LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Mario Dalcín – Verónica Molfino
Instituto de Profesores Artigas, Uruguay.
filomate@adinet.com.uy – veromol@adinet.com.uy
Campo de investigación: Formación de profesores; Nivel educativo: Medio y Superior

Resumen
Se reporta aquí un minicurso en el que participaron profesores de matemática de Enseñanza Media. Trabajando en un ambiente de Geometría Dinámica se aborda la resolución de problemas que involucran distintas áreas de la matemática: geometría métrica, cálculo diferencial, geometría analítica, álgebra, y que permiten poner de manifiesto la pertinencia y relevancia –así como señalar sus peculiaridades- del ambiente dinámico en la construcción del conocimiento matemático por parte de los participantes y a su vez discutir su papel en el trabajo con estudiantes.

Introducción

Las reformas de los planes de estudio de matemática que se han ido dando en los últimos años coinciden en señalar la relevancia de usar tecnología en el aprendizaje de la matemática. El amplio desarrollo y difusión de tecnología, en especial de calculadoras gráficas y de programas de Geometría Dinámica (GD), no sólo ha producido cambios en el tipo de tareas a plantear a los estudiantes sino también en el papel que deberán asumir profesores y estudiantes a lo largo del desarrollo de la clase.

Marco teórico

La forma de funcionamiento del ambiente dinámico "proporciona a los estudiantes una herramienta para la validación de las propiedades que pueden percibirse en la pantalla: una propiedad será probablemente cierta sólo si se mantiene válida mientras se arrastran los puntos básicos de la construcción. En otras palabras, una propiedad geométrica 'es un invariante perceptual'." (Balacheff, 2000) Esto implica un desfio: Si la demostración es vista sólo como verificación de algo que mediante la GD resulta obviamente cierto, es claro que no habrá ningún incentivo en generar una demostración deductiva. Es aquí donde debemos tener presente otras funciones de la demostración: explicación, descubrimiento, comunicación, sistematización, desafío intelectual. (De Villiers, 1993) La convicción de la certeza de una proposición, que bien puede ser facilitada por el análisis de algunos ejemplos y contraejemplos mediante el uso de GD, puede ser el inicio de la búsqueda de una explicación, de aclarar el por qué. (Dreyfus y Hadas, 1996)

Objetivos y metodología de trabajo

En el presente minicurso participaron dieciocho docentes de matemática de Enseñanza Media y que se realizó en el marco de actividades de extensión del Instituto de Profesores Artigas, y constó de cuatro instancias de dos horas de duración. Tuvo como objetivo introducir a los participantes en el manejo y uso de un software de GD (*The Geometer's Sketchpad*) en la resolución de problemas y su fundamentación. Los problemas trabajados contemplan distintas áreas de la matemática (geometría métrica, álgebra, geometría analítica, cálculo infinitesimal) presentes en la Enseñanza Media. Los profesores participantes trabajaron en parejas y frente a cada actividad (diez en total) tuvieron que generar un modelo dinámico que diera cuenta de la situación planteada, formular una conjetura y luego elaborar una demostración que al finalizar se entregaba por escrito a los impartidores del mincurso. Al finalizar cada actividad se colectivizaban las distintas formas de generar el modelo dinámico así como las demostraciones elaboradas por las distintas parejas. Quienes dictábamos el minicurso hicimos una presentación inicial de las herramientas básicas del software y de su manejo. Durante las actividades orientábamos a los docentes en el uso del software así como tomábamos nota de aspectos que nos parecían relevantes en cuanto al proceder de los docentes.

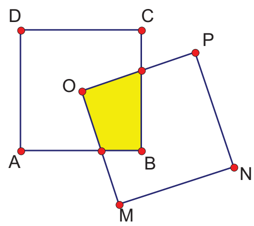
Algunos resultados

Reportamos a continuación lo producido por el colectivo de docentes en torno a tres de las actividades.

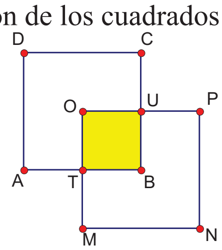
Actividad 1: Cuadrados superpuestos

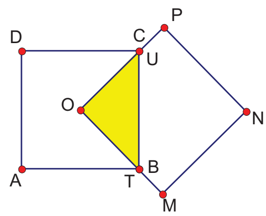
El cuadrado ABCD tiene centro O. El cuadrado OMNP es igual al anterior, su vértice O es fijo y los restantes móviles. ¿Cuándo el área de la zona en que dichos cuadrados se superponen es mínima?

Un primer desafío para los participantes es hacer una construcción en *The Geometer's Sketchpad* que corresponda a la situación planteada. Las construcciones en GD necesariamente implican la elaboración de una estrategia previa que tenga en cuenta por un lado las características del software y por otro las necesidades del problema a resolver.



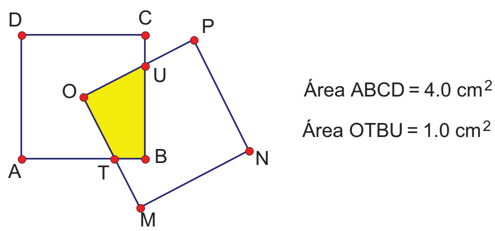
Una vez hecha la construcción se puede *arrastrar* el cuadrado OMNP y percibir en pantalla que en algunas posiciones especiales el área de la zona resultante de la superposición de los cuadrados es l/4 del área de los cuadrados originales.



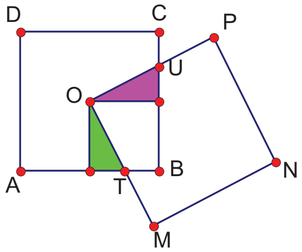


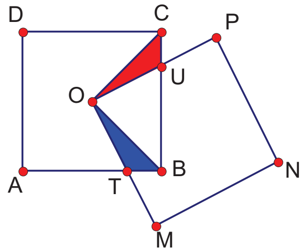
¿Habrá alguna posición donde dicha área sea menor?

Podemos ahora hallar el área tanto de la zona que queremos minimizar como del cuadrado original. Observamos que a pesar de hacer variar el segundo cuadrado las áreas se mantienen constantes.



¡Pero entonces el área de la zona de superposición de los cuadrados es constante!
Surge ahora la necesidad de encontrar una explicación para esta sorpresa. Ya tenemos una demostración para dos posiciones particulares. ¿Podremos construir un argumento que de cuenta de la situación general?
Presentamos dos posibles demostraciones visuales que surgieron en el minicurso:



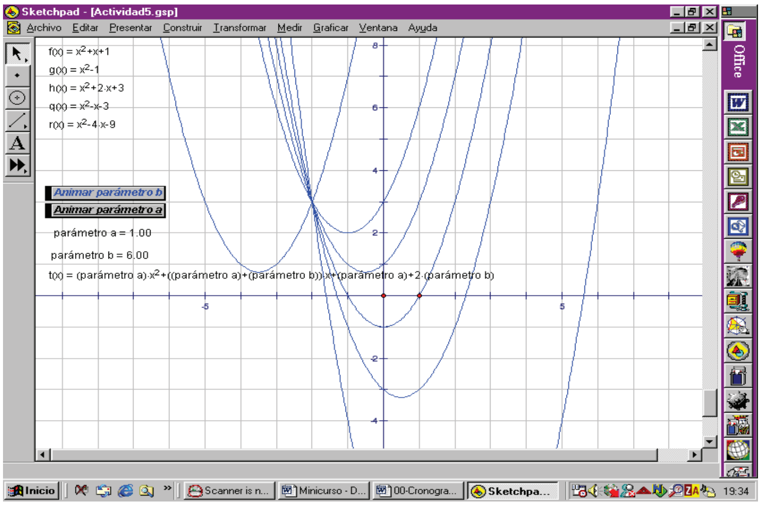


Actividad 2: Familias de funciones cuadráticas
Examine las cinco funciones de la familia A.
(a) Puede pensar en más funciones que, en su opinión, pertenezcan a la misma familia?
(b) Puede encontrar una relación común entre los coeficientes de esta familia de funciones?
(c) Puede conjeturar una relación entre los gráficos de esta familia de funciones?
(d) Chequee su conjetura graficando las cinco funciones en los mismos ejes con Sketchpad. ¿Qué observa?
(e) ¿Puede demostrar su conjetura?

Familia A	Familia B	Familia C	Familia D
$y = x^2 + x + 1$	$y = 2x^2 + 2x + 2$	$y = -x^2 - x - 1$	$y = -4x^2 - 4x - 4$
$y = x^2 - 1$	$y = 2x^2 + 3x + 4$	$y = -x^2 + x + 3$	$y = -4x^2 - 3x - 2$
$y = x^2 + 2x + 3$	$y = 2x^2 + x$	$y = -x^2 + 1$	$y = -4x^2 + 4$
$y = x^2 - x - 3$	$y = 2x^2 - 2$	$y = -x^2 - 2x - 3$	$y = -4x^2 - 2$
$y = x^2 - 4x - 9$	$y = 2x^2 + 5x + 8$	$y = -x^2 - 3x - 5$	$y = -4x^2 - 5x - 6$

Los participantes iniciaron el trabajo representando gráficamente cada una de las funciones cuadráticas que componen cada familia. A partir de lo observado en los gráficos conjeturan que todas las parábolas de la familia A pasan por el punto de coordenadas (–2,3). ¿Cómo probarlo? Hay parejas que sustituyen los valores –2 y 3 en cada una de las ecuaciones de las parábolas; otras optan por hallar los puntos de intersección de dos de las parábolas obteniendo como solución el punto (–2,3) y a continuación proceden como las parejas anteriores. Surge la observación –hecha a partir de la tabla entregada– que todas las parábolas de la familia A tienen coeficiente principal 1. Algunas parejas afirman que todas las funciones cuadráticas son de la forma $y = 1.x^2 + (1 + b)x + (1 + 2b)$ siendo b un parámetro que toma distintos valores según el caso (0, -1, 1, -2, -5 respectivamente). Dicha conjetura es puesta a prueba en *Sketchpad* creando una familia de funciones cuadráticas dependientes de un parámetro, graficándola y animando el parámetro, lo que permite observar en pantalla una familia de funciones cuadráticas pasando por el punto (–2,3). Nuevamente se plantea la cuestión de cómo demostrarlo. Se resuelve indagar si el punto (–2,3) verifica la ecuación $y = 1.x^2 + (1 + b)x + (1 + 2b)$ para todo valor del parámetro b. La respuesta obtenida es afirmativa.

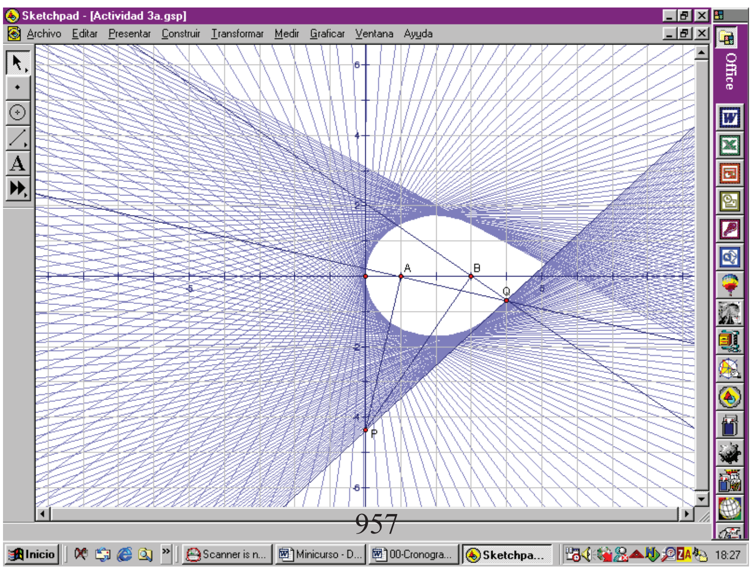
Un trabajo similar se hace con las familias B, C y D. ¿Habrá una expresión que de cuenta de las cuatro familias a la vez? Se pone así en marcha un nuevo trabajo de búsqueda, formulación de conjeturas, verificación de dichas conjeturas en ambiente dinámico, y reformulación de conjeturas (en caso de que no superaran la verificación empírica en *Sketchpad*) o la búsqueda de una demostración matemática. Se llega a la conclusión que todas las familias responden a una expresión del tipo $y = a.x^2 + (a + b)x + (a + 2b)$ siendo a y b parámetros.



Actividad 3: Familias de rectas

(a) Se consideran A(1,0), B(3,0) y P variable en el eje y. (a) ⊥ (AP) por A, (b) ⊥ (BP) por B, (a) ∩ (b) = {Q}.
i) Estudiar las rectas (PQ).
ii) (s) ⊥ (AP) por P. Estudiar las rectas (s).
iii) ¿Y si B(-3,0)?

Luego de construir en *Sketchpad* un modelo que diera cuenta de la situación planteada se activó la traza de la recta PQ y animó el punto P, pudiendo observar en pantalla el comportamiento de dichas rectas:



Las preguntas más frecuentes que se hicieron las parejas de profesores: ¿Envuelven dichas rectas una elipse? ¿Una circunferencia tal vez?
Para salir de dudas se hizo necesario recurrir a la geometría analítica. Trabajando ahora en lápiz y papel asignan las coordenadas (0,k) al punto P y a partir de dicho parámetro k hallan las coordenadas (4,3/k) para el punto Q. La recta PQ tiene ecuación $(3 - k^2)x - 4ky + 4k^2 = 0$. Ordenando dicha ecuación en el parámetro k se tiene: $(4 - x)k^2 - 4yk + 3x = 0$. Al hacer cero el discriminante de esta ecuación se tiene: $(-4y)^2 - 4(4 - x)(3x) = 0$, equivalente a $3x^2 - 12x + 4y^2 = 0$. Queda claro ahora que no se trata de una circunferencia sino de una elipse. ¿Cuáles son sus vértices y sus focos? Observando la animación dinámica los vértices del eje mayor son (0,0) y (4,0). ¿Cómo verificarlo analíticamente? Se resuelve transformar la ecuación obtenida y expresarla en la forma $(x - 2)^2 /4 + y^2 /3 = 1$. Su centro es (2,0), los vértices sobre el eje mayor son los previstos, y se pueden hallar los vértices sobre el eje menor para los que no se tenía mayor información salvo que sus ordenadas tomaban valores entre 3/2 y 2 o entre –3/2 y –2): son $(2,\sqrt{3})$ y $(2, -\sqrt{3})$.
En la parte ii) de la actividad se siguió un tratamiento similar al de la parte i).
La parte iii) permitió, sin tener que volver a hacer una construcción sino simplemente cambiando las coordenadas del punto B en el archivo dinámico creado previamente, observar el comportamiento de las rectas PQ en la nueva situación. Se conjeturó que envolvían una parábola y se elaboró una demostración para ello.

(b) Estudiar el comportamiento de las rectas

$$(a_m): (m + 1)x + (3m - 2)y + 2m = 0$$
$$(b_m): (m^2 - 1)x - 2my + (1 + m^2) = 0$$

Estamos frente a familias de rectas que dependen de un parámetro de primer o segundo grado. Se nos presenta ahora la situación inversa a la vista anteriormente. *Sketchpad* permite graficar funciones que dependen de uno o más parámetros. ¿Pasarán las rectas por un punto fijo al variar el parámetro? ¿Serán todas paralelas? ¿Ni paralelas ni concurrentes? ¿Para todo punto del plano encontraremos una recta de cada familia? ¿En qué puntos si y en cuáles no? Una aproximación a las respuestas de estas cuestiones la podremos obtener analizando el gráfico de cada familia de rectas a medida que hacemos variar el parámetro. Se hace imprescindible trabajar en lápiz y papel a la hora de buscar una explicación para lo observado.

Conclusiones

Al finalizar el minicurso los participantes valoraron como muy positivo haber participado en el mismo (para muchos era la primera vez que trabajaban en un ambiente dinámico), al cual nunca se habían acercado por considerarse inoperantes en cuestiones informáticas o porque en algunos intentos se habían visto imposibilitados de comprender el funcionamiento de las herramientas básicas del software.
Todas las parejas fueron capaces de construir archivos dinámicos que dieran cuenta de las situaciones planteadas en las actividades. El trabajo en un ambiente de GD permitió a los participantes experimentar y examinar relaciones matemáticas desde diversos ángulos y perspectivas. El uso de este tipo de recursos posibilitó que los profesores pudieran visualizar el problema de varias maneras mediante representaciones que incluyeron el uso de mediciones (de distancias, áreas o ángulos), tablas, funciones, familias de funciones y sus gráficos.
El trabajo en un ambiente dinámico se mostró fructífero a la hora de formular conjeturas facilitando el descartar una conjetura por falsa o posibilitando el paso a un trabajo en

lápiz y papel en busca de la elaboración de una demostración que explicara la conjetura formulada.

Referencias

Balacheff, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, pp. 93-108. Barcelona, España: ICE de la Universidad de Barcelona y Editorial Graó.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon, 26*, pp. 15-30.

Dreyfus, T. y Hadas, N. (1996). Proof as answer to the question why. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 28 (1)*, pp. 1-5.

Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad* (Software). U.S.A.: Key Curriculum Press.