LA REGLA DE LOS CUATRO PASOS. ANÁLISIS SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Adriana Engler
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN México
aengler@fca.unl.edu.ar

Resumen. En este trabajo se define la Regla de los Cuatro Pasos (RCP) y se registra su estudio desde la socioepistemología. A modo de inicio se presentan cinco prácticas ampliamente desarrolladas a lo largo de varios siglos. Estas últimas son observación, geometrización, modelación, analiticidad y predicción. Dichas prácticas juegan un rol importante en la matematización de la realidad inmediata pues, en su conjunto, sirven para aprehender la propia realidad desde una perspectiva racional. Se busca mostrar cómo tales prácticas llevan al establecimiento de la RCP, dado que están inmersas en los propios pasos

Palabras clave: regla de los cuatro pasos, socioepistemología

Abstract. In this paper we define the Four Steps Rule (RCP) and its study from socioepistemology. We present the practices extensively developed over several centuries are presented. They are observation, geometrization, modeling, analyticity and prediction. Such practices play an important role in the mathematization of immediate reality as a whole, serve to grasp reality itself from a rational perspective. It seeks to show how such practices lead to establishing the rule as they are immersed in the steps themselves

Key words: Four steps rule, socioepistemology

Introducción

La regla de los cuatro pasos

La RCP constituye la estructura matemática usada actualmente como una *técnica* en el aula para la determinación de la derivada $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ de una función $f(x)$. Fue desarrollada durante los siglos XVIII y XIX en diversas ramas de la ingeniería, apareciendo en los textos de cálculo desde finales del siglo XIX y principios del siglo XX. En algunos de los libros de cálculo para ingeniería se describe de la siguiente manera:

1. *Se sustituye en la función x por* $x + \Delta x$, *y se calcula el nuevo valor de la función* $y + \Delta y$.

2. *Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene* Δy (*incremento de la función*).

3. *Se divide* Δy (*incremento de la función*) *por* Δx (*incremento de la variable independiente*).

4. *Se calcula el límite de este cociente cuando* Δx *tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada* (Granville, 1980, p. 30).

Estudio socioepistemólogico de la Regla de los Cuatro Pasos

Toda aprehensión del mundo se produce en el seno de una cultura. Comienza cuando el individuo asume el mundo en el que viven otros, dado que existe una continua identificación mutua entre sujetos. La idea es que cada individuo comprende el mundo en el que otro vive y ese mundo se vuelve suyo. No se aprehende directamente, sino a partir de las representaciones que de ese mundo se construye en las mentes de los individuos. Las teorías científicas serán representadas internamente por quien las comprende de una forma que no necesariamente es reproducción, ni de las expresiones lingüísticas de sus principios, leyes y definiciones, ni de las formulaciones matemáticas con las cuales esas teorías se representan externamente. Un objeto o hecho es y tiene su lugar como tal según el marco conceptual y el sistema de prácticas establecidas dentro de las comunidades científicas. Lo que las prácticas son en un momento dado no se puede separar de la historia de su producción y, por otro lado, esta propia historicidad de la realidad le da un carácter procesual que hace que no se pueda separar el proceso del producto. Es posible pensar en un modelo de aprendizaje como emergente de la participación en dichas prácticas. En este sentido, es posible comprender que las diferentes formas del mundo cotidiano en el que vivimos y nos movemos son matematizables. Entonces, una manera de aprehender el mundo es a través de prácticas dado que con ellas se está matematizando la realidad.

Analizamos las prácticas de observación, geometrización, modelación, predicción y analiticidad reconociendo en ellas su rol en la acción de matematizar los fenómenos que nos rodean. Veremos además cómo, estas prácticas están inmersas en los pasos de la regla.

La observación

Al decir de Fourez (2000), *observar* es ofrecerse una representación del mundo en un contexto y ligada a proyectos, un modelo teórico de lo que vemos. "Cuando observo *algo* siempre tengo que describir*lo*. Para lo cual utilizo una serie de nociones que ya tenía antes: éstas se refieren siempre a una representación teórica, generalmente implícita" (p. 27). La *observación* es una actividad realizada para detectar y asimilar información. El término también hace referencia al registro de observaciones mediante la utilización de instrumentos. Es una construcción social que se refiere a una cultura y a sus aspiraciones, de hecho es una manifestación estructurante de esta última que la determina como una sociedad de conocimiento[2]. En si misma, y por su naturaleza, la observación lleva a los humanos a establecer una *construcción social de la realidad.*

> Cada sociedad, de acuerdo a sus propias coordenadas sociohistóricas, construye su modo de controlar e interpretar su realidad, como modo de pensar y representar el

[2] Los términos: *cultura, sociedad* y *comunidad*, se aceptan semejantes en el presente trabajo.

> mundo. La universalidad de los saberes científicos es puesta en cuestión, las ciencias y las disciplinas científicas, las tecnologías materiales o intelectuales (subjetivas, parciales e interesadas) son resultado de conflictos de intereses, negociaciones varias, imposiciones y condicionamientos de cuya resulta surgen las ciencias y disciplinas científicas que tratan de ser «universales» (como el inglés, apunta irónicamente Fourez) al tratar de ser «reveladas» mediante intentos de dominación. (Moral, 2008, p. 288).

La observación es, en primer lugar, una construcción del sujeto y no el descubrimiento de algo que existe independientemente del sujeto que observa. Está unida al lenguaje y a supuestos culturales. De hecho, el conocimiento proviene de la observación; no obstante, para mostrar y describir cómo la RCP surge de la observación empírica, habrá que reconocer otras actividades que de ésta última se desprenden como son la *geometrización*, *modelación, analiticidad* y *predicción*.

La geometrización

Desde la perspectiva galileana se puede ver cómo el comportamiento matemático emerge en el proceso de formalización del movimiento. También es cierto que la formalización del movimiento es mediatizada por la construcción de las estructuras matemáticas. Galileo formuló aportes a la observación desde la geometrización en cuestiones de movimiento. A lo largo de la historia se observa que la geometrización del espacio fue una práctica desarrollada por geómetras y analistas como Newton, Leibniz y Euler, entre otros. Las prácticas observacionales llevadas a cabo a través de la idealización permiten la representación geométrica, la cuantificación y transformación de lo abstracto, en tanto que se produce un cambio y expresión lingüística de la geometría. Así, es posible afirmar que el término *geometrizar* se refiere a la acción de teorizar las formas del espacio real, entendiéndose por espacio real a porciones limitadas de la superficie de la tierra, así como a porciones del espacio estelar. Se puede pensar que la geometrización del espacio brinda por resultado una configuración ordenada del mismo.

La modelación

En el contexto de la socioepistemología las prácticas vinculan la actividad de enseñanza de la matemática en el nivel de ingeniería con las prácticas de modelación. Consideramos a la modelación, junto con otras prácticas, como fuente de reorganización de la obra matemática y el rediseño de la matemática escolar. Se asume como partícipe de los procesos de matematización en el aula. Favorece el desarrollo de una matemática funcional que permite al estudiante comprender los conceptos matemáticos desde esa funcionalidad en los diferentes escenarios donde se desenvuelve. La modelación se asume como una práctica que participa en la construcción de conocimiento de un individuo cuando enfrenta una tarea matemática en la que pone en juego su saber. Córdoba (2011) manifiesta:

> (…) con relación a la modelación en el ámbito escolar, la perspectiva socioepistemológica no tiene como preocupación centrar que la modelación sea considerada como un contenido a enseñar o como un medio o herramienta para enseñar conceptos matemáticos. El centro de interés en la perspectiva sociepistemológica radica en considerar la modelación en matemática educativa como una práctica que se comparte y se ejerce en comunidades específicas y en contextos particulares y que al ser ejercida por estudiantes y profesores (actores del sistema didáctico) permite la resignificación de conocimiento matemático escolar, lo cual a su vez modifica eses prácticas bien sea incorporando nuevos elementos, enriqueciendo los ya existentes o aportando nuevos significados, y modifica también a los individuos involucrados. (p. 65)

La modelación se convierte en una práctica que refleja una cierta intención humana que le da el carácter social. Permite la interacción con otros y con fenómenos y acontecimientos del mundo real. Como toda práctica permitirá generar conocimiento y/o resignificar conocimientos ya existentes. Buendía (2004) establece que, al asumir a la modelación como una práctica, ésta se constituye en algo más que plantear un fenómeno extra-matemático en símbolo. Es un proceso de descubrimiento de debilidades de aprendizaje y de manera de relacionarse tanto con el conocimiento como con los otros y con el entorno.

La analiticidad

A finales del siglo XVIII se planteó el siguiente interrogante ¿es posible representar cualquier función real de variable real a través de una serie de potencias? Si bien Cauchy argumentó que no, Lagrange demostró que sí era posible. Camacho y Sánchez (2010) manifiestan que las funciones analíticas contienen un gérmen de conocimientos que, desafortunadamente, con el cálculo actual es difícil de reconocer. De hecho, el dominio de las funciones analíticas debe mirarse en un contexto variacional distinto, puesto que cuentan con un dominio extendido cuyos elementos asumen caracterizaciones diferentes a las que se toman en las funciones comunes a través de solamente la relación entre variables:

> Desde el punto de vista de la analiticidad, parte del dominio de existencia de las funciones analíticas son las argumentaciones asociadas a la variación, como son la *inferencia, error, predicción, variabilidad, devenir y generalización,* entre otras que, como

> consta en diferentes investigaciones, no aparecen en los discursos escolares del cálculo diferencial contemporáneo. (Camacho y Sánchez, 2010, p. 32)

Los trabajos de Newton y Lagrange enfatizaron la conexión entre la analiticidad y la predicción. No se puede hablar de analiticidad sin la práctica de predicción. A continuación se hace referencia a esta última.

La predicción

La predicción ha sido una idea motriz en el desarrollo de conceptos matemáticos, en especial en el cálculo. Está íntimamente relacionada con la noción de variación y se desprende, en principio, de los argumentos que surgen de la geometrización o teorización inicial de la realidad y de la propia analiticidad. La variación resulta una herramienta de análisis necesaria para el ejercicio de la predicción. Cantoral, Molina y Sánchez (2005, p. 467) definieron la predicción como una "actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce".

Cantoral (2001) ha afirmado:

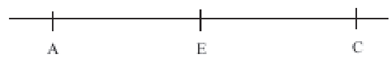
> La idea de predicción es, sin lugar a dudas, la idea de mayor importancia en el estudio de los fenómenos de cambio en la naturaleza. Se trata siempre de adelantarse a los acontecimientos, de revelar lo que habrá de suceder. Sin embargo el problema queda resuelto hasta que se precisa cómo es que se logra la predicción y de qué manera estaremos ciertos de nuestro conjetura. En el caso de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, la predicción se obtiene a través del estudio de la ley que gobierna el comportamiento del sistema, ley que se encuentra mediante el estudio de la variación, más pequeña, más básica, más elemental que podamos estudiar: el elemento diferencial. Sin embargo, la predicción para ser legítima debe construirse exclusivamente con datos que se posean desde el inicio. En este sentido, un resultado de este estudio permitió conferirle a la Serie de Taylor el papel de instrumento predictor por excelencia (ya que en él quedan impresas todas las formas discutidas de la predicción).

El origen de la regla de los cuatro pasos

La génesis de la regla se encuentra inmersa en diferentes prácticas que le dieron origen, como son aquellas de la *observación*, *geometrización*, *analiticidad* y *predicción,* desarrolladas sobre todo por Newton y cultivadas ampliamente por los geómetras de los siglos XVIII al XX, las cuales a su vez se ubican en actividades de la ingeniería y de la física, teniendo que ver con la astronomía, topografía, óptica, geodesia, entre otras.

No obstante, la definición de la regla de los cuatro pasos aparece en la *Méthode pour la recherche du maxima et minima* escrita por Fermat en 1629, obra en la que usa un *método*[3] para la determinación de los valores máximos y mínimos de algunas curvas. Surgió el que se conoce como *teorema de Fermat* (para los máximos y mínimos) el cual consiste —de acuerdo a la notación actual— en hacer $e = 0$ en la expresión $\dfrac{f(a+e) - f(a)}{e}$. El teorema se concibió como un *methodus* algorítmico para la determinación de máximos y mínimos, en problemas particulares. Originalmente fue presentado por Fermat en un lenguaje coloquial más que analítico a partir de un ejemplo, a saber:

«*Partir* AC, *en* E, *de modo que* $AE \times EC$ *sea máximo*»



«Tomemos $AC = b$; sea a uno de los segmentos, el otro será $b - a$, y el producto al que debemos encontrar el máximo: $ba - a^2$. Sea por tanto $a + e$ el primer segmento de b, el segundo será $b - a - e$, y el producto de los segmentos $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$.

Este debe ser *adigual*[4] *al precedente:* $ba - a^2$

Suprimiendo los términos comunes: $be \backsim 2ae + e^2$

Dividiendo todos los términos: $b \backsim 2a + e$

Suprimiendo e: $b = 2a$

Para resolver el problema, falta luego tomar la mitad de b.

Es imposible dar un método más general.»

Si en el ejemplo anterior retomamos los *pasos* seguidos por Fermat, usando la notación actual para las funciones y haciendo analogía de estos con los pasos que se siguen para derivar actualmente por incrementos, quedaría la semejanza presentada en la tabla.

Pasos seguidos por Fermat para resolver el problema	Aplicación de la regla de los cuatro pasos al problema resuelto por Fermat
1. Incrementar a en e como $a + e$ de modo que $f(a+e)$ y «adigualar» $f(a)$ y $f(a+e)$, lo cual se aprecia en el ejemplo	1. Incrementar $f(a) = ba - a^2$ como $a + e$ e igualar $f(a+e)$ y $f(a)$, es

[3] De hecho el método esconde los cuatro pasos de la regla.
[4] La palabra adigual —*adæqual*— debe tomarse literalmente como *aproximada*.

con la ayuda del signo ∽.

2. Suprimir los términos semejantes que figuran en los dos miembros de la adigualdad.
3. Dividir los dos miembros de la adigualdad por e.
4. Suprimir todos los términos que contienen e transformando así la adigualdad en igualdad.

decir: $f(a+e) = \underbrace{ba - a^2}_{f(a)} - ae + be - ae - e^2$

2. Hacer la diferencia:

$$f(a+e) - f(a) = (b-2a)e - e^2.$$

3. Dividir los dos miembros de la igualdad por e:

$$\frac{f(a+e)-f(a)}{e} = -2a + b - e$$

4. Aplicar en ambos miembros $\lim_{e \to 0}$

$$\lim_{e\to 0} \frac{f(a+e)-f(a)}{e} = -2a + b - \lim_{e\to 0}(e)$$

De modo que resta: $f'(a) = -2a + b$

Esta semejanza intenta mostrar la equivalencia entre ambos acercamientos y busca esclarecer el origen de la regla, puesto que los objetos matemáticos que se usan en ambos no guardan relación. En la época de Fermat no existía la noción de variable, las funciones en esa época son tratadas como cantidades, e no es un incremento como se le concibe en el cálculo actual, etc. El *methodus* de Fermat reposa sobre la noción de adigualdad ∽ la cual muestra los resultados como un esquema de aproximación que anticipa también las coyunturas del cálculo infinitesimal. Las prácticas estudiadas están inmersas en ese orden en lo aplicado por Fermat en el problema.

La RCP en las actividades de ingeniería

Son numerosos los problemas de ingeniería en los que se pueden observar las prácticas y que se pueden resolver haciendo uso de la regla de los cuatro pasos. En el aula universitaria es posible el encuentro con las prácticas en las actividades de ingeniería. A modo de ejemplo se presenta un problema que habitualmente se trabaja en el aula.

Un ingeniero diseña una curva circular para una carretera según se aprecia en la Figura 5.3. Los datos contenidos en la imagen son los siguientes:

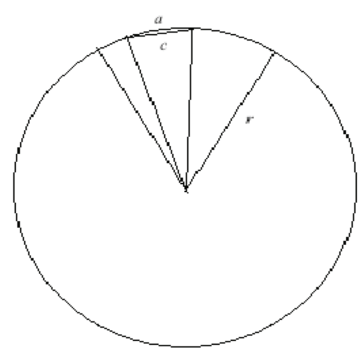
a: longitud de arco de la curva

θ: ángulo que subtiende a la curva

r: radio de la curva

c: valores de las cuerdas con las cuales se traza la curva en el terreno.

α: valor angular que subtiende a la cuerda, también llamado *grado de curvatura*.



a) El ingeniero se cuestiona cómo cambia el valor del radio r (en metros) cuando cambia el valor del grado de curvatura α (en grados), es decir, se pregunta cómo son los diferentes valores de $\frac{dr}{d\alpha}$, puesto que el diseño de este tipo de curvas parte del conocimiento previo de que el valor del radio que se tome será máximo en tanto el valor del grado de curvatura α será mínimo.

b) ¿A qué razón está cambiando el radio cuando el grado $\alpha = 1^{\circ}$ de arco y la cuerda es de 20 metros?

a) Para encontrar la solución se comienza analizando las prácticas que intervienen y permiten organizar el problema.

1. Observación: en el problema esta práctica es implícita al proceso de medición inicial y a la toma de datos en el campo, previo al diseño de la curva.

2. Geometrización/3. Modelación: Obedece al proceso de *geometrizar* el problema, teorizarlo, así como al establecimiento de la función analítica correspondiente según las relaciones que se determinan en la figura misma. En este caso, de los valores que se encuentran en la figura se pueden establecer las siguientes relaciones:

$a = r\theta$ (θ en radianes) (1) $\qquad\qquad$ $\frac{c}{\alpha} = \frac{a}{\theta}$ (2)

De (2): $a = \frac{c\theta}{\alpha}$ (3). Igualando (1) con (3), se tiene la relación: $r = \frac{c}{\alpha}$.

La cual representa una función analítica que hace corresponder r con α, para c igual a un valor constante, es decir: $r(\alpha) = c\alpha^{-1}$.

4. Analiticidad

La analiticidad se refiere a descubrir el germen contenido en la función analítica (su variabilidad, predicción, derivada, etc., según se pretenda en el problema).

Primer paso: $$r(\alpha + \Delta\alpha) = c(\alpha + \Delta\alpha)^{-1} = c(\alpha^{-1} - \alpha^{-2}\Delta\alpha + \alpha^{-3}(\Delta\alpha)^2 + \ldots)$$

5. Predicción

Segundo paso: $$r(\alpha + \Delta\alpha) - r(\alpha) = -c\alpha^{-2}\Delta\alpha + c\alpha^{-3}(\Delta\alpha)^2 + \ldots$$

Tercer paso: $$\frac{r(\alpha + \Delta\alpha) - r(\alpha)}{\Delta\alpha} = -c\alpha^{-2} + c\alpha^{-3}\Delta\alpha + \ldots$$

Cuarto paso: $\frac{dr}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{r(\alpha + \Delta\alpha) - r(\alpha)}{\Delta\alpha} = -c\alpha^{-2} + c\alpha^{-3} \lim_{\Delta\alpha \to 0} \Delta\alpha + \ldots$

De donde $\frac{dr}{d\alpha}$ guarda la proporción: $\frac{dr}{d\alpha} = \frac{-c}{\alpha^2}$.

b) $\frac{dr}{d\alpha}$ está cambiando a razón de: $\frac{dr}{d\alpha} = \frac{-20}{1} = -20\frac{metros}{grado}$ para $\alpha = 1^{\circ}$ y una cuerda de 20 metros.

Es importante reconocer que las prácticas en juego aparecen como una interpretación que organiza al propio problema. Resulta importante el rol de cada una de ellas para poder dar respuesta a los diferentes interrogantes planteados. En la interpretación para la resolución cobran relevancia cada uno de los pasos de la RCP descriptos anteriormente.

Conclusiones

A lo largo de todo este artículo quedaron descriptas de manera muy resumida las cinco prácticas: observación, geometrización, analiticidad y predicción y cómo están inmersas en la regla. Se mostraron además algunos problemas en los que el análisis de las prácticas que intervienen permiten organizar la resolución del mismo a través de la interpretación de los cuatro pasos de la regla. Estas prácticas están presentes en los propios problemas de orden variacional que se atienden en los cursos de cálculo diferencial.

Referencias Bibliográficas

Buendía, G. (2004) *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. (Un estudio socioepistemológico)*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Camacho, A y Sánchez, B. (2010). Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. México: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Número especial, *13*(4), 29-52.

Cantoral, R., Molina, G., Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 18, Núm. 1, 463 – 468. México.

Córdoba, F. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Fourez, G. (2000). *La construcción del conocimiento científico. Sociología y ética de la ciencia.* Segunda Edición Actualizada. Madrid: Narcea.

Granville, W. (1980). *Cálculo Diferencial e Integral*. Primera reimpresión. México: Grupo Noriega Editores. LIMUSA.

Moral, M. (2008). Gérard Fourez. *Cómo se elabora el conocimiento. La epistemología desde un enfoque socioconstructivista.* Narcea. Madrid. En Recensiones de Libros y Revistas. OEI Revista Iberoamericana de Educación. Nº 48. pp. 285-292.