

Tránsito entre Representaciones en Matemáticas ¿Pensamiento Global o Local?

Juan Alberto Acosta

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
México

acostah@uaeh.reduaeh.mx

Pensamiento Matemático Avanzado – Nivel Medio

Resumen

Este trabajo pretende dar a conocer el avance, que hasta el momento se ha logrado, en la línea de investigación: “Visualización y pensamiento global en Matemáticas”, la cual persigue, a partir de la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval, la caracterización del estilo de pensamiento global y local, de estudiantes de nivel medio superior y superior y de sus profesores. En particular reporto los resultados preliminares encontrados hasta el momento con estudiantes de primeros semestres de licenciatura al abordar un problema de precálculo, contrastado con desempeños en ajedrez para interpretar aspectos semejantes en cuanto a la forma local o global de pensar un problema viendo sus registros que lleven a resultados que pudieran servir en la mejora de la enseñanza de algunos temas de matemáticas.

Antecedentes

En las últimas décadas, la matrícula del nivel medio superior en México, ha crecido en gran medida. En 1940, la población era de 10,000 estudiantes, mientras que en 1997 fue de 2,438,676. Este aumento impresionante, ha originado serios problemas en el sector educativo nacional, entre los cuales resalta el bajo nivel de aprovechamiento de los estudiantes de bachillerato. Entre las posibles causas del bajo nivel de aprovechamiento de los estudiantes se cuenta la improvisación de muchos de los profesores que atienden la creciente demanda de jóvenes que ingresan a ese nivel (Acosta J. A, Ávila O., Barrera F., Castillo O., Palazuelos S., Roldán O. & Rondero C, 2004).

No obstante la puesta en marcha de algunos programas de formación y actualización docente, impulsados por la Secretaría de Educación Pública en el nivel básico (primaria y secundaria), los resultados de los estudiantes mexicanos que participaron en el examen que aplicó la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico¹ (OCDE), fueron poco satisfactorios, al ubicarse nuestro país en penúltimo lugar, obteniendo 387 puntos, siendo el promedio de 500 puntos (Acosta, 2003).

Sobresale la correlación de los datos anteriores con los resultados obtenidos al aplicar un examen diagnóstico a 753 estudiantes de semestres iniciales del ICBI de la UAEH, del año 2000 al 2003, que consistió en diez preguntas: un problema de razones y proporciones; otro de suma de fracciones; tres de trigonometría (funciones trigonométricas, triángulo isósceles y teorema de Pitágoras); y dos de graficación. Del total de alumnos, solamente 35, o sea el 4.5 %, obtuvieron más del 70 % de aciertos (Acosta, 2003).

¹ Periódico Reforma del 4 de diciembre de 2001

Asimismo, el examen diagnóstico referido en el párrafo anterior, se aplicó a 21 profesores de primaria y secundaria que tomaron el curso corto: “Pensamiento Global en Matemáticas” impartido en el I Coloquio de Matemática Educativa para profesores en abril de 2002. Resultando que de los 14 docentes de secundaria, dos obtuvieron más del 70 % de aciertos, cinco en el intervalo del 50 % a 70 % y los otros siete menos del 50 %. De los siete de primaria, tres obtuvieron menos del 25 % de aciertos; y los otros cuatro en el intervalo de 25 % a 70 % aciertos. En total, solamente dos profesores, o sea menos del 10 %, obtuvieron más del 70 % de aciertos (Acosta, 2003).

Marco teórico

La percepción que tiene un estudiante promedio acerca de los conceptos matemáticos es en ocasiones local, de acuerdo al curso que esté llevando o los que ya haya tomado. Enfatiza algún aspecto en particular (algebraico, numérico, gráfico, oral, dinámico o estático); esto se debe a que en ocasiones, el profesor prioriza el aspecto algorítmico de la matemática, y casi de manera general no transita a alguna otra representación, lo cual repercute desfavorablemente en la cognición de los estudiantes. El desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante debe promoverse mediante actividades que, como lo señala Duval (1999), propicien *la diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumente las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales*. El estudiante de cursos iniciales de matemáticas, generalmente tiene percepciones y representaciones limitadas de saberes y procesos de la matemática, un pensamiento nó holístico un tanto local de los saberes.

Cualquier persona tiene representaciones mentales, es decir, un conjunto de imágenes y de concepciones que puede tener, sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado. Las representaciones semióticas, es decir aquellos productos constituidos por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfica, figura geométrica) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir para hacerlas visibles o accesibles a otros. Aunque como los dice Duval (1999), esto va más allá, *Las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma*.

El pasar de un sistema de representación a otro o la movilización simultanea de varios sistemas de representación en el transcurso de un mismo recorrido intelectual, fenómenos tan familiares y tan frecuentes en la actividad matemática, para nada son evidentes o espontáneos para la mayoría de los alumnos. El encerramiento persiste incluso después de que en la enseñanza se hayan utilizado ampliamente diferentes sistemas semióticos de representación (Duval, 1999). Este encerramiento resulta del fenómenos de no congruencia entre las representaciones de un mismo objeto que proviene de sistemas semióticos diferentes.

Las consideraciones visuales, como lo señala Hitt (1997), son importantes en la resolución de problemas, esto tiene que ver con una visión global, integradora, holística, que articule, libre de contradicciones. Pero no basta tener varias representaciones, es necesario desarrollar la habilidad de pasar de una a otra cuando sea necesario. Duval (1997) presenta un ejemplo, “la expresión $xy \geq 0$ y la representación gráfica cartesiana de dos cuadrantes determinados respectivamente por semi-ejes y y x positivos, x y y negativos, son congruentes si se pasa de

la escritura algebraica a la gráfica, pero no lo son a la inversa”. Algunos profesores, también se presentan incongruencia al transitar de una representación a otra, tal es el caso reportado por Acosta (1999), donde se realizaron entrevistas video-grabadas a cuatro profesores preguntándoles el valor de la derivada y de la función, en $x = a$, en referencia a las gráficas de $f(x)$ y su tangente en $x = a$. Dos de los maestros de licenciatura que no son profesores de Cálculo, encontraron el valor de la función, teniendo dificultad para encontrar el de la derivada; los otros dos profesores, uno de bachillerato y el otro de licenciatura encontraron $f(a)$ viendo el esquema. $F(a)$ lo encontraron analíticamente, no siendo relevante la representación gráfica para la solución. En el mismo proyecto se entrevistaron a tres profesores, dos de bachillerato y uno

de licenciatura, preguntándoles si la solución algorítmica de una integral impropia $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = -\frac{2}{3}$

era correcta. Los dos primeros se encapsularon en una sola representación: la algebraica – algorítmica. El tercer profesor, de manera espontánea e inmediata comentó sobre la discontinuidad de la función a integrar y por consecuencia la contestación esperada (Acosta, 1999).

Por lo anterior, suponemos que el estilo de pensamiento, un “estilo global de pensar”, que emplean expertos en ámbitos diferentes, puede tener en común los procesos avanzados de pensamiento, en el sentido que comenta Cantoral (1997), el proceso avanzado de pensamiento matemático. Así un buen jugador de ajedrez, inserta pensamiento, en un ambiente de competencia, sobre tópicos de ajedrez y por otro, procesos avanzados del pensamiento. Nuestro interés es investigar desde el punto de vista cognitivo, los elementos empíricos, como el lenguaje, las representaciones, el razonamiento, que proporcionen información acerca de los procesos mentales de pensamiento que permitan comprender, en un segundo momento como una persona aprende matemáticas. Además de preguntarnos si el pensamiento global es característico de un experto en su ámbito, y en particular en la enseñanza de la matemática, y en que grado un dispositivo físico lúdicamente manipulable sería una representación semiótica, que forme parte de un sistema de representaciones de un objeto matemático.

Experimentación

La parte experimental, consistió en dos etapas, la primera en el análisis de un video de una partida de ajedrez entre un novato y un experto; y la segunda en dos entrevistas video-grabadas, una a un estudiante no aventajado y otra a uno aventajado.

Tanto el novato, como el experto en ajedrez son estudiantes de segundo semestre de la licenciatura en Sistemas Computacionales de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, e integrantes del “Club Universitario de ajedrez”. Los alumnos, “aventajado” y “no aventajado” son estudiantes de primer semestre de la misma licenciatura.

El propósito de analizar los comentarios de los contendientes en la partida de ajedrez, es caracterizar el tipo de pensamiento, a través de lo expresado por ellos, en cada jugada.

La partida de ajedrez se llevó a cabo en aproximadamente 15 minutos, jugó con blancas el novato y con negras el experto; ganó el experto.

En cuanto a las entrevistas sobre matemáticas, se pidió por separado que dijeran y escribieran todo lo que se le ocurriera para obtener la solución de la desigualdad:

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

El propósito de esta entrevista es caracterizar el estilo de pensamiento que tiene el estudiante, a través del lenguaje, las representaciones, analíticas y gráficas, y su tránsito entre ellas, que se manifiestan durante el desarrollo hacia la solución.

Análisis preliminar de los resultados de la experimentación

Comentarios de las primeras jugadas de la partida de ajedrez

Primera jugada

Novato (blancas)	Experto (negras)
e3	e5
Muevo peón de rey, para sacar alfil	Dominio de espacio
Comentario: La perspectiva del novato es mover un peón, posteriormente involucrar al alfil; en cambio el experto espera iniciar el dominio del centro del tablero con un movimiento más agresivo.	

Segunda jugada

Novato (blancas)	Experto (negras)
Ac4	d5
Muevo alfil para tomar más piezas afuera de más valor	Desarrollo y dominio de centro con ataque al alfil blanco
Comentario: Mientras que el novato mueve el alfil para poner en juego otras piezas, el experto domina el centro y ataca al mismo tiempo al alfil.	

Tercera jugada

Novato (blancas)	Experto (negras)
Ab5+	c6
Ahora el me presiona con comer mi alfil y entonces avanza 1 casilla y lo pongo en Haque	Jugada de desarrollo, fortificación del centro y quita el jaque
Comentario: El novato dá jaque, sin perspectiva de que cause algún daño considerable. En cambio el experto se cubre del jaque y al mismo tiempo fortalece el centro del tablero.	

Cuarta jugada

Novato (blancas)	Experto (negras)
Aa4	Cf6
Me veo obligado a retroceder alfil para que no me coma	Desarrollar caballo de rey para enroque y posterior ataque al rey blanco
Comentario: El novato tiene que retroceder, para no perder el alfil. El experto mueve el caballo para apoyar al centro y además le proporciona perspectiva para posteriormente proteger al rey	

Comentarios de la entrevista de matemáticas con el estudiante aventajado (15 minutos)

En su primera respuesta dice que el signo del término cuadrático dará información de cómo se dibujan las ramas de la parábola; calcula las raíces, factorizando la expresión y las ubica en la recta numérica, manifestando el intervalo solución y dando información sobre la notación de intervalos cerrados (al decir que se llena el círculo cuando el valor extremo se incluye en el intervalo)

En su segunda intervención el estudiante aventajado, expresa verbalmente y con representaciones en el pizarrón la solución ($\{(-\infty, -2) \cup (1, \infty)\}$)

Comentarios de la entrevista de matemáticas con el estudiante no aventajado

En su primera respuesta se enfoca a obtener las raíces de la función cuadrática, factorizándola y después se refiere a la desigualdad y manifiesta despejar x .

Al preguntarle que tipo de función responde que es cuadrática y hace referencia a $y = x^2$ y a su gráfica. Comenta que la involucrada en la desigualdad tiene un defasamiento con respecto a la que escribió, sin precisarlo.

Después de guiarla hacia la obtención de las raíces por la fórmula general, aún no las relaciona con la solución de la desigualdad.

Hacia el final de la entrevista dice: “ x puede tomar todos los valores que estén antes de -2 o después de 1 ” y escribe en el pizarrón: $-2 \geq x \geq 1$ y pregunta “¿Sería así?”

Reflexiones finales

Existe evidencia por trabajos recientes de investigación que estudiantes de Precálculo logran transitar de una representación a otra, en los casos de problemas rutinarios, aunque generalmente de la representación algebraica a la gráfica y verbal y no a la inversa. Pero en general muestran una carencia de vinculación coherente de una representación a otra.

Por otra parte los estudiantes que logran vincular al menos dos representaciones, y transitar en ambos sentidos entre ellas, presentan elementos de un pensamiento global que le permite mejorar la cognición de un objeto matemático, que el que tiene un estudiante que se desenvuelve en una sola representación, ó en varias pero sin la habilidad de pasar de una a otra cuando es necesario, caracterizando esto como un pensamiento local.

El experto de ajedrez, por sus comentarios escritos acerca de los movimientos efectuados, pudo ligar una secuencia de jugadas, que le permitió dominar paulatinamente el juego. Las representaciones manifestadas son diferentes a las de matemáticas, pero el que se enlacen grupos de posiciones con otras, denota una vinculación fluida entre las mismas, caracterizando en este sentido un pensamiento global en este contexto del juego ciencia.

Una aproximación de la idea de lo que es pensamiento global, es el conjunto de representaciones mentales, manifestadas por las representaciones semióticas coherentemente vinculadas (tránsito fluido en ambos sentidos), que son manifiestas de un objeto del contexto que se trate. Por otra parte el pensamiento local es el conjunto de representaciones mentales, manifestadas por las representaciones semióticas sin vincularse entre sí; ó por el tránsito dentro de una sola representación.

En seguida se proponen algunas preguntas, a las que se pretenden contestar a mediano plazo: ¿Un dispositivo físico lúdicamente manipulable sería una representación semiótica, que formara parte de un sistema de representaciones de un objeto matemático (Acosta, 2000)? ¿El pensamiento global es característico de un experto en su ámbito? ¿La manipulación lúdica de algún “Ingenio” del MIM puede ser parte de un sistema semiótico de representaciones acerca de un objeto matemático en particular? ¿La construcción ordenada y orientada de algún “Ingenio matemático” puede ser un elemento semiótico de un sistema que conlleve a un estilo de pensamiento global de un objeto matemático en particular?

Creemos que la percepción global de conceptos y procesos, mejora el rendimiento escolar, a través de la interacción de las representaciones de los objetos matemáticos, permitiendo una mejor cognición de los saberes matemáticos mediante una reestructuración los mismos.

Referencias Bibliográficas

- Acosta, J. A. (1999). *Acerca de la resistencia a la visualización en Cálculo. Un caso con profesores II*, COMAT99, Cuba.
- Acosta, J. A. (2000). *Museo Interactivo de Matemáticas*, II Simposium Internacional “Las Humanidades en la Educación Técnica ante el siglo XXI”, y V Simposium Nacional “La Educación Técnica en México”, IPN – ESIQIE, México.
- Acosta, J. A. (2003). *Representaciones en Matemáticas y otro ámbito, ¿Pensamiento Global o Local?* Memoria del XXXVI Congreso Nacional, Sociedad Matemática Mexicana, Pachuca, Hidalgo.
- Acosta J. A. Ávila O., Barrera F., Castillo O., Palazuelos S., Roldán O. y Rondero C.(2004) *Rediseño Curricular de la Maestría en Ciencias con Orientación en la Enseñanza de la Matemática*, UAEH, México.
- Cantoral, R. (1997). *Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición*, México, Serie: Antologías Número 1, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.
- Eisenberg T. y Dreyfus T. (1990). *On the Reluctance to Visualize in mathematics*, artículo del texto: “Visualization in Teaching and Learning Mathematics”, Cunningham & S. Zimmermann. M.A.A. Notes, N° 19, Mathematical Association of America.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*, Universidad del Valle, Instituto de educación y Pedagogía, Colombia.
- Hitt, F. (1997). *Sistemas semióticos de representación. Avance y perspectiva*, 16. Mayo-junio, CINVESTAV, México.