, como marco teórico, en particular en este trabajo, mostramos el papel de la interpolación y la predicción en el Cálculo con énfasis en la matematización del movimiento, el binomio de Newton y la serie de Taylor con la finalidad de relacionar el conocimiento matemático y las prácticas sociales en tanto unidad de análisis.

La interpolación en diferentes actividades humanas

A continuación se describen diferentes actividades humanas de la actualidad, donde aparece la noción de interpolación, posteriormente se hace un análisis de cómo emerge implícitamente la interpolación y predicción en el movimiento.

El término de interpolación aparece de diferentes maneras, en la vida cotidiana, en el arte, en la física, en la matemática. Con frecuencia se encontrará que se tiene que estimar o predecir valores intermedios entre datos definidos por puntos, a este proceso recibe el nombre de interpolación. En matemáticas aparece como interpolación polinomial, donde consiste en determinar el polinomio único de n -ésimo grado que ajuste $n+1$ puntos. Este polinomio entonces proporciona una fórmula para calcular los valores intermedios: por ejemplo si la interpolación es lineal se tiene la predicción intermedia entre dos valores o estados de un fenómeno natural. Si la interpolación es cuadrática se tiene valor estimado o la predicción de un valor entre tres valores o estados de un fenómeno natural. Por ejemplo en estadística la interpolación aparece, cuando se tiene un censo de una población, donde las variables son: el número de habitantes y el año, por ejemplo de 1940 a 1990, podríamos preguntarnos, si es posible utilizarlos para obtener una estimación razonable de la población que habría en 1965, e incluso en el año 2000, este tipo de predicciones puede obtenerse por medio de una función que corresponda a los datos disponibles. Este proceso recibe el nombre de interpolación (Burden & Faires, 1980).

La interpolación de forma, se dibuja una forma en un punto del tiempo y se cambia o se dibuja una nueva en otro punto. Al interpolar formas se crea un efecto similar al de transformación y las formas parecen cambiar en el transcurso del tiempo. La animación interpolada es una forma eficaz de crear movimiento y cambios a lo largo del tiempo y de reducir al mínimo el tamaño del archivo. Al contrario de la animación imagen a imagen, sólo necesita almacenar los valores de los cambios de la imagen, no la imagen completa.

La interpolación en las mediciones de temperaturas y precipitaciones son las medias mensuales de temperatura (máxima, mínima y media) y precipitaciones. La disminución del número de estaciones reduce la calidad de las interpolaciones y esta variación en el número de puntos puede introducir movimientos irreales en las series temporales de los campos generados, con independencia del método de interpolación que se utilice; así los campos interpolados con menos estaciones no serán capaces de captar todas las características espaciales del fenómeno. Este inconveniente hizo necesario que se utilizara una estrategia para garantizar que los campos de temperatura y precipitación interpolados, este método se denomina Interpolación Climatológicamente Asistida (ICA), parte de la idea de realizar la interpolación, separando las componentes espaciales y temporales.

La reconstrucción de una señal a partir de sus muestras usando interpolación es un proceso de empleo común en la reconstrucción aproximada o exacta de una señal a partir de sus muestras. Para una señal de banda limitada, si los instantes de muestra están bastante cerca, entonces la señal puede reconstruirse exactamente, es decir, mediante el empleo de un filtro se puede efectuar la interpolación exacta entre los puntos de muestreo. La interpretación de la reconstrucción de una señal como un proceso de interpolación se hace evidente cuando se considera el efecto en el dominio del tiempo del filtro.

La utilización de la interpolación como una técnica tiene un amplio espectro de utilización, tanto es así que es reformulada en cada campo que aplica. La interpolación también es

usada en: topografías, tecnologías de comunicación, genética, biotecnologías, reconstrucción tridimensional de imágenes médicas.

Emergencia de la interpolación y predicción implícita

En el siglo XIV, los filósofos del colegio de Merton estudiaron el movimiento de un cuerpo, considerando la variación de la intensidad de las formas y cualidades, en la cual obtienen la regla del grado medio de la velocidad, para relacionar el movimiento uniformemente diforme. Posteriormente Oresme retoma estos estudios para explicar lo cualitativo por lo cuantitativo y construir el teorema del grado medio o velocidad media en forma geométrica (Cantoral, 2001), un triángulo rectángulo o un trapecio, esto es dependiendo del valor de la velocidad inicial y final, si se une el estado inicial y estado final del movimiento se obtiene una línea recta, en consecuencia la velocidad media es la interpolación entre dos estados del movimiento. Por consiguiente Galileo conserva estas ideas de la regla del grado medio y representación geométrica de Oresme para elaborar su ley de caída libre en donde se puede visualizar la interpolación. Galileo en el contexto de su marco epistémico establece una relación funcional entre variables en la cual emerge la noción de variación y predicción de manera implícita, en este momento aparece el germen de la serie de Taylor (Hernández, 2005).

Emergencia de la interpolación y predicción explícita

Posteriormente con el marco epistémico de Newton se vislumbra mucho más las nociones de: variación y predicción, puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (Piaget & García, 1996; Muñoz, 2000; Hernández, 2002). En la investigación de Cantoral (2001) considera la noción de predicción como una práctica social para conocer el movimiento de un flujo de agua a partir de un estado inicial, es decir, que P es un estado inicial y se quiere predecir el estado ulterior $P + PQ$, donde PQ es la variación de un estado a otro, con esta idea y la interpolación Newton descubre su teorema del binomio, el cual es dado como $(P + PQ)^{m/n}$ y utiliza la noción de interpolación, así como las diferencias finitas para construir la serie de Taylor.

Según Edward (1979), Taylor publica su serie, basado en el *argumento de interpolación* de Gregory–Taylor y usando las diferencias finitas se llega a; $y = y_0 + n\Delta y_0 + n(n-1)/2\Delta^2 y_0 + n(n-1)(n-2)/6\Delta^3 y_0 + \dots + n\Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0$. En esencia, Taylor quiso tomar el límite como $\Delta x \rightarrow 0$, cuando, $n \rightarrow \infty$ y x es fija, para construir

$$y = y_0 + (x - x_0) \dot{y}_0 / x_0 + (x - x_0)^2 \ddot{y}_0 / 2(x)^2 + (x - x_0)^3 \dddot{y}_0 / 6(x)^2 + \dots$$

Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada. En síntesis el binomio de Newton y la serie de Taylor son vistas como instrumento de predicción en un contexto de variación.

Situación de Movimiento Uniformemente Acelerado

Siguiendo la idea de la interpolación y de predicción (implícita y explícita) en los estudios de Oresme, Galileo y Newton presentamos situaciones para reconstruir el Cálculo, incorporando aspectos socioepistemológicos.

Suponga que la velocidad de un automóvil es de 20 m/seg, que durante un tiempo ha aumentado hasta 40 m/seg y que necesita 4 segundos para ir de la posición A hasta la posición B ¿Qué aceleración tiene? ¿Cuáles son las velocidades y posiciones del automóvil para 1, 2, 3,4 segundos?

Para calcular la aceleración se utiliza la primera diferencia de las dos velocidades de la forma siguiente: $a = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = 5$, la aceleración es (5m/seg²), y significa que la velocidad aumenta 5m/seg, en cada segundo de tiempo.

El cálculo de la velocidad para cada segundo con aceleración constante es de la siguiente manera: $v_1 = v_0 + a\Delta t = 20m/seg + 5m/(seg)^2(1seg) = 25m/seg$, análogamente se calcula v_2, v_3, v_4 , es decir se predicen las velocidades posteriores si se conoce la velocidad inicial y la variación, en este caso la aceleración es constante.

Para calcular las posiciones del automóvil, con la noción de predicción, partiendo del valor inicial de la posición y la variación en cada segundo de la velocidad a un movimiento uniformemente acelerado:

$$s_1 = s_0 + v_0(\Delta t) = 0 + 20m/seg(1seg) + 5m/seg = 20m$$

De la misma manera se calculan las posiciones $s_2 = 45m, s_3 = 75m, s_4 = 110m$, otra forma de calcular las posiciones anteriores es la siguiente:

$$s_1 = s_0 + v_0(\Delta t) + a_0(\Delta t)^2 = 0 + 20m/(seg)(1seg) + 5m/(seg)^2(1seg)^2 = 25m$$

Como se muestra en la siguiente tabla.

| t (hrs) | S (m) | V(m/seg) | $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = m/s^2$ |
|-----------------------|-------------|------------|-----------------------------------------|
| $t_o = 0$ | $s_o = 0$ | $v_o = 20$ | $a = \frac{v_1 - v_o}{\Delta t} = 5$ |
| $t_o + \Delta t = 1$ | $S_1 = 20$ | $v_1 = 25$ | 5 |
| $t_o + 2\Delta t = 2$ | $S_2 = 45$ | $v_2 = 30$ | 5 |
| $t_o + 3\Delta t = 3$ | $S_3 = 75$ | $v_3 = 35$ | 5 |
| $t_o + 4\Delta t = 4$ | $S_4 = 110$ | $v_4 = 40$ | |

Por lo tanto construimos el binomio de Newton:

$$s_2 = s_1 + v_1\Delta t, \text{ sustituyendo } s_1 = s_0 + \Delta s_0 \text{ y } v_1 = \Delta s_0 + \Delta^2 s_0$$

$$s_2 = s_1 + v_1\Delta t = s_o + 2\Delta s_o + \Delta^2 s_o$$

El polinomio de interpolación de Newton $s_2 = (1 + \Delta)^2 s_o$ es de segundo grado.

Para nuestro problema el polinomio de interpolación como lo escriben Newton – Gregory, para obtener las posiciones es:

$$s_2 = (1 + \Delta)^2 s_o = s_o + k\Delta s_o + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 s_o$$

Donde $k = \frac{t - t_0}{\Delta t} = \frac{t - 0}{1}$, sustituyendo k, $\Delta s_0 = 20, \Delta^2 s_0 = 5$ en la ecuación anterior se

llega a la ecuación cuadrática, en la cual se tiene una relación funcional de posición y tiempo.

$$S(t) = \frac{35}{2}t + \frac{5}{2}t^2$$

Entonces de la primera y segunda diferencias finitas divididas se obtiene el polinomio de interpolación de Newton y la serie de Taylor dado como:

$$s_2 = (1 + \Delta)^k s_0, \text{ haciendo } s_0 = s(t_0) \text{ y cuando } \Delta t \rightarrow 0 \text{ se obtiene } v(t_0) = \frac{\Delta s_0}{\Delta t},$$

$$a(t_0) = \frac{\Delta^2 s_0}{(\Delta t)^2}, \text{ por lo tanto:}$$

$$s(t_0 + k\Delta t) = s(t_0) + v(t_0)(t_k - t_0) + a(t_0)\frac{(t_k - t_0)^2}{2!} + \dots$$

Con el diseño de la situación para el movimiento uniformemente acelerado se obtiene el binomio de Newton y una serie finita de Taylor con exponentes enteros positivos, pero también se puede llegar a obtener el binomio de Newton y la serie infinita de Taylor para fenómenos físicos como: la ley de enfriamiento de los cuerpos, crecimiento de poblaciones.

Conclusiones

Los resultados muestran que tanto la predicción e interpolación emergen como práctica social respectivamente en forma implícita. En el momento en que aparece la interpolación y la predicción implícitamente en las concepciones de los científicos del colegio de Merton, Oresme, Galileo, también surge la noción de modelación, graficación y esto da origen a la matematización del movimiento.

En el marco epistémico de Newton aparece más explícita la noción de predicción e interpolación para descubrir su teorema del binomio, así como en la transición a la serie de Taylor. En esa época obedeció a un programa emergente, como alternativo al campo de la ciencia, en ello buscaban modelar, anticipar, predecir e interpolar un fenómeno natural, por ejemplo el caso de la metáfora del flujo de agua.

Consideramos que la predicción como práctica social y la interpolación son unidades de análisis para reconstruir el Cálculo y Física escolar, en un sentido de interacción de los aspectos matemáticos y fenómenos físicos.

Estos antecedentes proporcionan elementos para un cambio epistemológico del Cálculo escolar a través de una visión Newtoniana-Tayloriana considerando las prácticas sociales de la interpolación y la predicción para reorganizar el Cálculo escolar.

Bibliografía

Alksandrov, A., Kolmogorov, A. y Laurentiev, M. (1976). *La matemática: su contenido, método y significado*. México: Alianza editorial.

Baldor A. *Álgebra* (1988). México: Editorial Publicaciones Culturales.

Benson, H. (1999). *Física Universitaria*. Editorial CECSA, vol. I. México.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. España: Alianza Editorial.

- Burden, R. y Faires, J. (1980). *Análisis Numéricos*. México: Editorial Thomson.
- Buendía, G. y Cordero, F. (2003). Una epistemología del concepto de periodicidad a través de la actividad humana. La predicción como argumento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 16(1), 112-116.
- Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Editorial Aique.
- Edward, C. (1979). *The historical development of the calculus*. Spriger-Verlag New York Inc. USA.
- Hernández, H. (2002). Una epistemología de la matemátización del movimiento: caso de predicción y variación con las diferencias finitas y la serie de Taylor. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17(2), 594-600. Cuba.
- Hernández, H. (2005). Contrastes epistemológicos del binomio de Newton y la serie de Taylor en dos variables en los fenómenos físicos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 523-529. México.
- Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(2), 131-170.
- Piaget, J. & García, R. (1996). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI.
- Zill, D. (1993). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, tercera edición.
- Kuratowski, K (1975). *Introducción al cálculo*. México: Editorial Limusa.