Significados Personales de la Derivada en Estudiantes de Ingeniería

Albéniz A. Meléndez y Mario J. Arrieche
Universidad Rómulo Gallegos, Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
albenizamq@yahoo.com, marrieche@ipmar.upel.edu.ve
Didáctica de la Matemática – Nivel Superior

Resumen

Esta investigación se centra en la caracterización de los significados personales de la derivada en estudiantes de Ingeniería y se desarrolla considerando diferentes dificultades que surgen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las derivadas. El marco teórico se fundamenta en la adopción del modelo semiótico-antropológico propuesto por Godino y Batanero (1994) y utilizado por Arrieche (2002), entre otros. Se establecen y estudian las tres facetas que deben ser consideradas en un proyecto de investigación en Didáctica de la Matemática: epistemológica, cognitiva e instruccional. Metodológicamente, se combinan enfoques cualitativos en las fases epistemológica e instruccional con esquemas cuantitativos en la fase cognitiva. Mediante el análisis semiótico se evalúan los resultados.

Introducción

La ingeniería y la matemática están estrechamente vinculadas debido a que los conocimientos matemáticos son algunas de las herramientas fundamentales conque los ingenieros analizan, evalúan y resuelven muchos de sus problemas o proyectos. Para los estudiantes de ingeniería la derivada constituye uno de los conceptos fundamentales a aprender y a aplicar, por sus aplicaciones para la evaluación del comportamiento de modelos matemáticos representativos de situaciones reales, como es el caso de análisis de rapidez de variación, rata de cambio, sensibilidad, optimización, análisis de curvas, etc. El propósito de esta investigación es determinar el grado de conocimiento sobre el manejo de las derivadas y sus aplicaciones que tienen los estudiantes de Ingeniería, específicamente los estudiantes Agronomía en la Universidad Rómulo Gallegos (Edo. Guárico-Venezuela).

Siguiendo el modelo semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas, propuesto por Godino y Batanero (1994, 1997), se toman en consideración las tres dimensiones básicas involucradas en un problema de investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática: epistemológica, cognitiva e instruccional. Este estudio está inmerso en la línea de investigación: "Perspectiva del enfoque semiótico-antropológico para la investigación en Didáctica de la Matemática", registrada en la Coordinación General de Investigación de la UPEL-Maracay y liderizada por el Dr. Mario Arrieche.

I.- El problema

1.1.- Planteamiento del problema

Existe un bajo rendimiento y un alto índice de repitencia y deserción de los estudiantes de cálculo en el nivel universitario, en particular y según la experiencia del investigador durante más de veinte años de ejercicio de la docencia en la Universidad Rómulo Gallegos, en San Juan de los Morros, Estado Guárico, Venezuela. Los ingenieros en proceso de formación deben recibir una instrucción en Matemática que les permita identificar, interpretar, modelar y resolver situaciones relacionadas con su ejercicio profesional. La derivada es una de las herramientas matemáticas de mayor utilidad para los Ingenieros y otros profesionales, en virtud de sus múltiples aplicaciones: análisis de rapidez de variación, optimización, esquema de variación, sensibilidad al cambio de alguna variable, etc., de algunos fenómenos o situaciones reales modelados matemáticamente. Esto ha inducido al investigador formularse la pregunta: ¿Cuáles son los significados personales que tienen los estudiantes de ingeniería, sobre las derivadas y sus aplicaciones? Luego surgen así otras interrogantes que, siguiendo a Godino (1999) y Arrieche (2002), pueden clasificarse en:

Epistemológicas: ¿Qué son las derivadas?, ¿Cuál es el origen de las derivadas?, ¿Cómo evolucionan las derivadas?, ¿Qué importancia tienen las derivadas para la matemática?

Cognitivas: ¿Cuál es el nivel de comprensión que tienen los estudiantes de Ingeniería Agronómica, sobre las derivadas y sus aplicaciones?, ¿Qué dificultades, errores y obstáculos presentan los estudiantes de ingeniería en el estudio de las derivadas?

Instruccionales: ¿Cómo se enseñan las derivadas a los estudiantes universitarios?, ¿Qué reformas curriculares será necesario hacer, para adaptar la enseñanza de las derivadas a los requerimientos reales de los profesionales modernos?, ¿Qué expectativas se plantea la institución con la enseñanza de las derivadas?, ¿Los libros de texto disponibles o más utilizados en la región, se adaptan a esos requerimientos?

1.2.- Objetivos de la investigación

1.2.1.- Objetivo general: *Determinar los significados personales con respecto a las derivadas en estudiantes de Ingeniería.* Mediante un análisis epistemológico, cognitivo e instruccional, con la perspectiva de mejorar los resultados del proceso de enseñanza y aprendizaje de este tópico matemático, en los estudiantes referidos.

1.2.2.- Objetivos específicos de la investigación:

1. Realizar un estudio epistemológico de las derivadas, considerando su origen, desarrollo y aplicaciones, e identificar los problemas obstáculos que dieron origen a esta noción.
2. Distinguiendo los aspectos global, declarado y logrado (Godino, 2003), caracterizar los significados personales de los estudiantes sobre las derivadas, tras un proceso de estudio.

2.- MARCO TEÓRICO

2.1.- Antecedentes

Siguiendo el esquema de la tesis doctoral de Arrieche (2002), se analizan los aspectos epistemológicos, cognitivos e instruccionales de las derivadas, mediante la revisión de diversas fuentes relacionadas con el tema objeto de investigación.

2.1.1.- Aspectos epistemológicos:

Grabiner (1983), señala que el desarrollo histórico de la derivada comienza por su utilización, luego su descubrimiento, desarrollo y definición. Newton y Leibnitz, en forma independiente inventaron el cálculo infinitesimal; sin embargo, algún conocimiento existía desde tiempos remotos. Las paradojas de Zenón sobre la imposibilidad del movimiento se relacionan con los conceptos de infinitésimos; el principio de exhausción de Eudoxo introduce operaciones que requieren límites de sumas infinitas y es usado por Arquímedes en la búsqueda de la cuadratura de la parábola (Ríbnikov, 1987). Fermat fue el primero en utilizar la derivada; mediante un ingenioso método puramente algebraico determinó máximos y mínimos de funciones polinómicas. Newton utilizó un lenguaje que dificultó el entendimiento de su descubrimiento; cantidades fluentes, fluxión y momentos eran equivalentes a funciones, derivadas y diferenciales. Leibnitz introdujo la notación $\frac{dy}{dx}$ para la derivada y utilizó el triángulo diferencial. La fase de desarrollo de la derivada corresponde a Euler y Lagrange; Cauchy formula la definición actual de la derivada como un límite.

2.1.2.- Aspectos cognitivos:

En algunos trabajos realizados por investigadores en enseñanza y aprendizaje de la matemática, se consideran obstáculos epistemológicos y conflictos semióticos presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática y de la derivada en particular.
Inglada y Font (2003), analizan algunos conflictos semióticos relacionados con la notación $\Delta y/\Delta x$ así como el generado por *"La complejidad del paso de la derivada en un punto a la función derivada"* (p. 8) y presentan un detalle del entramado de funciones semióticas que debe activar el alumno para comprender la definición de derivada.

Hitt (2003), analiza las dificultades presentes en el aprendizaje del cálculo; respecto a la derivada, estudia la dificultad que representa para los estudiantes establecer la representación visual de los conceptos matemáticos y su resistencia a hacerlo.

2.1.3.- Aspectos Instruccionales:

Andreu y Riestra (2002) proponen como alternativas para la enseñanza desde la perspectiva histórico-epistemológica, con dos ejemplos de aplicaciones de la derivada que *reproducen* el esquema original, aplicando los métodos utilizados por Fermat y Kepler .
Azpilicueta y Ledesma (2002) proponen un cambio de paradigma en el proceso de enseñanza-aprendizaje, desde la óptica conductista hacia modelos de mayor participación por parte del alumno: Modelo Constructivista y por Investigación.

2.2.- Bases teóricas

La investigación en Didáctica de la Matemática articula las facetas epistemológicas, cognitivas e instruccionales puestas en juego durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática; el modelo semiótico-antropológico propuesto por Godino y Batanero (1994) es una de sus principales herramientas. Algunas nociones teóricas de este modelo son: la *práctica*, la *Institución*, los *Significados Institucional* y *Personal* de un objeto matemático, los *Sistemas de prácticas*, el *Objeto matemático* y la *Función semiótica*.

3.- MARCO METODOLÓGICO

3.1.- Tipo de investigación:

Se sigue un paradigma metodológico de tipo mixto, combinando esquemas cualitativos y cuantitativos, de acuerdo con la faceta de estudio y la parte del problema que se estudie.
La faceta epistemológica se lleva a cabo mediante un estudio documental y cualitativo, en la faceta cognitiva se utiliza un enfoque cuantitativo y experimental combinado con un enfoque cualitativo e interpretativo y en la faceta instruccional se estudian casos de experiencias fundamentadas en estrategias de enseñanza y el análisis semiótico (Godino y Arrieche, 2001).

3.2.- Población y muestra:

La población está constituida por los estudiantes del 1er. año de Ingeniería; la muestra la representan 71 estudiantes de Ingeniería Agronómica de la UNERG.

3.3.- Técnica de recolección de datos:

La recolección de datos se ha hecho mediante: a) un cuestionario escrito para evaluar los conocimientos sobre las derivadas. El esquema cuantitativo consiste en la *medición* mediante las respuestas de los alumnos y el esquema cualitativo consiste en la caracterización e interpretación de los errores cometidos por los estudiantes, que son reflejados en las respuestas; b) La observación no participante de nueve sesiones de clase, dedicadas a la enseñanza de la derivada y sus aplicaciones.

4.- Análisis epistemológico de la derivada

Se hace un análisis epistemológico sobre los factores que determinan el origen de las derivadas, los fundamentos teóricos mediante los cuales se definen y sus aplicaciones, para lo cual se realiza un estudio documental mediante la revisión y lectura de diversas fuentes bibliográficas que tratan el tema en cuestión, además del aporte complementario producto de nuestras propias reflexiones; tales fuentes consisten en tesis doctorales, trabajos de investigación y libros de texto especializados en historia de la matemática.

El estudio epistemológico tiene un importante significado para la enseñanza de la matemática porque, según las modernas concepciones didácticas, el uso de la historia en la enseñanza de la ciencia toma en cuenta una relación teórica entre la Ontogenia y la Filogenia. Según Kline

(1978) para apoderarse de un saber, el ser individual debe reproducir durante el proceso de aprendizaje y en forma muy sintética, las etapas por las que pasó el ser social a través de la historia de formación de ese conocimiento, incluyendo los obstáculos encontrados.

Durante más de 20 siglos, desde los griegos hasta Descartes, se trató de dar solución a cuatro problemas fundamentales para obtener: la velocidad y la aceleración instantánea de un cuerpo en movimiento, la tangente a una curva, el valor máximo o mínimo de una función, y longitudes de curvas, áreas, volúmenes, etc. Fermat, según Boyer (1999), expuso en uno de sus tratados un ingenioso procedimiento para determinar los máximos o mínimos de las curvas dadas por ecuaciones, que en notación moderna tienen la forma $y = x^n$; sin saberlo, aplicaba la noción de derivada. Isaac Barrow en su obra *Lectiones Geometricae*, expone un método para obtener tangentes a las curvas; "*En él utilizaba métodos geométricos, «liberados», según decía, «de las abominables cargas del cálculo»*" (Kline, 1994, p.457). El método es similar al de Fermat, pero usa dos cantidades incrementales que en terminología actual son equivalentes a Δx y Δy.

Newton y Leibnitz son considerados como los creadores del cálculo infinitesimal, a pesar de la controversia planteada entre los matemáticos de la época en torno a la paternidad de esta invención; sin embargo, hoy día está claro que "*el descubrimiento de Newton precedió al de Leibniz en unos diez años, así como que Leibniz hizo sus descubrimientos independientemente de los de Newton. Por otra parte, a Leibniz le corresponde la paternidad de la publicación…*"(Boyer, 1999, p.502).

Newton plantea un método que generaliza la obtención del cambio relativo de una variable respecto a otra. Kline (1994) explica el método de la manera siguiente: el área bajo una curva está dada por la expresión: $z = ax^m$, con m entero o fraccionario, considera los incrementos infinitesimales, $z + oy = a(x + o)^m$. Por aplicación del teorema binomial, restar $(z + oy) - z$, dividir por o y despreciar los términos que aún contienen o, queda la expresión: $y = max^{m-1}$. Así demuestra Newton que "*el cambio relativo del área en cualquier x es el valor de y de la curva en ese valor x. Recíprocamente, si la curva es $y = max^{m-1}$, el área de la curva encerrada es $z = ax^m$.*" (Kline, 1994, pp.473 – 474).

En otro artículo Newton cambia la visión estática de los momentos de las variables, heredada de los indivisibles de Cavalieri; considera a las "*variables como generadas por el movimiento continuo de puntos, rectas y planos, más que como agregados estáticos de elementos infinitesimales…*" (Kline, 1994, p.478). Llama a x e y cantidades fluyentes, $\dot{x}$ la fluxión de x (similar para y), o: intervalo de tiempo infinitamente pequeño, $\dot{x}o$: momento de x (incremento infinitamente pequeño de x), plantea la relación entre $\dot{x}$ e $\dot{y}$ para la fluyente $y = x^n$ y concluye que $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

En un tercer artículo, Newton critica el desprecio de los términos alegando que en matemáticas, ni los errores más mínimos son despreciables, porque considera a "…*las cantidades matemáticas, en este punto, no como consistentes en pequeñas partes, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas están descritas, y por tanto generadas, no por la yuxtaposición de partes, sino por el movimiento continuo de puntos…*" (Kline, 1994, p.480).

Explica Boyer (1999) que con esta nueva visión del cálculo, Newton evita tanto las cantidades infinitamente pequeñas como las cantidades fluentes y las reemplaza por una nueva teoría:

razones primeras y últimas. Para ello calculaba la razón primera de incrementos nacientes o la razón última de incrementos evanescentes, luego para obtener la razón primera y última, deja desvanecer la o. "*Newton está aquí realmente muy cerca del concepto de límite, aunque la objeción principal que se le podría hacer sería al uso impreciso de la palabra «desvanecerse»: ¿Es que existe realmente una razón entre incrementos que se han «desvanecido»?*" (Boyer, 1999, p.500)

5.- Análisis de resultados

La prueba fue presentada por 71 estudiantes y está constituida por cinco ítems, que involucran la definición de derivada, aplicación de las reglas de derivación, interpretación geométrica de la derivada. Para el análisis de los errores para caracterizar los significados personales se han establecido tres categorías de respuesta: correcta, parcialmente correcta e incorrecta; sobre esta última se analizan los errores cometidos por los estudiantes; en Meléndez (2005) se hace un estudio detallado de todos los ítems. Por cuestiones de espacio en este trabajo mostramos solo el ejemplo del análisis realizado al ítem 1.

Item 1.- Determine $f'(x)$ a $f(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8)\cdot Arsec(2x)$

Respuesta del Alumno 16: "$f'(x) = \left(12x^3 + 10^2 + 10\right)\cdot\left(\frac{2}{x\sqrt{x^2 - 1}}\right)$"

Errores: No aplica la fórmula de la derivada del producto de funciones y no deriva bien ninguno de las funciones propuestas.

La prueba en general fue difícil para los estudiantes, puesto que solo el 15% de los mismos lograron aprobarla.

6. Conclusiones

El análisis epistemológico realizado nos permitió encontrar que el desarrollo de la definición de derivada fue muy lento, y se vio limitado por la ausencia de una estructura matemática para justificar los conceptos casi intuitivos que se manejaron desde la antigüedad hasta la aparición de la geometría analítica, en primer lugar, y después la definición de límite. En relación al estudio cognitivo (caracterización de los significados personales) encontramos que los estudiantes cometieron los siguientes errores: operaciones algebraicas elementales, interpretación de las reglas de derivación, especialmente la de la regla de la cadena y errores conceptuales. Esto nos insta a afirmar que los profesores que enseñan las derivadas en la carrera en referencia, deben dedicar más tiempo a la resolución de ejercicios donde se aplique las reglas de derivación; además de implementar estrategias de enseñanza que le permita a sus alumnos un aprendizaje eficaz y de una forma más rápida.

Referencias Bibliográficas

Andreu, M. y Riestra, J. (2002). *Propuesta alternativa para la Enseñanza del Concepto de Derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica de su desarrollo. Disponible:* http://www.dns.smm.org.mx/durango2002/final/node356.htm.

Arrieche, M. (2002). *La Teoría de Conjuntos en la Formación de Maestros. Facetas y factores condicionantes del estudio de una Teoría Matemática*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Azpilicueta, J y Ledesma A (2002). *La enseñanza y el aprendizaje del Análisis Matemático en carreras de Ingeniería a partir de situaciones problema. Un Modelo Conceptual Constructivista y por Investigación para la derivada y la integral definida*. Disponible: http://www.asee.org/international/INTERCH2002/829.pdf

Boyer, (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques, 14*(3): 325-355.

Godino, J. y Batanero, C. (1997). A semiotic and antropological research in mathematics education. *Philosophy of Mathematic Education Journal*. 10. *Disponible*: http://www.ex.ac.uk/local/PErsnest/pome10/art.htm

Godino, J.D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. *Actas del III Simposio de la SEIEM*. Valladolid.

Godino, J.D. y Arrieche, M. (2001). *El análisis semiótico como técnica para determinar significados*. Comunicación presentada en el V Simposio de la SEIEM, Grupo de Trabajo DMDC. Almería.

Godino, J.D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas en didáctica de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible: http://www.ugr.es/local/jgodino/.

Grabiner, J.V. (1983). The Changing concept of change. The derivate from Fermat to Weiersstras. *Mathematics Magazine, 56*(4), 195-206.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia. Disponible: http://www.hemerodigital_unam.mx.

Inglada, N. y Font, V. (2003). *Significados Institucionales y Personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación Incremental*. XIX Jornadas del SI-IDM. URL: http://www.ugr.es/~/jgodino/siidm/cordova_2003/IngladaFont.pdf.

Kline, M. (1972). *El fracaso de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, I*. Madrid: Alianza.

Meléndez, A (2005). *Significados personales de la derivada en estudiantes de ingeniería*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Rómulo Gallegos. Guárico, Venezuela.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.