

## LA MATEMÁTICA COMO HERRAMIENTA DE MODELIZACIÓN PARA DAR RESPUESTA A SITUACIONES PROBLEMA

Isabel Dorado Auz, José Luis Díaz Gómez  
 Universidad de Sonora  
 auz3@correom.uson.mx, jdiaz@gauss.mat.uson.mx

México

**Resumen.** Se presenta un avance de un proyecto de trabajo docente que tiene como objetivo implementar un Recorrido de Estudio e Investigación en la carrera de Químico Biológicas. Se abordan algunas modificaciones que se han propuesto a los procesos de enseñanza y aprendizaje desde la perspectiva de la resolución de situaciones problema. Se plantea lo útil que puede ser la modelización para resolver problemas del área de Ciencias Químico-Biológicas, mediante el uso del cálculo, en la Universidad de Sonora. Se resalta la importancia de contar con la Teoría Antropológica de lo Didáctico como el marco teórico de referencia, al mismo tiempo, se recomienda iniciar la transformación del proceso pedagógico, para darle respuesta a uno de los problemas mayores de la matemática planteado por Freudenthal.

**Palabras clave:** modelización matemática, teoría antropológica de lo didáctico

**Abstract.** We report the progress of a project of teaching work which aims to implement a Study and Research Course in Chemical Biology Career. It addresses some modifications have been proposed to the teaching and learning processes from the perspective of problem solving situations. Arises how useful it can be to solve modeling problems in the area of Chemical and Biological Sciences, through the use of calculus, at the University of Sonora. The Anthropological Theory of Didactics will be the framework reference. So, this is the beginning of pedagogical processes to give answer a one of the great problems of the mathematics raised by Freudenthal.

**Key words:** mathematical modeling, anthropological theory of didactics

### Introducción

Desde los 1970's se intentó modificar los procesos de enseñanza y aprendizaje retomando la resolución de problemas como herramienta y motivo para enseñar y entender mejor las matemáticas. Esto se hizo por dos vías: la resolución de problemas, donde se ponía atención al uso de estrategias heurísticas para resolver problemas matemáticos puros y la modelación matemática y sus aplicaciones, para resolver un tipo particular de problemas generados en situaciones del mundo real (Voskoglou, 2011).

### Modelización matemática

García (2011) nos dice que los procesos de modelización matemática han ocupado un papel central en la investigación en educación matemática desde una faceta dual: como herramienta didáctica para la enseñanza de las matemáticas y como objeto de enseñanza y aprendizaje. La Teoría Antropológica de lo Didáctico describe los “procesos de modelización” como procesos de reconstrucción y articulación de praxeologías de complejidad creciente (puntuales→locales→regionales), los cuales deben comenzar a generarse a partir del cuestionamiento sobre las *razones de ser* de las organizaciones matemáticas que se desean

reconstruir y articular. Además, Esta línea de trabajo es claramente convergente con el tipo de actividades y competencias matemáticas que evalúa la OCDE mediante las dos ediciones del informe PISA (OECD, 2006) y que designa con el término de “matematización”, (Fonseca, Bosch y Gascón, 2009). Se puede decir que el proceso de modelización matemática abarca cinco estados principales (Voskoglou, 2011):

1. Análisis del problema, comprender los requerimientos del sistema real y sus restricciones.
2. La matematización, que involucra la formulación de la situación real y la construcción del modelo.
3. Solución del modelo, a través de manipulación matemática.
4. Validación del modelo, cuando da una predicción confiable del comportamiento del sistema
5. La implementación del resultado matemático final en el sistema real.

La modelización proporciona al alumno una mejor aprehensión de los conceptos matemáticos y los capacita para leer, interpretar, formular y resolver situaciones problema, así como despertar el sentido crítico y creativo (Hein y Beimbengutt, 2006).

### **Situación actual de la modelización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**

Barquero, Bosch, y Gascón (2010) proponen que la modelización matemática no solo debe enseñarse en las carreras de ingeniería, sino que podría tener un gran impacto para los estudiantes de Ciencias Experimentales (CCEE), aunque reconocen que la modelización matemática se mantiene como una aspiración utópica que rara vez logra implementarse en las aulas. Proponen una visión más instrumental de las matemáticas como herramienta de modelización, integrando así en el proceso de estudio la actividad de modelización matemática y las cuestiones extramatemáticas que la generan. Recomiendan, también, que deben tomarse en consideración dimensiones del problema didáctico que han sido relativamente ignoradas y que incluyen: la ampliación del planteamiento clásico del problema en torno a la modelización matemática; la integración de la modelización matemática en un modelo epistemológico general de las matemáticas; la ampliación del espacio institucional tradicionalmente reservado a la didáctica de las matemáticas: la dimensión ecológica del problema; y la formulación del problema didáctico de la enseñanza de la modelización matemática en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, TAD, (Barquero, Bosch, y Gascón, 2011).

### Problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la modelización

Al analizar el programa del curso de introducción al cálculo diferencial e integral de la carrera de Químico-Biólogo se encontró que los objetivos de la asignatura, justifican el diseño del programa en base a un doble propósito: por un lado el de proporcionar a los estudiantes una formación matemática básica y, por otro, el de introducir a los estudiantes en la modelización matemática aplicada a la especialidad científica correspondiente. Sin embargo, la parte que hace referencia a la modelización matemática se plantea siempre con posterioridad y como una consecuencia (o aplicación) de lo que se presenta como la formación matemática básica. Hoy en día, se busca reformular los objetivos en términos de capacidades y competencias a desarrollar, por lo que se hará más referencia al *uso de las matemáticas* dentro del estudio de cada disciplina.

Hein y Beimbengutt (2006) señalan que la principal dificultad que presenta la modelización está centrada en la formación de los profesores y en la falta de vivencia del alumno en un trabajo de esta naturaleza. Se trata, dice Cruz (2010), que frente a los nuevos retos, en cierto sentido, los docentes dejen de lado los roles tradicionales: monopolizador del saber, trasmisor de conocimientos, controlador del trabajo de los estudiantes y único organizador del currículo, y sustituirlos o superponerlos con los de: diagnosticador, especialista en recursos, clarificador de valores, investigador, promotor de la investigación contextualizada y organizador de equipos de producción. En mi opinión, la modelización da respuesta a uno de los problemas mayores enunciados por Freudenthal (1981), crea contextos convenientes para enseñar a matematizar y, por tanto, tendrá aplicación en el desarrollo profesional del Químico-Biólogo.

### La enseñanza del cálculo

Courant y Robbins (1996), nos dicen que durante el siglo XVII y gran parte del siglo XVIII, en el análisis matemático, el ideal griego de razonamiento claro y riguroso parecía haber sido descartado. La “intuición” y el “instinto” de un pequeño grupo de hombres extremadamente competentes reemplazaban a la razón en muchos aspectos. Por ello, se pensaba generalmente que una presentación clara de los resultados del cálculo no solo era innecesaria sino imposible. De igual forma, Artigue (1995) agrega que se ha aceptado el hecho de que es imposible enseñar de golpe los saberes del cálculo bajo su forma definitiva, por lo que se opta por una aproximación intuitiva que pretende darle significado al cálculo por medio de la selección de problemas. Menciona, sin embargo, que la enseñanza tradicional del cálculo y específicamente la enseñanza universitaria tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica y se evalúan, en esencia, las competencias adquiridas en este dominio. La autora afirma que, producto de lo anterior, se han desarrollado investigaciones didácticas centradas en el campo conceptual del cálculo y también se han generado proyectos de innovación de la enseñanza, lo cual incluye el uso de nuevas

tecnologías. Sin embargo, ambos esfuerzos han tomado rumbos distintos y están lejos de establecer vínculos estrechos.

### El concepto de función

El concepto de función ocupa un lugar primordial en el currículum, ya que es fundamental para otros conocimientos, incluso en otras disciplinas. Sin embargo, este concepto se limita a ser representado a través de una fórmula, una tabla o una gráfica sin articulación entre ellos, y no representa aprendizajes significativos para el estudiante. En este trabajo se pretende que la noción de función sea tratada desde otra perspectiva, haciendo que la modelización adquiera un estatus diferente, en el cual se le reconozca como que “es todo aquello que es utilizado para entender, predecir o intervenir el comportamiento de un fenómeno, en el cual se incluyen contextos gráficos, numéricos, algebraicos, entre otros” (García, 2007, p.3). En consecuencia, pretendemos que los estudiantes, a través de la modelización, logren re significar la noción de función al trabajar con una problemática que presente una situación cotidiana para ellos. Esto requiere otorgarle otro estatus a la modelización, es decir, la modelización ya no es una representación del concepto, sino que se hace parte del argumento del concepto de función como algo propio.

### La función exponencial y la modelización

El interés principal en el trabajo es el de desarrollar el enorme potencial de la función exponencial como modelo matemático para resolver problemas relacionados con el crecimiento de la E. coli así como el combate a una posible infección. Para el estudio de la función exponencial se requerirá que otros significados sean retomados o generados: razón de cambio, covariación y crecimiento (Vargas, 2011), con lo cual el estudiante podrá valorar el enorme potencial de la función exponencial como modelo matemático.

La modelización, como una herramienta potente para el estudio escolar de las matemáticas, puede ser sumamente útil si se acompaña de una renovación general de los instrumentos del trabajo matemático a partir de las nuevas tecnologías de la información. De hecho, Yves Chevallard y colaboradores han propuesto un nuevo dispositivo didáctico, llamado Recorrido de Estudio e Investigación (REI), dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, donde se pone en operación la modelización matemática con un fin claramente pedagógico (Fonseca, 2011).

### Los recorridos de estudio e investigación

El Recorrido de Estudio e Investigación, sitúa la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. Se admite, en efecto, que *toda* actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo *único*, que se resume en esta teoría con la palabra de *praxeología* (Chevallard, 1999). Toda actividad matemática institucional puede modelizarse

mediante la noción de praxeología (u organización) matemática. En las praxeologías (Chevallard, Bosch, y Gascón, 2007) es posible distinguir dos componentes principales, interrelacionados: la **praxis o parte práctica** (los tipos de tarea y las técnicas utilizadas), y el **logos o razonamiento humano** (la tecnología, discurso racional que justifica la pertinencia de la tarea concreta, y la teoría, que justifica la producción de la tecnología). En los REI además de primar en todo momento el proceso dinámico, se prioriza el carácter funcional de las matemáticas, situándolo como el corazón de la construcción de la actividad matemática. Además, la herramienta informática tiene un importante protagonismo.

### El trabajo experimental

El programa actual del primer curso de cálculo se puede dividir en cuatro temas: Números Reales, Funciones, Límites y Derivadas, y Aplicaciones de la Derivada. En este trabajo docente tomaremos una sección de un tema, el de funciones y específicamente la función exponencial, para darle viabilidad al objetivo principal del curso, tal como consta en el programa vigente: “*El alumno será capaz de emplear las funciones para modelar fenómenos de Química, Biología, Física y otros relacionados con su carrera...*”. El trabajo consistirá en la implementación de un recorrido de estudio e investigación que tome como base un problema de la vida real, el crecimiento bacteriano, propio del área de Químico Biológicas, como vía para contribuir al desarrollo de las habilidades de los estudiantes en la solución de problemas en la vida fuera del aula. Se tendrá como apoyo la Teoría Antropológica de lo Didáctico y se desarrollará con alumnos del curso Introducción al Cálculo Diferencial e Integral de la Carrera de Químico-Biólogo, que ofrece el Departamento de Ciencias Químico-Biológicas de la Universidad de Sonora.

### Diseño preliminar de REI

En nuestro caso, la intención es que los estudiantes hagan un recorrido de estudio e investigación que les permita encontrar la solución óptima a la cuestión generatriz que da inicio a la investigación. Este dispositivo didáctico comprende los siguientes elementos:

1. Un problema didáctico-matemático al que el sistema de enseñanza tiene que dar respuesta: Introducir las funciones exponenciales a partir de una Cuestión Problemática que surge en la carrera de Químico Biólogo Clínico.
2. Institución concreta en la cual se plantea el problema en cuestión: Departamento de Ciencias Químico-Biológicas (Químico-Biólogo, especialidad análisis clínicos) de la Universidad de Sonora. Asignatura: Introducción al Cálculo Diferencial e Integral.
3. Razón de ser las organizaciones matemáticas

El alumno:

- a) Investigará el potencial de la función exponencial como modelo matemático.
  - b) Investigará sobre la idoneidad de la E. Coli como un microorganismo modelo para extrapolar resultados a otro tipo de infecciones, así como el hacer uso de herramientas tecnológicas para facilitar la solución de situaciones problemas.
  - c) Resolverá, mediante la modelización matemática, como detener una infección por E. coli, bajo diversas posibilidades.
  - d) Evitará el aprendizaje mecánico de cálculos algorítmicos.
4. Cuestión generatriz: Se planteará en función de cómo controlar una infección bacteriana.
  5. Proceso de estudio

### Momento del primer encuentro:

*Se concreta la presentación de la Cuestión generatriz, dando una introducción al tema de estudio.*

La Escherichia coli, bacteria descrita por primera vez en 1885 por Theodore Von Escherich, forma parte de los microorganismos que colonizan el intestino, por lo que se define como un comensal que integra la biota intestinal de diferentes mamíferos, incluido el hombre. Ésta y otras bacterias que colonizan el intestino, son necesarias para el funcionamiento correcto del proceso digestivo, además de participar en la producción de las vitaminas B y K no sintetizadas por el organismo (Eslava, Navarro, Hernández y Salazar, 2013). Sin embargo, varios clones de E. coli son responsables de una diversidad de enfermedades, incluyendo infección del tracto urinario, sepsis/meningitis y diarreas. Esta bacteria es importante porque es el principal organismo modelo de la biología (Iguchi et al., 2009).

### Cuestión Generatriz:

*Ante una infección bacteriana por E. coli ¿qué medicamento hipotético dará mejores resultados: un medicamento A con un factor de efectividad del 75% y que se suministra cada tres horas; un medicamento B con un factor de efectividad del 90% y que se suministra cada 6 horas; o un medicamento C con efectividad de 99.5% y que se suministra cada 24 horas?*

Se plantea un enunciado abierto, sin datos numéricos, rompiendo el contrato didáctico habitual, en el que el profesor siempre da todos los datos necesarios para que el alumno resuelva el problema. Estamos pues ante una tarea matemática «abierta».

### Momento del segundo encuentro:

**Actividad 1.** Si una población de E. coli se duplica cada 20 minutos, ¿en qué momento se tiene una población de 2,000 bacterias?

*Con esta cuestión inicia el momento exploratorio de la técnica y se espera que el estudiante acuda a sus conocimientos de álgebra para darle solución al problema planteado, pero también se inducirá la creación del modelo matemático que representa la situación planteada.*

**Actividad 2.** Recientemente la Organización Mundial de la Salud ha dicho que una mutación de E. coli ha causado la muerte de más de 50 personas, solo en Alemania, se trata de la cepa O104:H4. Por la importancia de este tipo de mutaciones, supongamos que después de 30 duplicaciones, el 1.5% de las bacterias sufre este tipo de mutación. ¿Cuántas bacterias habrán mutado en ese tiempo?

*Se le planteará al estudiante la viabilidad del modelo matemático creado anteriormente o la posibilidad de crear uno nuevo.*

**Actividad 3.** Se les pide a los alumnos que investiguen qué factores influyen en el crecimiento poblacional de los microorganismos.

*Se pretende que el estudiante profundice en el conocimiento del tema y encuentre que son varios los factores que impiden o promueven el crecimiento bacteriano.*

### Momento del tercer encuentro:

**Actividad 4.** Para una población inicial de 2,000 bacterias, la cual incrementa en una proporción de 40%/h, se suministra un *antibiótico A* cada tres horas que tiene una efectividad del 75%, ¿cuánto tiempo tomará disminuir la población por debajo de 50 microorganismos, para asegurar que la infección está controlada?

¿Cuánto tiempo tomará controlar la misma población inicial con un *antibiótico B*, cuya efectividad es del 90% y se suministra cada 6 h; o bien, un *antibiótico C*, con efectividad del 95%, que se suministra cada 24 h?

¿Cuál de las tres situaciones planteadas nos arroja mejores resultados?

### Actividades planeadas

El trabajo se desarrollará con alumnos voluntarios del curso de cálculo en seis u ocho sesiones extra clase con dos horas de duración, cada una, para desarrollar el proyecto. Será una sesión por semana en un día específico acordado con los alumnos. Se trabajará en forma individual y por equipo y se ocupará de apoyo tecnológico, computadoras, para desarrollar adecuadamente el

proyecto. Se trabajará con la técnica de lápiz y papel, además, los alumnos podrán utilizar libremente hojas de cálculo y aprenderán algunas de las ventajas que ofrece el software de geometría dinámica, GeoGebra, lo cual permitirá a los alumnos desarrollar el momento exploratorio de las técnicas y finalmente les permitirá obtener el modelo matemático que describe el comportamiento del fenómeno.

### Conclusiones

El REI que se presenta aquí pone de manifiesto el carácter funcional de las matemáticas y a disposición de los estudiantes los recursos que van a necesitar en su vida profesional. Permite que sean los estudiantes los encargados de estudiar colectivamente la cuestión generatriz y se genere una respuesta propia. Se espera también que conduzca a los estudiantes en su aprendizaje, dando lugar a un ambiente de trabajo propicio para que a través de la modelización los estudiantes utilicen la matemática como una herramienta para solucionar problemas de su área.

### Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México. Grupo Editorial Iberoamerica. 97-140.

Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J. (2010). Génesis y desarrollo de un problema didáctico: el papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 235-244). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Barquero, F. B., Bosch, C.M. y Gascón, P. J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las ciencias* 29(3), 339–352

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Anexo D. Editorial Horsori. Barcelona, España.

Chevallard, Y. 1999. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.19, 2:221-266. Traducción de Ricardo Barroso Campos (Universidad de Sevilla).

Courant, R. and Robbins H. (1996). *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. Oxford University Press. U.S.A.

Eslava, C.C.A., Navarro, O.A., Hernández, C.U., y Salazar, J.E.P. (2013). Escherichia coli microorganismo divergente con actitud dual en su relación de convivencia con sus hospederos. Recuperado: Septiembre 17 de 2013 de [www.facmed.unam.mx/deptos/salud/ourprofs/ecoli\\_divergente.htm](http://www.facmed.unam.mx/deptos/salud/ourprofs/ecoli_divergente.htm)

Fonseca, B. C. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 1, Agosto-abril, 2011, pp. 97-121.

Fonseca, C.; Casas, J.M.; Bosch, M.; Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González, M. J.; González, M. T.; Murillo, J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Santander.

Freudenthal, H. (1981). Problemas mayores de la educación matemática. Conferencia dada en la Sesión Plenaria del ICME 4 en Berkeley. *Educational Studies in Mathematics* 12:133-150. Versión en español de López Yáñez, A.

García, M. (2007). Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia a distancia. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México

García, G. F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 14, núm. 1, marzo. pp. 41-70. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Hein, N. y Biembengut, M. S. (2006). Modelaje Matemático como Método de Investigación en Clases de Matemática. *V Festival Internacional de Matemática*.

Iguchi A., Thomson N.R., Ogura Y., Saunders D., Ooka T., Henderson I.R., Harris D., Asadulghani M., Kurokawa K., Dean P., Kenny B., Quail M.A., Thurston S., Dougan G., Hayashi T., Parkhill J., Frankel G. (2009). Complete genome sequence and comparative genome analysis of enteropathogenic Escherichia coli O127:H6 strain E2348/69. *Journal of Bacteriology*. 191:347-354.

Vargas, H.J. (2011). Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brazil.

Voskoglou, M. Gr. (2011). Mathematical modelling in classroom: the importance of validation of the constructed model. *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference*, 352-357, Rhodes University, Grahamstown, South Africa.