

# Preconceptos en el Aprendizaje del Cálculo

Martha Alvarado y Carlos García

Instituto Tecnológico de Puebla

México

maraare@yahoo.com, cgfranchini@yahoo.com

Educación a Distancia – Nivel Superior

## Resumen

Tomando como antecedentes los problemas del aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral de los estudiantes que ingresan al nivel superior del Instituto Tecnológico de Puebla se estudia como se puede mejorar el proceso de aprendizaje, conocidos los preconceptos que los estudiantes han formado sobre los tres conceptos básicos de un curso de Cálculo. El problema específico es: “determinar los preconceptos que el estudiante posee sobre los tres conceptos básicos del curso de Cálculo –límite, derivada e integral– y catalogar su modificación mediante el desarrollo de actividades individuales realizadas por medio de la educación virtual no asesorada”. El proyecto permitió localizar y robustecer estos preconceptos básicos mediante acciones didácticas de autoestudio mediante materiales en línea y análisis de contexto.

## Introducción y planteamiento del problema

Los conceptos del Cálculo, específicamente los de límite, derivada e integral, están asociados a ideas eminentemente contextuales que parecen no tener relación con las estructuras matemáticas que los precisan –al menos ese es el supuesto básico que consideran muchos estudiantes–, por tanto al estudiar dichos conceptos su aprendizaje se ve limitado porque tratan de memorizar las estructuras algebraicas que los definen ajenos a la realidad del mundo que pueden presentar. De este hecho se desprende que les resulta muy difícil el poder relacionar a esas estructuras con diferentes conceptos de la vida diaria. Paralelamente, y tal vez de una manera ingenua, es de esperar que el estudiante haya integrado a sus estructuras cognitivas preconceptos asociados al límite, derivada e integral, adquiridos como parte de su lenguaje cotidiano; por tanto y con el afán de mejorar el aprendizaje de los mismos resulta importante indagar en que consisten tales ideas ingenuas, para que con base en los andamiajes propuestos en el aprendizaje significativo de la teoría de Ausubel, proponer estrategias didácticas que se fundamenten en esas ideas y construir a partir de ellas al concepto formal matemático objeto del curso del Cálculo.

## Objetivo

Indagar sobre los preconceptos que un estudiante tiene sobre los diferentes conceptos de un curso, haciendo eco a la frase de Ausubel, “*indaguemos lo que el estudiante sabe y actuemos en consecuencia*”. Bajo la posibilidad de construir estructuras cognitivas débilmente fundamentadas y ajenas al contexto cotidiano del estudiante, y no siendo esta la situación deseable, resulta importante poder reconstruir esos preconceptos hacia “conceptos fuertes”, contruidos no sobre la formalización del lenguaje matemático, si no por el contrario; con base en estrategias didácticas traducidas en acciones individuales de aprendizaje dentro de un “escenario de aprendizaje” prediseñado, lograr que el estudiante observe situaciones contextuales de su vida

cotidiana y de ellas interiorice al concepto en acción, y así abstraer de manera natural las características esenciales y las no esenciales de cada concepto, del tal forma que antes de que se dé el proceso de estudio formal, el alumno construya y “aprehenda” los conceptos bajo un proceso ajeno a la memorización, pero sí dirigido a su autoconstrucción. De manera concreta, se espera de la investigación:

1. *Determinar los preconceptos que el estudiante tiene sobre los tres conceptos básicos del Cálculo: límite, derivada e integral.*
2. *Reconstruir los preconceptos con base a acciones de aprendizaje individuales.*
3. *Catalogar la modificación de los preconceptos una vez realizadas las acciones de aprendizaje individuales.*

### **Hipótesis**

La investigación se centra en un conjunto de supuestos (creencias) que han sido analizados a lo largo de la experiencia de los autores impartiendo cursos de matemáticas en el nivel superior, y que se han dejado entrever a lo largo de los apartados previos.

Dentro de esos supuestos básicos se pueden considerar, entre otros:

1. El estudiante posee un bajo dominio algebraico y matemático en general porque desconoce las aplicaciones contextuales de los conceptos que estudia.
2. La manera tradicional en que el estudiante ha cursado las matemáticas le han hecho creer que estas son áridas y carentes de aplicaciones reales.
3. Las matemáticas se ven como un obstáculo a librar, **más que** como un aprendizaje necesario.
4. El estudiante cree que “Aprender matemáticas” es poder resolver cientos de ejercicios de manera rutinaria, aunque no sepa para que se aplican esos resultados.
5. El aprendizaje significativo de las matemáticas se logra si el estudiante construye los conceptos por medio del análisis de situaciones contextuales de su vida cotidiana.
6. Es posible que el estudiante interiorice los conceptos matemáticos si realiza actividades que le permitan observar a los conceptos en acción y esa observación le invita a un análisis y discusión de lo que observa.
7. Si el estudiante encuentra la motivación adecuada, realizará las acciones necesarias para su aprendizaje; más aún, esa motivación se puede lograr con los propios cuestionamientos sobre las cosas que le rodean o le ocurren de manera cotidiana. Es decir si el nuevo conocimiento –aunque sea no formal– le permite entender y por tanto explicar los hechos que ocurren a su alrededor.

Con estos supuestos como antecedentes, la hipótesis de trabajo considerada es:

*Dado un conjunto de cuestionamientos y acciones pedagógicas sobre hechos cotidianos, el estudiante exterioriza sus preconceptos del cálculo, los cuestiona y modifica, de tal forma que construye preconceptos más robustos fundamentados en la reconstrucción de los previos.*

## Marco de referencia



Fig. 1: Estructura del modelo de interrelación en la activación de los escenarios de aprendizaje.

Según Piaget (Ginsburg y Opper, 1977) los estudiantes de este nivel de la educación se encuentran en la etapa de las operaciones formales, por lo que en esta etapa se está en capacidad de abstraer y realizar las más complejas actividades de razonamiento. Por su parte Ausubel (Ausubel, Novak y Hanessian, 1983) mediante el enfoque constructivista de las teorías cognitivas, establece que para lograr la interiorización satisfactoria de los conceptos, el aprendizaje debe ser

significativo y con ello, se modificarán las estructuras cognitivas, dando cabida a la construcción y asimilación de nuevos conceptos, siempre que los cambios en las estructuras cognitivas se fundamenten en un adecuado empleo de lo que el estudiante ya sabe. Adicionalmente Lev S. Vygotsky (Schunk, 1997) en su teoría sociocultural, establece que el cambio cognitivo es el resultado de emplear los instrumentos culturales y las interrelaciones sociales y de internalizarlas y transformarlas mentalmente, su postura es de un constructivismo dialéctico porque recalca la interacción de los individuos y su entorno, uno de sus conceptos que más impacta en las acciones educativas es el de la Zona de Desarrollo Próximo, misma que Onrubia (Coll y col., 1993) estudia como intervenir en ella y propiciar el aprendizaje significativo. Integrando a estos enfoques de la teoría cognitiva, García Aretio (2001) avanza hacia una teorización de la educación a distancia y de manera específica, sobre la educación virtual, en la cual se establece que un elemento fundamental para el aprendizaje, es el diálogo didáctico mediado y destaca las propuestas de Holmerg y Båått que enfatizan la importancia de la interacción y la comunicación, en dicho proceso. Adicionalmente a estos aspectos teóricos formales, el experimento supone una estructura de autoestudio centrada en el contexto que emplea al propio ámbito del estudiante, pero también la posibilidad de comunicación multidireccional entre sus compañeros y el maestro-facilitador, el uso de la infraestructura de la propia institución como soporte del curso, pero sobre todo a los elementos propios del estudiante como son su motivación, sus conocimientos previos y principalmente la flexibilidad y el autocontrol en el aprendizaje. Todos estos factores confluyen en el proceso de aprendizaje y dan soporte a la activación de los “escenarios de aprendizaje”, cuyo actor central es el estudiante, ya que el modelo educativo empleado en el proyecto es la “*educación centrada en el aprendizaje*”.

## Metodología

El estudio realizado corresponde a una *investigación cualitativa de alcance exploratorio* con una población bajo estudio compuesta de 40 estudiantes integrantes del “Curso cero” (aspirantes a ingresar a la Licenciatura en Informática) en la asignatura de Matemáticas dentro del Instituto Tecnológico de Puebla.



Para generar la información que requiere la investigación se emplea el material del “Concepto 0” de “Un libro de Cálculo Diferencial e Integral para su empleo en las carreras del SNIT por medio de Internet” (Alvarado, M. ,2002). Este material está disponible en Internet (<http://www.itpuebla.edu.mx>) y de manera

complementaria se les entrega a los estudiantes en un CD para que se tenga disponibilidad total y evitar la problemática que implica la posible comunicación por Internet al servidor y los costos que implica a los estudiantes la comunicación por Internet por largos periodos. Este material corresponde a archivos hipermedia con la estructura mostrada en la figura 2, y para los cuales no se prevé ningún tipo de evaluación ya que corresponde al proceso introductorio del curso de Calculo Diferencial e Integral:

- Focalización: en nuestro proyecto corresponde con la guía del autoaprendizaje y da estructura al escenario de aprendizaje activado virtualmente. Específicamente permite que el estudiante conozca en acción al objeto bajo estudio sin emplear lenguaje formal y planteándole situaciones contextuales y una serie de preguntas estructuradas bajo una estrategia mayéutica.
- Las acciones forman parte de la focalización y corresponde a las actividades que deberá de realizar el alumno para observar su contexto y “extraer” de él la naturaleza de los concepto, una vez que se indica en “qué” fijar la atención se plantean secuencias de preguntas a las cuales se responde con más preguntas guía. Consideramos que estas acciones son vitales y son las que permiten darle sentido al escenario de aprendizaje y lo individualizan ya que cada estudiante tiene su “ventana propia” a la realidad.
- Las aplicaciones presentan situaciones típicas en las cuales se observa el concepto en acción y aun sin pedir acciones específicas sobre ellas, complementan la visión del concepto lograda por medio de las acciones.

El material completo en el CD, se entrega a los estudiantes en la primera sesión y se realizó el siguiente proceso:

1. Sin información previa, salvo el como iniciar el CD en su computadora, se encargo resolver todas las preguntas plateadas en las acciones del concepto cero y entregar los reportes correspondientes por internet, tiempo empleado 1 semana, de viernes a viernes.
2. Una vez recibidos los correos se descargaron del internet y se analizó su contenido, clasificándolo.

## **Resultados**

Los resultados esperados se corresponde a una situación “piloto” de un proceso de autoestudio, ya que el material no se presentó al nivel de contenido, sino únicamente de manera física “en un CD”, (en este caso se empleó opcionalmente la vía de internet para acceder al material, pero sí obligatoria para la entrega de reportes). Algunos datos interesantes detectados son:

1. De los 40 estudiantes del curso 33 correspondiente al 82.5%, enviaron sus resultados por medio de internet, 9 lo entregaron impreso, 3 en disquete y 1 en CD. El 100% entregó sus resultados al menos 3 días después de la fecha prevista, se observa que dudaron de la recepción de sus trabajos y 6 lo entregaron simultáneamente por internet y otro medio. Dos estudiantes comentaron haber tenido dificultades para enviar los archivos por internet y prefirieron entregarlo impreso, ya que el tamaño era muy grande.
2. El 67.5% de los estudiantes no vive en la ciudad de Puebla, sino en comunidades cercanas.
3. El 100% informó no haber cursado Cálculo en bachillerato, pero haber escuchado de él.
4. El 100% proviene de Bachilleratos generales y principalmente del área de ciencias económico-administrativas.
5. De los 40 estudiantes 23 ya tenían una dirección de correo (57.5%), el resto se lo generó para cumplir sus actividades. En específico 4 estudiantes enviaron sus resultados por medio del correo de otro compañero.
6. El 100% de los estudiantes nunca habían usado el correo electrónico para enviar tareas a sus profesores, aunque los 23 que ya tenían correo si lo usaban para buscar información en internet, no se aclaró de qué tipo. De los 17 restantes, 12 si habían empleado internet antes para bajar información, pero realmente no lo habían usado de manera consistente y 5 nunca lo habían usado.

En cuanto al objetivo planteado en la investigación se obtuvieron los siguientes resultados:

1. En lo general los estudiantes no presentan un preconcepto de lo que es el Cálculo, los que se atrevieron a dar una definición lo hicieron desde dos aspectos:
  - a. El cálculo como herramienta para “calcular”, en un sentido aritmético, esta acepción la planteo menos del 10% del grupo.
  - b. Los estudiantes, no están acostumbrados a plantear sus propios preconceptos, por lo que se observó que estos fueron tomados de diferentes textos.
2. El preconcepto de límite está asociado básicamente al de “una barrera no rebasable”, que en efecto corresponde con el concepto matemática de un límite lateral cuando se analiza un extremo del dominio de las funciones, y no lo relacionan de ninguna manera con la continuidad, de la cual si presentan un preconcepto adecuado.
3. En cuanto a los conceptos de número y las acciones de contar y medir, se notan debilidades ya que no diferencian a las variables continuas y las discretas, por lo que existe confusión exacta de lo que es “medir”.
4. Los conceptos de derivada e integral básicamente no existen, aunque si se localizan los procesos de variación y acumulación. El concepto de velocidad no se diferencia claramente del de aceleración.
5. Una vez presentado el material de la acción 0.0.2, consistente en una presentación con vídeos y las lecturas de las aplicaciones, si se generaron preconceptos de derivada e integral.

El concepto de límite se afinó y se acepta que el límite si identifica situaciones que se pueden rebasar; en cuanto a la integral el preconcepto si se afinó adecuadamente.

6. En la escritura de los reportes de las acciones se observa dificultad de redacción de los conceptos presentados, considerando que esto resulta natural ya que en ningún momento se estableció lenguaje formal que los identificará.
7. Menos del 10% reconoció haber hecho modificaciones al concepto de Cálculo, sin embargo al revisar sus redacciones se observa que en realidad todos lo hicieron. Todos reconocieron haber aprendido que el cálculo se aplica aún de manera inconsciente y que lo encuentras en todas las situaciones que te rodean.
8. Al solicitar ejemplos de aplicación de los conceptos tratados límite, derivada e integral, el 100% aportó situaciones en las cuales los conceptos solicitados se encuentran en acción.
9. Los ejemplos de aplicación de “medir” presentan errores en casi 50% de los casos, lo que refleja la falta de discusión alrededor del concepto de cantidades continuas, en contraparte el 100% mostró un preconcepto aceptable de continuidad.
10. Cerca del 25% de los estudiantes respondieron por escrito a las preguntas planteadas en las aplicaciones a pesar de no haber sido solicitadas, no hay evidencias de que el 75% restante haya o no revisado las aplicaciones.
11. No existe evidencia que muestre si hubo intercomunicación entre los estudiantes, solamente se localizaron 2 trabajos que muestran “definiciones similares” por lo que se infiere copia, a pesar de ello estos trabajos de manera global son diferentes.
12. Sin que haya habido indicaciones al respecto, de los 40 estudiantes, menos del 10% solicitan al maestro les retroalimente al respecto de sus resultados.

De este conjunto primario de resultados se desprenden las conclusiones de la investigación por lo que podemos considerar al respecto de las preguntas de investigación:

1. *Determinar los preconceptos que el estudiante tiene:* Debido al área de bachillerato de que provienen solamente presenta un preconcepto restrictivo del límite, lo que dificulta el concepto matemático formal.
2. *Reconstruir los preconceptos:* las acciones de aprendizaje individuales, pero sobre todo el análisis de la presentación dada en la acción 0.0.2 permitió crear preconceptos asociados a contextos naturales.
3. *Catalogar la modificación de los preconceptos:* los preconceptos se lograron a través de la metodología mayéutica y son aceptables para iniciar su estudio dentro del curso formal de Cálculo, desde nuestro punto de vista sí representan andamiajes adecuados.

En cuanto a la hipótesis de trabajo, resulta válida; pero es necesario clarificar que la exteriorización de los preconceptos no resulta ser de manera verbalizada, lo cual consideramos dentro de lo esperado, ya que no se estableció en ningún apartado o momento, dentro de las acciones didácticas, el proponer alguna terminología o sintaxis para expresarlas; nos damos cuenta de que la exteriorización de los preconceptos se cumple al analizar que el 100% de los estudiantes propone ejemplos aceptables sobre situaciones reales en las cuales el concepto se encuentra en acción.

## **Conclusiones y recomendaciones**

Se debe de considerar el efecto de los preconceptos en el aprendizaje del cálculo al igual que en cualquier área del conocimiento como limitante o acelerador de los procesos formales de aprendizaje, según se establece en las teorías cognitivas. En particular se sugiere emplear como rescate de los preconceptos las vivencias contextuales de los estudiantes y reconstruir con mayor cuidado el preconcepto de límite.

## **Referencias Bibliográficas**

- Alvarado A. M. González M. E. (2002). *Un libro electrónico de Cálculo Diferencial e Integral para su empleo en las carreras del SNIT por medio de Internet*. Tesis de maestría no publicada, CIIDET, México.
- Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. (2ª edición). Mexico: Trillas.
- Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I. y Zabala, A. (1993). *El constructivismo en el aula*. (1ª edición) España: Graó.
- García A.L.(2001). *La educación a distancia – De la teoría a la práctica*. España: Ariel Educación.
- Ginsburg, H. y Opper, S. (1977). *Piaget y la teoría del desarrollo intelectual*. México: Prentice/Hall Internacional.
- Good, L. y Brophy, J. (1996). *Psicología educativa contemporánea*. (5ª edición). México: McGraw-Hill/Interamericana editores.
- Pérez, M. y López, E. (2000). *Aprendizaje y currículo. Diseños curriculares aplicados*. Argentina: Ediciones Novedades Educativas.
- Schunk, D. H. (1997). *Teorías del Aprendizaje*. (2ª edición) México: Prentice-Hall Hispanoamericana.