Papel de la Teoría de Conjuntos en la Construcción de los Números Naturales

Mario J. Arrieche
Universidad Pedagógica Libertador
Venezuela
marrieche@ipmar.upel.edu.ve
Epistemología — Nivel Superior

Resumen

Esta investigación se centra en la caracterización del papel de las nociones conjuntistas básicas en la construcción de los números naturales. El problema está inmerso en un proyecto macro sobre "el papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros de educación primaria". Como el currículo de los maestros es muy amplio delimitamos el problema a las relaciones ecológicas entre estas nociones y los números naturales. Para tal fin caracterizamos el papel de los conjuntos en las construcciones de los números naturales elaboradas por autores interesados en los fundamentos de la Matemática (Frege, Dedekind y Peano) y las realizadas desde un enfoque constructivista (Weyl y Lorenzen). Para ello, usamos la noción de praxeología matemática descrita en el modelo semiótico-antropológico para la investigación en Didáctica de la Matemática (Godino y Batanero, 1994).

Introducción

El problema que se aborda en esta investigación se centra en la caracterización del papel de las nociones conjuntistas básicas en la construcción de los números naturales.

Para tal fin, se realizó un estudio de las construcciones de los números elaboradas por autores interesados por los fundamentos de la matemática Frege, Dedekind y Peano y las realizadas desde un enfoque constructivista Weyl y Lorenzen. Para ello, abordamos los siguientes estudios:

Descripción sucinta de los principales aspectos matemáticos considerados en las construcciones de los números naturales propuestas por los autores citados.

Descripción e interpretación del papel de las nociones conjuntistas básicas en las construcciones en referencia, haciendo uso de la noción de praxeología matemática.

Desarrollada en el modelo teórico propuesto por Godino y Batanero (1994) y designado como semiótico-antropológico para la Investigación en Didáctica de la Matemática.

Para lograr esta meta, consideraremos las dimensiones praxémica (tipos de problemas, técnicas y los elementos notacionales o lingüísticos) y discursiva (conceptos- definiciones, propiedades- proposiciones, argumentaciones- justificaciones) de la praxeología matemática, puestas en funcionamiento en la mencionada construcción.

Cabe destacar que, por cuestiones de espacio, en este trabajo solo describimos la construcción de los números elaborada por Frege (1884). Se remite al lector, interesado en este tema, a

Arrieche (2002) donde se hace una análisis profundo y detallado de las construcciones elaboradas por los autores referidos.

Construcción de los Números Naturales Según Gottlob Frege

En este apartado, describimos el desarrollo de la construcción de los números naturales realizado por Gottlob Frege, proveniente de su trabajo denominado "Die Grundlagen der Aritmetik" (Fundamentos de la Aritmética) publicado en el año 1884. Es de hacer notar que toda la obra de Frege (inclusive toda su vida) la dedicó a tratar de entender qué son los números naturales y de dónde surge que los teoremas aritméticos sean tan seguros y confiables, matemáticamente hablando. Todo este esfuerzo, se tradujo en tratar de desarrollar su tesis logicista: Reducir toda la aritmética a la lógica.

Primera Aproximación

Para definir el concepto de número, Frege sigue el siguiente procedimiento: empieza diciendo lo que no son los números, y en segundo lugar trata de responder a la pregunta, ¿qué son los números?

Al describir lo que no son los números expresa que "los números no son cosas materiales, ni conjuntos, montones o configuraciones de cosas materiales; y no son propiedades de cosas materiales" [1]. Sigue diciendo que los números tampoco son algo subjetivo, no son nada físico, no son una imagen, y no se confunden con los signos que se refieren a ellos. Se señala que "el número no surge añadiendo una cosa a otra. También es irrelevante para él que demos una denominación a cada nuevo añadido" (Frege, 1884, p.72).

Frege expresa que los enunciados numéricos no se refieren a objetos, sino a conceptos. En este sentido, Frege (1884) señala que el soporte de los números es el concepto, resalta además que podemos ver cómo llegamos a la idea de número por abstracción, pero que esto no puede ser así, ya que lo que se obtiene de esta manera es el concepto, en el cual se descubre el número.

Al asignar un número se afirma algo sobre un concepto, por ejemplo: "Si decimos que la tierra tiene un satélite natural, o que nuestro sistema solar tiene nueve planetas, o que en la biblioteca municipal hay veinte mil libros, estamos diciendo algo de conceptos: que bajo el concepto "satélite natural de la tierra" cae un objeto, bajo el concepto "planeta de nuestro sistema solar" caen nueve objetos, bajo el concepto "libros de la biblioteca municipal" caen veinte mil objetos" (Mosterín, 2000, p. 48).

Frege se plantea definir recursiva y contextualmente los números naturales, para lo cual, enuncia las siguientes proposiciones:

- El número 0 corresponde al concepto P si ningún objeto cae bajo P, y

[1] Mosterin, 1972, p.p 5-6, prólogo de la obra de Frege Fundamentos de la Aritmética, 1884

- El número *n* +1, cae bajo el concepto *P*, si hay un objeto *a*; tal que *a* cae bajo *P*, y el número *n* corresponde al concepto "cae bajo *P*", pero es distinto de *a*.

Así, se habría definido cada número natural n "en enunciados del tipo "el número n corresponde al concepto P", pero no en ecuaciones, que constituye el tipo más frecuente de teorema matemático"[2] . Frege argumenta que con este procedimiento, todavía no ha definido el concepto de número en forma general. Por lo que para presentar definitivamente el concepto de número, lo realiza en dos etapas:

- Define el concepto de número cardinal (en general) y;
- Se precisa el concepto de número natural o finito.

Definición de Número Cardinal

Para describir el concepto de número cardinal Frege define una relación de equivalencia R sobre una clase A. Introduce, de esta manera, la definición de clase de equivalencia de un elemento b de A, como la clase de todos los elementos de A que están con b en la relación R. Continúa argumentando que una manera de definir entidades matemáticas, consiste en definirlas como las clases de equivalencia inducidas por una determinada relación de equivalencia en una clase previamente dada de elementos. Para ilustrar esta situación presenta un ejemplo, considerando las rectas del plano, y la relación de paralelismo entre ellas, la cual es una relación de equivalencia que genera una partición de la clase de las rectas del plano, en clases de equivalencias, a las que se llama direcciones. Se deduce que la dirección de una recta *b*, no es sino la clase de equivalencia de *b* respecto a la relación de paralelismo, en otras palabras, la clase de todas las rectas paralelas a *b*.

Frege aplicó este mismo proceso para definir número cardinal, el cual desarrollamos a continuación. Para tal efecto, se exige contar con un dominio previamente dado de elementos, y definir en él una adecuada relación de equivalencia.

En el caso que nos ocupa, se elige como dominio la clase cuyos elementos son conceptos, sobre el cual se define como relación de equivalencia entre conceptos, la relación de biyectabilidad. El concepto *P* es biyectable con el concepto *Q* sí y sólo sí hay una biyección entre los objetos que caen bajo *P* y los objetos que caen bajo *Q*. En otras palabras, *P* es biyectable con *Q* sí y sólo sí hay una relación que relaciona cada objeto que cae bajo *P* con un (y sólo un) objeto que cae bajo *Q*, y a la inversa.

Como la relación de biyectabilidad es de equivalencia, genera una partición del dominio dado (clase de los conceptos) en clases de equivalencia, a las que llama números cardinales. El número cardinal de un concepto *P* es la clase de equivalencia de *P* respecto a la relación de biyectabilidad, es decir, la clase de todos los conceptos biyectables con *P*. Es lo que Frege expresa en su peculiar terminología diciendo que "el número que corresponde a un concepto *F* es la extensión del concepto equinumérico del concepto *F*" (Frege, 1884, p.92).

[2] Mosterín, 1972, p.6, prólogo de la obra de Frege Fundamentos de la Aritmética, 1884.

Definición de Número Natural

Para definir número natural se requiere de las definiciones previas siguientes:

El 0 se define como el número que corresponde al concepto "distinto de sí mismo", es decir, es la clase de todos los conceptos vacíos. De igual manera, se define el 1 como el número que corresponde al concepto "igual a 0" . Es decir, el 1 es la clase de los conceptos unitarios. Posteriormente, Frege enuncia que: *n* es el siguiente de *m* si hay un concepto *P* y un objeto *a* que cae bajo él, tales que *n* es el número de *P* y *m* es el número del concepto "cae bajo *P* y es distinto de *a*". Una vez dadas, las definiciones del 0 y de siguiente estamos en capacidad de dar la definición de número natural.

La definición que propone de número natural es la que sigue: *n* es un número natural si *n* pertenece a la serie numérica que empieza por 0. Es decir, que n es 0 o que n cae bajo cada concepto bajo el que cae el 1, y bajo el que cae el siguiente de cada objeto que cae bajo él.

En la definición de Frege, se observa que los números naturales son los objetos que satisfacen el V axioma de Peano. En especial, se muestra que todo "número natural tiene un siguiente indicando que para cada número natural n, el número natural que corresponde al concepto "pertenece a la serie numérica que termina con n" es el siguiente de n" [3].

El Papel de las Nociones Básicas de la Teoría de Conjuntos en la Construcción de los Números Naturales Realizada por Frege

Para caracterizar el papel de las nociones conjuntistas básicas en la construcción de los números naturales realizada por Frege (1884), consideraremos las dimensiones praxémica (situaciones-problema, técnica, lenguaje) y discursiva (conceptos, propiedades, argumentaciones) de una praxeología matemática.

Dimensión Praxémica

En esta dimensión, destacaremos los tipos de situación problema abordados por Frege, las técnicas y los elementos notacionales o lingüísticos usados en su construcción de los números. Con respecto a los tipos de situación problema, Mosterín (2000) señala que Frege se dedicó a dos tareas básicas: la fundamentación de la aritmética y la aclaración de las nociones semánticas. En relación a las técnicas, tomaremos en cuenta el procedimiento empleado, es decir, el conjunto de pasos realizados para obtener el concepto de número natural y la serie numérica 0, 1, 2, 3, . . . de los números naturales. Dentro de este procedimiento, sólo enfatizaremos algunos aspectos desarrollados, tales como la definición recursiva y contextual de los números naturales (en el contexto de un enunciado del tipo "el número *n* corresponde al concepto *P*), que consiste en dar los enunciados:

---

[3] Mosterín, 1972, p. 8, prólogo de la obra de Frege Fundamentos de la Aritmética, 1884.

- El número 0 corresponde al concepto *P* si ningún objeto cae bajo *P*, y
- El número *n* + 1, cae bajo el concepto *P*, si hay un objeto *a*; tal que *a* cae bajo *P*, y el número *n* corresponde al concepto "cae bajo *P*, pero es distinto de *a*".

Para presentar definitivamente el concepto de número, lo realiza en dos etapas: define el concepto de número cardinal y precisa el de número natural o finito. A su vez, para elaborar la definición de número cardinal define una relación de equivalencia R sobre una clase A.

Es notorio que desde el mismo planteamiento del procedimiento analizado, se nos presenta de una forma implícita el uso de las nociones básicas de la teoría de conjuntos. Más concretamente, para definir una relación R que sea de equivalencia se requiere obligatoriamente la existencia de un conjunto A, sobre el cual se definirá la propiedad o regla matemática que cumpla con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, que, en el contexto desarrollado lo identificamos con la clase A. Además para demostrar el cumplimiento de las mencionadas propiedades, se exige determinar el conjunto de los pares ordenados del producto cartesiano AxA que cumplen con la definición de la relación R definida sobre A.

Con respecto al uso de los elementos notacionales o lingüísticos, señalamos los siguientes:

- *n*: denota un número cualquiera
- *P*: se refiere a un concepto
- 0: símbolo para denotar el cero
- *n* + 1: un número cualquiera más 1
- *a*: denota un objeto cualquiera
- R: denota una relación cualquiera
- A: denota una clase cualquiera.

En este aspecto de la praxeología numérica, identificamos las notaciones de un objeto y de una clase cualquiera con las notaciones de elemento de un conjunto y la de un conjunto cualquiera, respectivamente.

Dimensión discursiva

En esta componente de la praxeología, mostraremos sólo aquellos elementos (conceptos-definiciones, propiedades y argumentaciones) que involucran implícita o explícitamente nociones conjuntistas en su descripción. En este sentido, en la *argumentación* dada por Frege, la relación de equivalencia definida sobre la clase A para definir el número cardinal genera una partición de A en clases de equivalencia, tiene implícitas nociones conjuntistas básicas, las cuales especificamos a continuación. Para *definir el concepto de partición* se requiere de las nociones de familia de conjuntos, conjunto vacío, intersección de conjuntos y unión de conjuntos, puesto que una partición sobre un conjunto A es una familia de conjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos, cuya unión es el conjunto A.

Además en *la definición de la noción de clase de equivalencia de un elemento b* de *A* como la clase de todos los elementos de A que están con b en la relación *R*, se observa, prácticamente en forma explícita, que la noción de clase corresponde a la noción de conjunto. También se puede resaltar que las *propiedades* reflexiva, simétrica y transitiva que debe cumplir la relación R para ser de equivalencia involucran las nociones de conjunto, elemento de un conjunto, subconjunto, producto cartesiano, etc.

En l*os conceptos-definiciones* se elige como dominio la clase cuyos elementos son conceptos y se define la relación de equivalencia entre conceptos, como relación de biyectabilidad, se expresa de la manera siguiente: el concepto *P* es biyectable (o están relacionados mediante la relación de biyectabilidad) con el concepto *Q* sí y solo sí hay una biyección (aplicación biunívoca) entre los objetos que caen bajo *P* y los objetos que caen bajo *Q*.

Veamos el *concepto-definición,* el número cardinal de un concepto *P* es la clase de equivalencia de *P* respecto a la relación de biyectabilidad, es decir, la clase de todos los conceptos biyectables con *P*. En esta definición se involucra la noción de conjunto, resaltándose que un número cardinal es un conjunto, y que a su vez, sus elementos son conjuntos.

Conclusiones

En este trabajo hemos complementado el análisis epistemológico realizado por Arrieche (2002) ejemplificando el papel de la teoría de conjuntos en la matemática, a través del análisis de las construcciones de los números naturales dadas por Frege, Dedekind, Peano, Weyl y Lorenzen. Este análisis nos ha permitido caracterizar el papel de las nociones básicas de la teoría de conjuntos en las construcciones numéricas estudiadas.

Hemos encontrado que las construcciones de los números naturales realizadas por los matemáticos referidos, presentadas con diversos enfoques (logicista, formal y constructivista), están conectadas por el uso de nociones básicas de la teoría de conjuntos, debido a que sus desarrollos utilizan implícita o explícitamente estas nociones.

Nuestra indagación de las diversas aproximaciones filosóficas sobre los números nos lleva a considerar los números naturales como la estructura matemática común de los sistemas de objetos usados para expresar las situaciones de cardinación y ordenación.

Es frecuente encontrar en los textos matemáticos y filosóficos definiciones de números naturales tales como los números naturales son:

- "los cardinales finitos",
- "las clases de equivalencia de los conjuntos finitos equipotentes entre sí"
- "la propiedad común de los conjuntos finitos que son equipotentes" (expresión inapropiada como criticó Russell (1903)

En estos casos no se explicita que los números son los elementos de cualquier conjunto con una estructura específica, de modo que cada número en particular lo es en tanto que forma parte del sistema correspondiente. Esas expresiones metafóricas ocultan la verdadera realidad de los números, y además confunden un ejemplar de los infinitos sistema numéricos posibles con el tipo estructural correspondiente.

Interesa concebir los cardinales finitos como cantidades, mientras que los números son las medidas de los cardinales, esto es, maneras de expresar las cantidades. Los cardinales de conjuntos son la razón genética de los números, pero los números tienen una realidad diferente de la numerosidad de los conjuntos. Sin embargo, es cierto que cualquier sistema de cantidades discretas (una colección de palotes o piedrecitas, por ejemplo) se puede estructurar recursivamente y ser usado como sistema numérico.

El análisis realizado a las construcciones de los números naturales consideradas, nos permite concluir que todos los enfoques estudiados en esta investigación, excepto la definición por abstracción que consideramos incorrecta al igual que Russell (2003), nos conducen a concebir los números como una estructura abstracta que tiene una secuencia recursiva, teniendo presente que para efectos didácticos se utilice la definición que hemos propuesto anteriormente.

Referencias Bibliográficas

Arrieche, M. (2002). *Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Frege, G. (1972). *Fundamentos de la aritmética*. [U. Moulines (trad.), Barcelona: Laia].

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Mosterín, J. (2000). *Los lógicos*. Madrid: España.

Russell, B. (1967). *Los principios de la matemática.* [J. C. Grimberg (trad.), Madrid: Espasa-Calpe].