GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS : UN ACERCAMIENTO CON TECNOLOGÍA DIGITAL

Edison De Faria Campos[1]
Universidad de Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr

Campo de Investigación :Pensamiento geométrico; Nivel Educativo: Medio y Superior

Resumen

En este curso corto utilizamos distintas aplicaciones de geometría dinámica para realizar construcciones geométricas en el modelo de Poincaré para geometría hiperbólica con el propósito de investigar y determinar la naturaleza de algunos teoremas de geometría para la enseñanza secundaria y superior. De esta forma clasificamos algunos de los teoremas de geometría plana como neutrales, estrictamente euclidianas o estrictamente hiperbólicos.

Introducción

La National Council of Teachers of Mathematics en los estándares de evaluación y currículo para la enseñanza de las matemáticas en la enseñanza media propone como objetivo enseñar la geometría para "desarrollar la comprensión de un sistema axiomático mediante la investigación y la comparación de geometrías no euclidianas con la euclidiana" (NCTM, 1989). Por un lado, el carácter extraño y no intuitivo de las geometrías no euclidianas ayudan a los estudiantes a percibir la diferencia entre definiciones y teoremas usados en geometría. Por otro lado, descripciones no euclidianas del mundo físico, utilizadas por ejemplo en la teoría de la relatividad y en las investigaciones sobre fenómenos ópticos y sobre la propagación de ondas, se revelaron bastante adecuadas.
En este curso analizamos algunos teoremas en geometría plana para determinar si dependen o no del quinto postulado de Euclides. La geometría que se desarrolla sin recurrir a este postulado se conoce como neutral y los teoremas neutrales son válidos tanto en la geometría euclidiana como en las no euclidianas. Los teoremas que utilizan el quinto postulado – directa o indirectamente - son estrictamente euclidianos y los que usan una negación del postulado en mención son estrictamente no euclidianos (hiperbólicos o elípticos). Utilizamos algunos programas de geometría dinámica que nos permitieron conjeturar acerca de la naturaleza de los teoremas que analizados. También determinamos los equivalentes a las leyes de seno y coseno para triángulos hiperbólicos y utilizamos la métrica de Poincaré para calcular distancias entre puntos del plano hiperbólico (Coxeter, 1988; Pedoe, 1988; Kimberling, 2003).

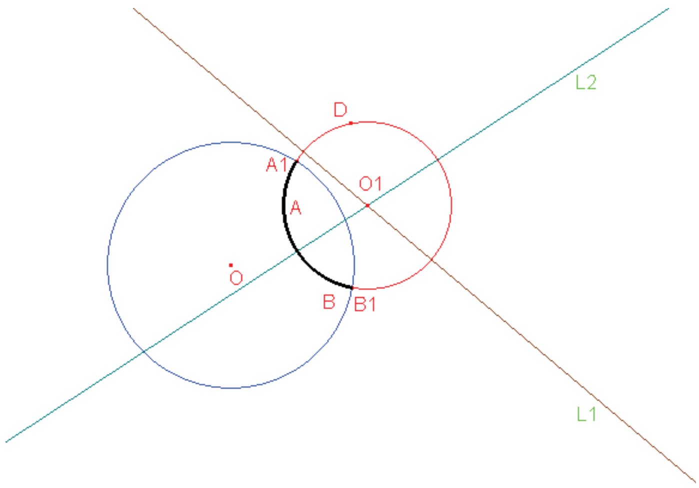
Para la clasificación de los teoremas utilizamos modelos. Para crear un modelo de un sistema axiomático, tenemos que encontrar una interpretación para los objetos del sistema (en nuestro caso de la geometría). Así un modelo es euclidiano si el quinto postulado es verdadero en él. Si un teorema A es verdadero en un modelo de geometría euclidiana y verdadero en un modelo de geometría hiperbólica entonces podemos concluir que el teorema es neutral. Si un teorema B es verdadero en un modelo de geometría euclidiana y falso en un modelo de geometría hiperbólica entonces el teorema

[1] Asociación de Matemática Educativa, ASOMED
Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, CIMM

es estrictamente euclidiano. Si un teorema C es falso en un modelo de geometría euclidiana y verdadero en un modelo de geometría hiperbólica entonces es estrictamente hiperbólico. Existen varios modelos para la geometría hiperbólica, siendo más conocido y utilizado el que propuso el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912).

El disco de Poincaré

La inversión de un punto P en un círculo C centrado en O con radio r, °(O,r), es el punto Q en la línea OP tal que $\overline{OP}.\overline{OQ} = r^2$ si $P \neq O.$ Dado el círculo °(O,r) (disco de Poincaré), sean A y B dos puntos distintos en el interior del círculo. Sean D la inversa de A en °(O,r), L_1 mediatriz (euclidiana) del segmento AD y L_2 mediatriz (euclidiana) del segmento AB. Sean $O_1 = L_1 \cap L_2$, C_1 el círculo de radio $r_1 = \overline{O_1A}$ centrado en O_1, A_1, B_1 puntos de intersección de C con C_1. Entonces la recta hiperbólica por A y B es el arco $\widehat{A_1ABB_1}$.



Existen dos tipos de rectas en este modelo:

1. Todo diámetro del disco de Poincaré, excluyendo los puntos que se encuentran en la frontera es una recta hiperbólica.
2. Si C_1 es un círculo euclidiano ortogonal al disco de Poincaré, entonces los puntos de C_1 que se encuentran en el interior del disco de Poincaré (arco de circunferencia) también es una recta hiperbólica.

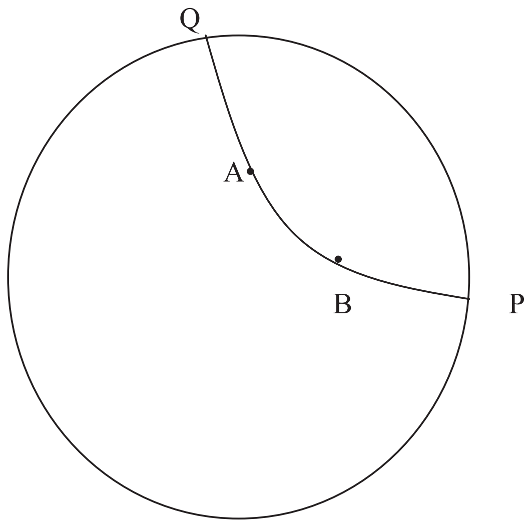
En este modelo los puntos son interpretados como aquellos puntos euclidianos que se encuentran en el disco de Poincaré. En este disco decimos que dos rectas son paralelas si ellas no poseen un punto en común. En la geometría hiperbólica reemplazamos el quinto postulado por el siguiente:

Postulado de paralelas hiperbólicas: Si L es una recta y P un punto exterior a L, entonces existen por lo menos dos rectas que pasan por P y que son paralelas a L.

En realidad, en este modelo dado una recta y un punto exterior a ella, existen infinitas rectas que pasan por el punto y que son paralelas a la recta dada. Así existen infinitas rectas que pasan por un punto exterior a una recta dada y que son paralelas a la misma.

La distancia (hiperbólica) entre los puntos A y B en el disco de Poincaré se define como:

$$d(A,B) = \left| \ln \left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \right) \left(\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} \right) \right|$$



P, Q representan los puntos de intersección de la recta hiperbólica que contiene A, B y la frontera del disco de Poincaré. En realidad P y Q son puntos en el infinito. AQ, BQ, BP y AP son distancias euclidianas.

Si dos rectas hiperbólicas se cortan, el ángulo entre ellas se define como el ángulo entre las rectas euclidianas que son tangentes a las rectas hiperbólicas en el disco de Poincaré. Si las rectas son diámetros en el disco de Poincaré entonces la medida del ángulo coincide con la medida euclidiana del ángulo central formado por los diámetros. Si una de las rectas es un arco de circunferencia euclidiano, la medida del ángulo es la medida del ángulo euclidiano entre las tangentes a las rectas en el punto de intersección.

Si PQ es perpendicular a una recta hiperbólica L en el punto Q y PR es la paralela asintótica a L que pasa por P, entonces el ángulo $\hat{Q}\mathrm{P}R = \theta$ se denomina ángulo de paralelismo para la longitud PQ.

Dado un punto A en el interior del disco de Poincaré y R positivo, el lugar geométrico de un punto P cuya distancia hiperbólica al punto A es R se denomina circunferencia hiperbólica con centro A y radio R. Existe una única circunferencia hiperbólica con centro dado y que pasa por un punto dado.

Para clasificar los teoremas utilizamos los programas Geometer Sketchpad, Cabri Geometry y NonEuclid (http://math.rice.edu/~joel/NonEuclid/). Este último es gratuito relativamente pequeño e independiente de la plataforma utilizada, pues fue desarrollado en Java.

Actividades desarrolladas

Algunas de las actividades utilizadas para experimentar, conjeturar y argumentar sobre los teoremas investigados fueron:

1. Construcción de un cuadrilátero de Lambert.

Construimos en el disco de Poincaré un cuadrilátero con tres ángulos rectos y conjeturamos sobre el cuarto ángulo del cuadrilátero y sobre las longitudes de sus lados. Concluimos que no existían rectángulos hiperbólicos.

2. La suma de los ángulos de una región triangular.

En esta actividad verificamos que en la geometría hiperbólica, la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180 grados. También argumentamos que si el área del triángulo disminuye entonces la suma de los ángulos de la región triangular aumenta acercándose a 180 grados cuando el área del triángulo se acerca a cero.

3. Segmentos que unen los puntos medios de un cuadrilátero.

Verificamos si los segmentos que unen los puntos medios de los lados de un cuadrilátero forman o no un paralelogramo.

4. Teorema de Pitágoras.

La actividad consistió en averiguar si el teorema de Pitágoras era verdadero o falso en la geometría hiperbólica. Al concluir que este es un teorema estrictamente euclidiano verificamos su equivalente en geometría hiperbólica. Utilizando el Geometer Sketchpad logramos comprobar que si el triángulo rectángulo hiperbólico ABC tiene ángulo recto en C, entonces $\cosh c = \cosh a \cosh b$.

5. Elementos en un triángulo.

Unimos los puntos medios de dos lados del triángulo y determinamos si este segmento era paralelo al tercer lado. También verificamos si existe alguna relación entre la medida del segmento que une los puntos medios y la medida del tercer lado del triángulo. Concluimos que el teorema respecto al paralelismo estrictamente Euclidiano. Hicimos lo mismo con el teorema para las medidas de los elementos analizados.

6. Triángulo inscrito en un semicírculo.

Verificamos que un triángulo inscrito en un semicírculo y con un lado sobre el diámetro del semicírculo no es rectángulo.

7. Bisectrices de los ángulos de un triángulo.

Construimos un triángulo arbitrario y sus bisectrices. Verificamos si éstas se intersecan en un punto común. Posteriormente verificamos si este punto común es el centro de un círculo inscrito en el triángulo.

Repetimos el procedimiento anterior con las alturas, las mediatrices y las medianas del triángulo.

Una pregunta importante en esta actividad fue: ¿Siempre podemos construir un círculo inscrito en un triángulo hiperbólico?

8. Teorema de Napoleón.

Construimos un triángulo arbitrario ABC. Sobre cada uno de los lados del triángulo construimos un triángulo equilátero con su respectivo baricentro. Finalmente construimos el triángulo con vértices en los baricentros y verificamos si el triángulo construido era equilátero.

9. Equivalente a la ley de senos.

Verificamos que para cualquier triángulo hiperbólico UVW se cumple

$$\frac{\sin U}{\sinh u} = \frac{\sin V}{\sinh v} = \frac{\sin W}{\sinh w}$$

10. Equivalente a la ley de cosenos.

Igualmente verificamos que para el triángulo hiperbólico UVW

$$\cosh w = \cosh u \cosh v - \sinh u \sinh v \cos W$$

$$\cos W = -\cos U \cos V + \sin U \sin V \cosh w$$

Clasificación de algunos teoremas.

A partir de las actividades realizadas logramos clasificar algunos teoremas enumerados a seguir:

En geometría hiperbólica

1. Si una recta interseca a una de dos rectas paralelas entonces ella no necesariamente interseca a la otra.
2. Si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas entonces ella no necesariamente es perpendicular a la otra.
3. La suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que 180.
4. La suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero convexo es menor que 360.
5. No existen rectángulos.
6. El cuarto ángulo de un cuadrilátero de Lambert es agudo.
7. La medida del lado del cuadrilátero de Lambert que se encuentra entre dos ángulos rectos es menor que la medida del lado opuesto.

Otros resultados importantes encontrados fueron:

1. El teorema de Pitágoras es estrictamente euclidiano.
2. El teorema de Viviani es estrictamente euclidiano.
3. La suma de los ángulos en un cuadrilátero convexo es igual a 360 grados es estrictamente euclidiano.
4. Si una recta interseca a uno de dos rectas paralelas entonces interseca a la otra es estrictamente euclidiano.
5. Todo segmento tiene exactamente un punto medio es neutral.
6. Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz es neutral.
7. La desigualdad triangular es neutral.
8. Si dos lados de un triángulo son congruentes entonces los ángulos opuestos a los lados son congruentes es neutral.

Bibliografía

Coxeter, H. (1988). *Fundamentos de geometría*. (2da. ed.). México: Limusa.

Kimberling, C. (2003). *Geometry in action*. USA: Key Collage Publishing.

NCTM (1989). Currículo and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Pedoe, D. (1988). *Geometry: A comprehensive course*. New York, USA: Dover Publications, Inc.